运算微積分学和电路中的不稳定現象

〔苏联〕M. И. 康托罗維奇 著

胡嘉陽 1/7

上海科学技术出版社

运算微积分学
和
电路中的不稳定現象

〔苏联〕M. И. 康托罗維奇 著
胡汝鼎 謝克寬 譯

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本書以拉普拉斯变換为基础，講述运算微积分学，并討論了电路中的不穩定現象．为配合理論說明起見，書中附有很多的例題，解釋各种不同方法．本書首六章以平易的方式解釋各公式，使未諳複变函数論的讀者也能了解．后四章專为有較多準备知識的讀者应用．

本書可供电机工程师、无線电訊工程师以及高等学校电力、电訊專业系科作为学習或参考之用．

运算微积分学和电路中的不穩定現象

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

原 著 者 〔苏联〕 М. И. Конторович

原出版者 Гизтех или Гостехиздат · 1953年版

譯 者 胡 汝 鼎 謝 克 寬

*

上海科学技术出版社出版

（上海南京西路2004号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷五厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張7 22/32 字数185,000

（原中科、科技版共印4,300册 1955年6月第1版）

1959年3月新1版 1960年3月第2次印刷

印数1,001—2,500

統一书号：15119 · 326

定 价：（十四）1.30元

序

機械、電氣、和其它系統中的過渡過程，在最近一個時期中，開始引起了莫大的注意．凡是沒有研究電氣和機械系統中的過渡過程，就不可能完成種類繁多的電氣和機械系統的現代化準確性的計算；知道了這一點，就會明白這樣的注意是完全合理的．

運算微積分學是分析研究過渡過程的便利工具，因而向各專業的專家介紹這種工具是有它的必要．

必須指出：事實上俄羅斯和蘇聯的科學家，在創造運算微積分學中，曾經有過極大的供獻．遠在 1862 年的時候，就已經出現了 M. E. 法興科——石哈爾秦科著的單行本"符號計算法和它應用於線型微分方程的積分"．這一本單行本中，提出了符號計算法的詳細說明，並且指出了如何使用它來解常係數和變係數線型微分方程以及偏微分方程．

M. E. 法興科——石哈爾秦科的單行本，特別是收集了運算微積分學的重要公式，在現時代裏，這些公式是解各式各樣課題的基礎．

在斯大林五年計劃的年代裏，運算微積分學方法獲得了最大的發展．

蘇聯的科學，在黨和政府領導之下，解決了擺在它面前規模巨大的任務，在這時期中它獲得了有力的發展．其中可注意的是發展並改進了分析研究過渡過程的方法．

在斯大林五年計劃的年代裏，蘇聯的科學家和工程師，發展了

運算微積分學，創作了一系列的基本作品，充分地反映出一般理論上的問題以及直接聯系到實際的問題．

希望讀者注意：這本書是以幫助我國工程技術工作者實際掌握運算微積分學的方法為目的，並且基本上是供電氣工程師、研究生和電工學校學生之用．

特別是本書涉及了從事於無線電技術方面的人們所關切的問題．

本書隨時隨地舉出大量的例子以配合說明，而所選的這些例子是具有解釋各種不同的方法的特點的．

前六章的材料是以平易的方法來敘述，使得沒有掌握複變數函數論的人們也能接受．後四章是為了較有基礎的讀者之用．

本書採取這樣的體裁，其目的是使沒有學過複變數函數論的人們，能够通曉運算微積分學的基本概念並且學習它的實際應用．

整本書是以拉普拉斯變換為基礎，對運算方法作有系統的解釋．

這樣做的理由之一，就是因為在全部說明過程中，我們可以利用變換函數把乘數 p 與"像函數"分別開來，而在大部份為工程師電工工作者所寫的書中却都是遇到了"像函數"．因此，例如在我們的情况之下，壹的變換函數是等於 $\frac{1}{p}$，而不是等於壹．

如同在解說拉普拉斯變換理論的數學教程❶中所遇到的一樣，從變換函數消除了乘數 p，對我們看來覺得還有一個重要的理由．在無線電工程和其它電機工程方面，為了研究不穩定過程，很廣泛地推行採用福里哀積分．福里哀積分方法和運算方法之間是密切聯系着的，因此我們可以把它們看作是統一的方法．如果引用了

❶ 例如參照 B.И. 斯米爾諾夫院士著的高等數學教程，第四卷．

被我們所略去的乘數 p，就會使得拉普拉斯變換和福里哀變換之間有了外表上的區別，這樣就會認爲非常不適當的.

希望本書的讀者注意，這第二版本與 1949 年出版的第一版本有所不同，對於正文略有修改，並補充了第九章，提出所研究的近於保守系統的近似計算法.

在本書末，介紹了參考文獻目錄，不强求其完整，而只以推薦一些指導書籍爲目的，這裏，讀者可以找到些有關問題的完整說明，或是可以找到實際上有利於解決課題而應用運算方法的例子.

譯者序

本書係按照康德洛維奇(М. И. Конторович)同志所著的“運算微積分學和電路中的不穩定現象”(Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях), 1953年增補第二版翻譯的. 作者在本書中對於運算微積分學作了有系統的介紹. 在最初的六章中,並不應用複變函數來作說明,因此凡是已經修完了交流理論的都可以學習, 從而擴展了他們對電氣回路理論的視角. 自第七章至第十章須要複變函數論的基礎,爲此譯者又節譯了克魯格教授(Проф. К. А. Круг)著“線型電路中的過渡過程”(Переходные процессы в линейных электрических цепях)一書中的第 28~62 頁關於福里哀三角級數、福里哀積分、複變函數、複變函數的積分等方面的補充資料,以便讀者參考.

在整理譯稿時,譯者得到謝仿林、高綸、胡汝新、戴小芳同志的幫助很多,並此致謝. 曹鳳山教授對於譯稿作了詳細的校閱. 只是譯者的業務水平和俄文水平太低,可能許多地方理解不當,發生錯誤,請同志們提出批評,以便改正.

目 錄

第一章

拉普拉斯變换

所謂拉普拉斯變换，是作爲運算微積分學的基礎的． 由於這樣的情形，我們就要從這個變换開始來說明運算微積分學的原理．

1-1 變换函數的定義和變换函數的幾個性質

假設某一函數 $\varphi(t)$ 有自變數 t，並假設已知複數爲 $p=\sigma+i\tau$．

我們稱函數 $\overline{\varphi}(p)$（自變數 p 的函數）爲遵照拉普拉斯變换過的函數或是簡稱爲變换函數，這函數是以下列關係式作爲定義：

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt.\text{❶} \tag{1}$$

爲了求出這變换函數起見，只須要求：在値 p 的某一區域內，積分(1)是存在的，在這極限之外，這積分就沒有意義了．

因此，例如壹的變换函數 $[\varphi(t)=1]$ 是等於

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}.$$

這裏，當積分時，假定 p 的實數部份是正的 $(\sigma>0)$． 當 $\sigma\leqslant 0$ 時，積分失去意義，可是壹的變换函數到處都等於 $\dfrac{1}{p}$．

作爲第二個例子，試研究函數 $\varphi(t)=e^{\alpha t}$，其中 α 是實數． 當 $\sigma>\alpha$ 時，我們可以寫成：

---

❶ 通常也有採取從 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的極限的積分來作爲按照拉普拉斯變换過的函數的定義． 顯然，假如當 $t<0$ 時，變换函數恆等於零，則這二個定義成爲一致．

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha},$$

因此，

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{1}{p-\alpha};$$

當 $\sigma \leqslant \alpha$ 時，最後的一個積分失去意義，可是在 p❶的任何值時，我們認爲

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

在任何值 p 的時候，積分（1）不存在是會發生的． 在這情況之下，變換是不可能的． 可是，在物理課題中，我們常常遇到這樣的函數，它遵照拉普拉斯的變換是可能的． 這是容易證明的，就是，假如在間隔 $0 \leqslant t < \infty$ 中 $\varphi(t)$ 是有界的或是按 t 的增長而增長的，如 t^α 或者甚至於如 $e^{\alpha t}$，其中 α 是正數，則變換函數是存在的．❷

在我們將進一步研究的課題中，這條件常是滿足的，並且在整個情況之中，對我們來說關於這個變換函數存在問題是以正數的意義來解的．

變換函數的幾個性質． 現在我們來研究一下變換函數的幾個基本性質，這是爲了進一步說明時所必需的． 以後將要講到與這函數有關的而且在運算微積分學裏應用着的、最普通的定理．

---

❶ 實質上，這裏我們遇到了函數的分析持續． 關於這問題的說明，可以查閱複變數函數論的指導書，我們將不在這裏講述．

❷ 更正確而有系統的表述這變換函數的存在條件，可參閱 B. И. 斯密爾諾夫院士著的"高等數學教程"，卷四．

開始從微商來組成變換函數．假定

$$\psi(t) = \frac{d\varphi}{dt};$$

這時，按照定義可寫成：

$$\bar{\psi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{dt}e^{-pt}\,dt;$$

進行部份積分，則得等式

$$\bar{\psi}(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt + [e^{-pt}\varphi(t)]_0^\infty.$$

假定：為了使得 $t \to \infty$ 時[1]在方括弧中的積趨近於零起見，把 p 的實數部份選擇得足够的大，則可以寫成：

$$\bar{\psi}(p) = p\bar{\varphi}(p) - \varphi(0),\text{[2]} \tag{2}$$

其中 $\varphi(0)$ 是當 $t = 0$ 時函數 $\varphi(t)$ 的值．

在特殊情況之下，假如 $\varphi(0) = 0$，則對函數進行微分是相當於在它的變換函數上乘以 p．換言之，在這情況之下，對原函數進行微分是相當於以 p 乘變換函數．

所得的結果容易歸納為高階次的微商． 以繼續地使用公式(2)的辦法，求得如下：

即假如　　$$\psi(t) = \frac{d^n\varphi}{dt^n},$$

---

[1] 假如在全部間隔 $0 \leq t < \infty$ 中 $\varphi(t)$ 是有界的，則，顯然選擇 $\sigma > 0$ 就够了．假如 $\varphi(t)$ 是增長的，如 t^a，則在這情況之下，選擇 $\sigma > 0$ 就够了．假如 $\varphi(t)$ 的增長階次是取决於函數 e^{at}，則選擇 $\sigma > a$ 就够了． 在我們所研究的物理課題中，在任何時候增長階次並不十分高，因此，為了滿足所指出的條件起見，通常可以把 σ 選擇得足够的大．

[2] 假定 $\varphi(t)$ 是連續函數． 假如 $\varphi(t)$ 有了第一類的間斷點，則函數躍度補充於公式(2)中

則

$$\bar{\psi}(p) = p^n\bar{\varphi}(p) - p^{n-1}\varphi(0) - p^{n-2}\varphi'(0) - \cdots - \varphi^{n-1}(0),$$ ❶

其中 $\varphi'(0), \cdots, \varphi^{n-1}(0)$是値 $t = 0$ 時所取的相應附次的微商.

現在來研究一下等於 $\varphi(t)$ 的積分的函數,而這積分是以 0 和 t 爲極限的,就是假如

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t)dt;$$

由此,直接得出

$$\varphi(t) = \frac{d\psi}{dt}; \quad \psi(0) = 0.$$

應用了公式(2),可以寫成:

$$\bar{\varphi}(p) = p\bar{\psi}(p)$$

或

$$\bar{\psi}(p) = \frac{\bar{\varphi}(p)}{p}. \tag{3}$$

這樣,在 0 到 t 的極限內,對於原函數進行積分是相當於以 p 除變換函數.

1-2 按已知微分方程構成變換函數

運算微積分學是對某種線型微分方程進行積分的方法,它歸根到底,首先不是來找出滿足微分方程的未知函數,而是找出相當於未知函數的遵照拉普拉斯的變換函數.

這方法是直接應用於正常常係數微分方程,而也是應用於某型的線型偏微分方程.

構成滿足微分方程的變換函數的方法,以下列例子來說明爲

❶ 假定 $\varphi(t)$以及它到 $n-1$ 次的全部微商(包括 $n-1$ 在內)都是連續的.

最方便.

1-21 正常微分方程

假設已知方程為

$$y' + ay = f(t),$$

其中 a 是常數,同時要求找出方程的積分,並滿足如下條件

$$y|_{t=0} = y(0).$$

方程的兩邊各乘以 e^{-pt},並且在 0 和 ∞ 的極限內進行積分之後,可以寫成:

$$\int_0^\infty y' e^{-pt}\,dt + a\bar{y} = \bar{f}(p)$$

並應用公式(2)[1-1],則得:

$$-y(0) + \bar{y}(p)[p+a] = \bar{f}(p);$$

因而

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{f}(p) + y(0)}{p+a}, \text{ 其中 } \bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

同理,以 e^{-pt} 乘第二階次的常係數微分方程

$$y'' + ay' + by = f(t),$$

並在極限 0 和 ∞ 中進行積分,求得:

$$\int_0^\infty (y'' + ay' + by)e^{-pt}\,dt = \bar{f}(p).$$

注意

$$\int_0^\infty y'' e^{-pt}dt = p^2\bar{y}(p) - y'(0) - py(0),$$

$$\int_0^\infty y' e^{-pt}\,dt = p\bar{y}(p) - y(0),$$

其中 $y'(0) = y'(t)|_{t=0}$, $y(0) = y(t)|_{t=0}$,則得:

$$(p^2+ap+b)\bar{y}(p)-(a+p)y(0)-y'(0) = \bar{f}(p).$$

因此，

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{f}(p) + y'(0) + (p+a)y(0)}{p^2+ap+b}.$$

從這些例子，直接可以看出對於任何階次的方程構成為變換函數的方法.

在方程系的情況之下，可以應用同樣的方法. 例如，假設已知常係數方程：

$$y' + a_1 y + b_1 z' + c_1 z = f_1(t),$$

$$y' + a_2 y + b_2 z' + c_2 z = f_2(t).$$

以 e^{-pt} 乘每一個方程，並且在極限 0 和 ∞ 中進行積分，則得：

$$-y(0)+p\bar{y}+a_1\bar{y}-b_1 z(0)+b_1 p\bar{z}+c_1\bar{z} = \bar{f}_1(p),$$

$$-y(0)+p\bar{y}+a_2\bar{y}-b_2 z(0)+b_2 p\bar{z}+c_2\bar{z} = \bar{f}_2(p),$$

或者是

$$(p+a_1)\bar{y}+(b_1 p+c_1)\bar{z} = \bar{f}_1(p)+y(0)+b_1 z(0),$$

$$(p+a_2)\bar{y}+(b_2 p+c_2)\bar{z} = \bar{f}_2(p)+y(0)+b_2 z(0).$$

解這些共同有關於 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 的方程之後，求出變換函數的值.

在電工學課題中，會遇到包含未知函數的積分的積分-微分方程. 在這情況中，方法照舊，只要應用關係式 (3) [1-1] 所表示的規則.

例如，方程

$$y' + ay + b\int_0^t y\,dt = f(t)$$

使成為關係式

$$\bar{y}(p) = p\,\frac{\bar{f}(p) + y(0)}{p^2+ap+b}.$$

（上式原文爲 $y(p)$，已改爲 $\bar{y}(p)$——譯者）

必須特別注意到與“零”的初始條件有關的情況．這情况，例如，發生在所研究的電系統是加有外力的作用之下，同時，在初始時，自感線圈中的電流和電容器的電荷都等於零．

上述的過程是非常簡單的，因爲在課題的微分方程中，只是以變換函數來代替未知函數，微分運算是以 p 來乘，積分運算是以 p 來除，而在右邊的函數也是用與它相當的變換函數來代替，於是得到了代數方程系，以便解出相關的未知變換函數．[1]

1-22 偏微分方程

我們現在來研究一個有關於偏微分方程的例子．假設已知方程爲

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

其中 φ 是兩個自變數 x 和 t 的函數；a 是常數．

試求出這方程的積分，並且它滿足初始條件：

$$當\ t=0\ 時，\varphi(0)=0 \quad 和 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

同時也滿足某些限界條件．

以 e^{-pt} 乘方程(1)的兩邊，並且在極限 0 和 ∞ 中按照 t 進行積分．

注意 t 和 x 是自變數，我們可以寫成：

---

[1] 在當 $t=0$ 時全部未知函數變爲零的條件之下，所指出的規則是關於第一階次的方程系（不包含高於第一階次的未知函數的微商）．在當 $t=0$ 時這函數本身以及它到第 $n-1$ 階次的微商（包括第 $n-1$ 階次）變爲零的條件之下，在一個第 n 階次的方程的情況中，這同一規則還是有效的．類似型的課題以後將再研究．