创新版奥林匹克竞赛丛书

Olympic Games

中国华罗庚学校数学课本

高一年级

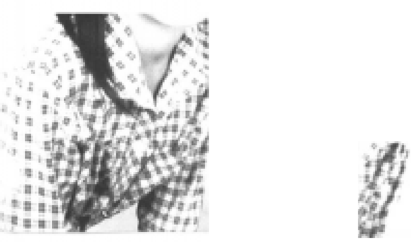
总 策 划　何　舟

本册主编　周敏泽

吉林教育出版社

中国华罗庚学校数学课本

高一年级



总策划　何　舟

总主编　马传渔

本册主编　周敏泽

副主编　陈小红

撰　稿　尤国兴　史兆新　孙旭东
　　　　孙福明　周　健　徐德同

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号
封面设计：杨 蕙
责任编辑：王世斌 魏 斌

创新版

奥林匹克竞赛丛书

中国华罗庚学校数学课本

高一年级

总 策 划 何 舟
本册主编 周敏泽

★

吉林教育出版社 出版 发行
山东滨州教育印刷厂印刷 新华书店经销

★

开本：880×1230 毫米 1/32 印张：10.75 字数：338 千字
2002 年 6 月吉林第 1 版 2002 年 6 月山东第 1 次印刷
本次印数：15000 册

ISBN 7－5383－4338－5/G·3959
定价：13.80 元

总主编的话

第31、35届I. M. O. 选题委员会委员
南京大学数学系教授、享受国务院政府津贴　马传渔

由我国著名数学家华罗庚、苏步青两位教授于1956年负责举办的全国部分省、市高中数学竞赛，为我国数学竞赛拉开了序幕。历经近50年方方面面的努力，各层次的数学竞赛已在全国开展得红红火火、蓬蓬勃勃，它为开发广大学生的智力，为培养数学奥林匹克师资队伍，为国际数学奥林匹克(I. M. O.)选拔人才，为早期发现与培养现代杰出科技苗子产生了巨大的作用。

为缅怀华罗庚教授的光辉业绩，弘扬华罗庚教授的敬业精神，全国最早由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办了北京市华罗庚学校，经过近20年的发展，小学、初中、高中三个层次的华罗庚学校已遍布全国各地，各种版本华罗庚学校的教材已相映生辉，令人目不暇接。我们这套《中国华罗庚学校数学课本》丛书，愿为漫步在数学奥林匹克殿堂中的广大读者铺路。

本丛书体现了知识点的增加、知识面的扩大和知识框架的更新，强化了新世纪教学思想的介绍与渗透，突出了数学方法的总结和应用，具有可读性、启迪性和实用性。

1. 本丛书是一套**规范的系列奥林匹克培训**

教材,小学包含1~6年级6个分册,中学包含初一到高三年级6个分册,共计12本。本丛书不仅体现了小学、初中、高中三个层次内容上的衔接,而且强调了解题方法上的衔接。

2. 本丛书**源于教学**,系参照现行中小学《数学教学大纲》编写而成,既覆盖了相应教材中的各个知识点,与现行教材同步,又增添了不少解题方法的篇章。

3. 本丛书**高于教学**,紧扣各级数学竞赛大纲,每册读本既详尽地介绍各级数学竞赛的内容和题型,又由浅而深地引入竞赛中经常使用的各种数学思想和数学方法。本书"**本章小结**"栏目,对每章相关的知识点、解题方法、问题的规律、应用的范围、伸展与拓广、创新与灵感作了总结与提炼。

4. 本丛书以趣例引入,具有浓厚的**趣味性**;以生活实例作背景介绍数学内容,具有广泛的**应用性**;以探索性、操作性范例作展示,具有丰富的**启迪性**,能激发广大中小学生学习数学的兴趣。

5. 本丛书注意到**与各级数学竞赛接轨**,强调数学技能与解题能力的循序渐进的训练与培养,"**探究过程**"栏目中所提供的实例题意新颖、内容丰富,十分贴近各级数学竞赛试题,能帮助数学特长生在数学竞赛中获胜,为个别数学特长生冲刺奥林匹克金牌架设桥梁。

6. 本丛书由名牌大学**数学教授、命题专家、特级教师、学科带头人、奥林匹克教练员**编写而成,既可作为一本课外读物,也可作为数学辅导书及数学培训班、数学兴趣小组的试用教材与参考书,还可作为中小学教师培训奥林匹克的教本。

"千里之行,始于足下。"愿《中国华罗庚学校数学课本》陪伴广大数学爱好者在汗水中积累知识,在灵感中启迪智慧,在玩乐中迎接成功。

中国华罗庚学校数学课本

编　委　会

结识名师

周敏泽

中学特级教师，江苏省常州市高级中学数学教研组组长，中国数学奥林匹克高级教练员，南京师范大学教育专业数学方向硕士生导师，第七届江苏省数学会理事，江苏省有突出贡献的中青年专家，2001 年被人事部、教育部表彰为"全国模范教师"。

周敏泽老师在数竞赛辅导工作中取得了突出成绩：2000 年，他辅导的学生恽之玮入选国家队，作为中国队 1 号选手在第 41 届国际数学奥林匹克竞赛中获金牌。从 1995 年至今，他的学生庄伯金、恽之玮、张竞琎、冯维四人六次进入冬令营，参加中国数学奥林匹克竞赛，获金、银牌共 6 枚；其中庄金、恽之玮、张克琎、三人四次入选国家集训队。

目录

第一章　集　合

第二章　简易逻辑

第三章　函　数(一)

第四章　函　数(二)

高一数学

华罗庚学校

第一章　集　合

高一(1)班有 2 人参加了校篮球队，4 人参加了校足球队，那么这个班参加校篮球队校足球队的同学共有多少名？如果回答有 6 名同学参加，不一定对．因为可能有的同学既参加了篮球队，又参加了足球队．只有在每位同学只能参加一个球队的情况下，回答有 6 名同学参加才是正确的．

描述、解决上述问题，就涉及到我们将要学习的集合知识．

第一节　集合的概念及运算

集合是数学中一个最基本的概念．高中数学教材一开始就描述性地给出了这一概念；研究了集合的表示方法、常见数集及其记法；学习了子、交、并、全、补集的有关概念、符号及运算．本节在此基础上，着重探究以下目标．

探究目标

1．“所有较大的数”能组成一个集合吗？

2．集合语言的转化功能．

探究过程

1．“所有较大的数”能组成一个集合吗？

“所有较大的数”是否能组成一个集合，取决于它是否满足集合的定义．怎样的数“较大”？如果说 1 不算较大，那么 100 较大吗？1000，10000 呢？对于幼儿园的小朋友来说，能数到 100 就不错了，他们认为 100 很大了，但小学生可能认为 1000 比较大，而中学生知道了无穷大，究竟多大才算较大？他们困惑了．事实上，“较大”是模糊的，没有明确的标准的，因此，“所有较大的数”不能组成一个集合．如果把它改为“所有大于 5000 的数”就能形成一个集合，因为大于 5000 的数是明确的．所以对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．任何一个对象，或者是一个给定集合的元素，或者不是它的元素，两者必居其一，这是集合中元素必须具有的确定性．集合中的元素还具有互异性和无序性．互异性是指同一集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素．如方程 $x^2-2x+1=0$ 有两重根 $x_{1,2}=1$，但 1，1 归入解集时，只算一遍，即方程的解集

是单元素集{1}.无序性指的是集合只与元素本身有关,而与元素出现的位置顺序无关,如集合{1,2}与集合{2,1}是相同的集合.

2. **探究集合语言的转化功能.**

所谓集合语言,就是那些特定的名词、术语、符号、命题等的数学定义和叙述.集合语言包含三种:文字语言、符号语言、图形语言.集合概念和集合运算建立后,不可避免地出现集合语言的转化问题,这种转化大致分为两类:一类是三种集合语言的沟通与转换,即把一种语言表述的问题改用另一种语言来表述;一类是将集合语言向非集合语言转化,比如把集合语言译成相关的代数语言或几何语言等我们已经熟知的语言.集合语言转化的目的是将未知的、不熟悉的问题或情景通过转化,"翻译"成已知的、熟悉的、会解决的问题,从而抓住打开解题大门的钥匙.因此,学好本节知识的关键是用好集合语言.

课本中子、交、并、全、补集的定义都是用文字、符号和图形三种语言来表述的,它们相互联系,相互转化.特别是元素与集合、集合与集合之间文字语言与符号语言的相互转化,在解题中起着相当重要的作用.

元素与集合的关系有属于和不属于两种.如果 a 是集合 A 的元素,记作 $a\in A$;如果 a 不是 A 的元素,记作 $a\notin A$.给出集合 A 及一个对象 x,"$x\in A$"与"$x\notin A$"两者必居其一.

例1 已知 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$N=\{0,|x|,y\}$.若 $M=N$,试求 x,y 的值.

解:由 $\lg(xy)$有意义,知 $xy>0$,故 $x\neq0,y\neq0$.又由 $M=N$,知 $0\in M$,故 $\lg(xy)=0$,所以 $xy=1$.此时集合 $M=\{x,1,0\}$,$N=\{0,|x|,y\}$.

由 $1\in M$,知 $1\in N$,故 $|x|=1$ 或 $y=1$.若 $y=1$,则由 $xy=1$,得 $x=1$,此时集合 M 中三元素为 1,1,0,与集合中元素的互异性相矛盾,所以 $y\neq1$.若 $|x|=1$,则 $x=\pm1$.当 $x=1$ 时,$y=1$,这种情况应舍去(理由同上).当 $x=-1$ 时,由 $xy=1$ 得 $y=-1$,此时 $M=\{-1,1,0\}$,$N=\{0,1,-1\}$,$M=N$.

综上所述,$x=-1,y=-1$.

注:本题主要考查集合中元素的互异性和确定性,选好突破口 $0\in M$,并逐步深入是解题的关键.

例2 由实数构成的集合 A 满足条件:若 $a\in A,a\neq1$,则 $f(a)=\dfrac{1}{1-a}\in A$.求证:

(1)若 $2\in A$,则 A 中必还有另外两个元素;

(2)A 不可能是单元素集合;

(3)A 中至少有三个不同的元素.

证明:(1)由 $2\in A$,得 $f(2)=-1\in A$,则 $f(-1)=\dfrac{1}{2}\in A$.故若 $2\in A$,则 A 中必

然还有 $-1,\frac{1}{2}$ 两个元素.

(2)假设 A 是单元素集合.设 $A=\{a\}$，$a\neq 1$，则 $f(a)\in A$.故 $a=f(a)$，即 $a^2-a+1=0$，而此方程无实根.

故 a 不存在，即 A 不可能是单元素集合.

(3)设 $a\in A$，$a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，$f\left(\frac{1}{1-a}\right)=1-\frac{1}{a}\in A$.

由(2)中推理过程，知实数 a，$\frac{1}{1-a}$，$1-\frac{1}{a}$ 互不相等，

故 A 中至少有三个不同的元素.

注1：正确理解题中集合 A 满足的条件是解决本题的关键.

注2：例题中三个问题的解决体现了“从特殊到一般”、“从具体到抽象”的认识规律，层层推进，各个击破.

集合与集合之间有包含和相等的关系.在判断集合间关系时，要紧扣住子集的定义，根据元素与集合的相属关系进行讨论和说明.这体现了“从局部到整体”的数学思想.

例3 $\varnothing$ 表示空集，对于一个特殊集合 $T=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，下列命题：①$\varnothing\in T$；②$\varnothing\subsetneq T$；③$\{\varnothing\}\in T$；④$\{\varnothing\}\subsetneq T$.其中正确的个数为(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解：①因为 $\varnothing$ 是 T 的元素，所以 $\varnothing\in T$；

②因为空集 $\varnothing$ 是任何非空集合的真子集，所以 $\varnothing\subsetneq T$；

③$\{\varnothing\}$ 是 T 的元素，故 $\{\varnothing\}\in T$；

④因为 $\varnothing$ 是 T 的元素，所以 $\{\varnothing\}\subsetneq T$.

故选 D.

注1：空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

注2：注意“$\in$”与“$\subseteq$”的区别.“$\in$”表示元素与集合间的关系，“$\subseteq$”表示集合与集合间的关系.有时集合又可以作为另一个集合的元素，如本题中 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 作为 T 的两个元素，因此，元素与集合的关系都具有一定的相对性.

例4 集合 $A=\{x\mid x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 之间的关系是(　　).

A.$A\subsetneq B$　　B.$A\supsetneq B$　　C.$A=B$　　D.以上答案都不对

解：设 $M=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，$M$ 表示奇数集合，

而 N 中的元素都是奇数，故 $N\subseteq M$；

又任取 $x\in M, x=2n+1, n\in \mathbf{Z}$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，$x=2n+1=4k+1\in N$；当 $n=2k-1$ $(k\in\mathbf{Z})$时，有 $x=2n+1=4k-1\in N$，故 $M\subseteq N$.

$\therefore$ $M=N$，从而 $A=B$，故选 C.

注：判断两个集合是否相等，通常可用两种方法.

(1)把两集合中的元素一一列举出来，比较两集合中的元素是否完全相同；

(2)依据集合相等的定义：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$，确定两个集合是否相等.

例 5 (1991·全国)设 $S=\{(x,y)\mid x^2-y^2$ 为奇数，$x,y\in\mathbf{R}\}$，$T=\{(x,y)\mid \sin2\pi x^2-\sin2\pi y^2=\cos2\pi x^2-\cos2\pi y^2, x,y\in\mathbf{R}\}$，则(　　).

A. $S\subsetneqq T$　　B. $S\supsetneqq T$　　C. $S=T$　　D. $S\cap T=\varnothing$

解：任取$(x,y)\in S$，则 x^2-y^2 为奇数. 令 $x^2=y^2+2k+1, k\in\mathbf{Z}$，则 $\sin2\pi x^2-\sin2\pi y^2=\sin2\pi(y^2+2k+1)-\sin2\pi y^2=\sin2\pi y^2-\sin2\pi y^2=0$，$\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)=\cos2\pi(y^2+2k+1)-\cos2\pi y^2=\cos2\pi y^2-\cos2\pi y^2=0$，故$(x,y)\in T$.

$\therefore$ $S\subseteq T$.

又 $x=y$ 时，$(x,y)\in T$，而$(x,y)\notin S$，故 T 中至少有一元素不在 S 中，

$\therefore$ $S\subsetneqq T$，故选 A.

注：本题主要考查子集与真子集的概念. 要说明 A 是 B 的真子集，首先必须说明 A 是 B 的子集，其次必须说明存在 $b\in B$ 但 $b\notin A$. 具体操作时，在说明 $A\subseteq B$ 后，只需找到一个在 B 中但不在 A 中的元素即可，此时往往从特殊情形出发寻找，如本题的解法.

文字语言、符号语言与图形语言的沟通与转化，在集合中主要体现在运用数形结合这一基本的数学思想方法上. 数量关系如果借助于图形性质，可以使许多抽象概念直观而形象，有利于探求最佳的解题途径，这通常称为"以形助数"；而有些涉及图形的问题如能转化为数量关系的研究，又可以获得简捷和通用的解法，这就是"以数辅形". 通过"以形助数"或"以数辅形"，可以使复杂问题简单化，抽象问题具体化. 数形结合兼数的严谨和形的直观之长，是优化解题过程的重要途径之一.

利用等价转化和数形结合的思想，对集合中的一些问题运用韦恩图、数轴等直观图形，可以使问题变得简单.

例 6 (1998·全国)若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq(A\cap B)$成立的所有 a 的集合是(　　).

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　　　D. $\varnothing$

解：$\because\ (A\cap B)\subseteq A, A\subseteq(A\cap B)$，

$\therefore\ A\cap B=A, A\subseteq B$.

据题意作数轴（如图 1-1）.

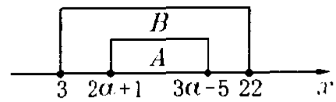


图 1-1

符合题意的 a 满足：

$$\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22.\end{cases}$$

解得　　$6\leqslant a\leqslant 9$.

故选 B.

注：本题借助数轴，找出 a 满足的不等式是解题的关键.在处理含有字母的子集问题时，我们常常借助数轴，数形结合，理清条件，使关系明朗，易于求解.

例 7　已知全集 $U=\{$不大于 20 的素数$\}$，A、B 是 U 的两个子集，且满足 $A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{7,19\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$，求出 A、B.

解法一：据题意 $U=\{$不大于 20 的素数$\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$.

又由 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，知

$$\complement_U(A\cup B)=\{2,17\}.$$

$\therefore\ A\cup B=\{3,5,7,11,13,19\}$.

$\because\ (\complement_U A)\cap B=\{7,19\}$，

$\therefore\ 7,19\in B$，且 $7,19\notin A$.

$\because\ A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，

$\therefore\ 3,5\in A$，且 $3,5\notin B$.

$\because\ A\cup B$ 中的 $11,13\in A\cap B$.

$\therefore\ A=\{3,5,11,13\}, B=\{7,11,13,19\}$.

解法二：如图 1-2 所示，知

$$A=\{3,5,11,13\}, B=\{7,11,13,19\}.$$

注 1：解法一是根据已知条件逐个分析每个元素的归属问题.分析中常常用到以下一些重要结论：

(1) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；　(2) $A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$；　(3) $A\cup(\complement_U A)=U$；

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；　(5) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$；

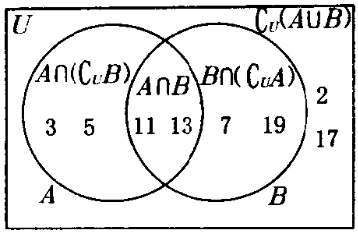


图 1-2

(6)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

注 2:解法二采用图示法,利用韦恩图可事半功倍.由图 1-2 知,一个全集 U 可以依据两个集合 A、B 进行分类,即全集可由以下四个互不相交的集合组成:$A\cap(\complement_U B)$、$B\cap(\complement_U A)$、$A\cap B$、$\complement_U(A\cup B)$,再根据已知条件将相应元素填入其相应位置,即可得本题之解.

例 8 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x=n, y=an+b, n\in\mathbf{Z}\}$、$B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$、$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是坐标平面内的点集,问是否存在实数 a,b,使得(1)$A\cap B\neq\varnothing$;(2)$(a,b)\in C$ 同时成立?

解法一:据题意,知

$$A=\{(x,y)\mid y=ax+b, x\in\mathbf{Z}\},$$
$$B=\{(x,y)\mid y=3x^2+15, x\in\mathbf{Z}\}.$$

假设存在实数 a,b,使得 $A\cap B\neq\varnothing$成立,则方程组

$$\begin{cases} y=ax+b, \\ y=3x^2+15 \end{cases}\text{有解,且 } x\in\mathbf{Z}.$$

消去 y,方程组化为 $$3x^2-ax+15-b=0. \qquad ①$$

$\because$ ①有解,

$\therefore$ $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0$.

$\therefore$ $$-a^2\leqslant 12b-180. \qquad ②$$

又由(2),得 $$a^2+b^2\leqslant 144. \qquad ③$$

②+③得 $$b^2\leqslant 12b-36.$$

$\therefore$ $$(b-6)^2\leqslant 0.$$

$\therefore$ $b=6$. 代入②得

$$a^2\geqslant 108.$$

代入③,得

$$a^2\leqslant 108.$$

$\therefore$ $$a^2=108, a=\pm 6\sqrt{3}.$$