上海交通大学

高等数学试题及题解汇编

（1977～1988）

上海交通大学出版社

上海交通大学

高等数学试题及题解汇编

（1977～1988）

上海交通大学应用数学系　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书收录了上海交通大学1977级到1987级高等数学期中、期末考试试题，1978年到1987年数学竞赛试题及1978年到1986年工科研究生入学考试的高等数学试题，书末附有该校1961级到1964级的部分高等数学试题。

上海交通大学历届的高等数学试题，内容丰富，形式多样，深浅得当。对所有这些题目，本书都给出了详尽的解答。解题方法简明扼要，步骤清楚，通俗易懂。有的解法颇新颖、巧妙，有的还列有多种解法，以供读者参考。

本书适用于广大高等工科院校的师生、成人高校的师生及自学高等数学课程的读者。它能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的高等数学内容起到复习、巩固和提高的作用。

高等数学试题及题解汇编

出　版：上海交通大学出版社

（淮海中路1984弄19

发　行：新华书店上海发行所

印　刷：上海交通大学印刷厂

开　本：787×1092（毫米）1/32

印　张：21

字　数：466000

版　次：1989年5月　第一版

印　次：1989年6月　第一次

印　数：1—6100

[illegible]：185—270 [illegible]

ISBN7—313—00349—8/O·13

定价：6.75元

前　　言

上海交通大学是我国一所重点大学。“起点高、基础厚，要求严”历来是我校的办学传统。二十多年来，我校对学生数学基础的要求在逐年提高。从交大历年的高等数学试题中可见一斑。

我校历届的试题，内容充实，形式多样，深浅得当。对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精炼的归纳和总结，其中既有一些体现高等数学课程要求的基本题，又有一些难度较大、技巧性较强的综合题。对所有这些题目，我们都逐一给出了详尽的解答。对大部分解答，特别是证明题，在原有的基础上，经过再三斟酌，进行了必要的修正与补充。解题方法力求简明扼要，步骤清楚，通俗易懂。为培养读者综合分析的能力，对部分试题还列有几种解法以供参考。有的证法之新颖，解法之巧妙，不无可取之处。

由于上述特点，本书具有比较广泛的适用性。广大工科院校师生、成人高校的师生及自学高等数学课程的读者，都可用来作为辅导参考材料。

编者希望，本书的出版能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的高等数学课程起到复习、巩固和提高的作用。

本书由朱有清、贺才兴、李重华编写。在编写过程中还得到我校应用数学系广大教师的关心和帮助，许多教师对命题工作

也曾付出了艰辛的劳动，一些教师也热心地提供了部分资料，在此一并致谢。

限于水平，加之时间仓促，不妥甚至错误之处恐还难免，敬请广大读者给予批评指正。

编者

1988年8月1日于上海交通大学

目　　录

第一篇　本科生试题及题解

一、1977 级

第一学期　期中考试

一、解方程组 $\begin{cases} 3x-y+z=0, \\ x+2y-z=0, \\ 2x-3y+2z=0。\end{cases}$

解法一　因为该方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

所以方程组有无穷多组解。

又因为 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$，所以方程组 $\begin{cases} 3x-y+z=0, \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ 与原方程组为同解方程组。

取 $z=k$，则上述方程组可改写为 $\begin{cases} 3x-y=-k, \\ x+2y=k, \end{cases}$

解之，得 $x=-\frac{k}{7}$，$y=\frac{4k}{7}$。

于是原方程组的解为 $\begin{cases} x=-\dfrac{k}{7}, \\ y=\dfrac{4k}{7}, \\ z=k, \end{cases}$

其中 k 为任意常数。

解法二 对原方程组的系数矩阵进行初等变换，为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是得齐次线性方程组 $\begin{cases} x+\dfrac{1}{7}z=0, \\ y-\dfrac{4}{7}z=0。 \end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=-\dfrac{1}{7}$，$y=\dfrac{4}{7}$。所以原方程组的基础解系为

$\boldsymbol{a}=\left\{-\dfrac{1}{7},\ \dfrac{4}{7},\ 1\right\}$，从而原方程组的通解为

$$\{x, y, z\}=k\boldsymbol{a}=\left\{-\frac{k}{7},\ \frac{4k}{7},\ k\right\} \quad (k\text{ 为任意常数})$$

即原方程组的解为 $\begin{cases} x=-\dfrac{k}{7}, \\ y=\dfrac{4}{7}k, \\ z=k, \end{cases}$

其中 k 为任意常数。

二、试在直线 $x+y-1=0$ 上求一点，使它与点$(-1,0)$和$(0,-2)$的距离相等。

解法一 设所求点为(x_0, y_0)，则由题意有

$$x_0+y_0=1, \tag{1}$$

$$(x_0+1)^2+y_0^2=x_0^2+(y_0+2)^2。\tag{2}$$

联立(1)、(2)式，即有

$$\begin{cases} x_0+y_0=1, \\ 2x_0-4y_0=3。\end{cases}$$

解之，得 $x_0=\dfrac{7}{6}$，$y_0=-\dfrac{1}{6}$，

即所求点为 $\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{1}{6}\right)$。

解法二 因为点$(-1,0)$与$(0,-2)$中的点为$\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$，且过这两点的直线斜率为$-2$，所以连接这两点的线段的中垂线方程为

$$y+1=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

即 $$2x-4y=3。$$

于是由方程组$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$，可解得已知直线与中垂线的交点

为$\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{6}\right)$。此交点即为所求之点。

三、试求与直线 $2x+y-5=0$ 平行，且与坐标轴所围成的三角形面积等于 1 的直线方程。

解法一 设所求直线方程为 $2x+y+c=0$，则它在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $-\frac{c}{2}$ 与 $-c$，所以所围成的三角形面积

为
$$S=\frac{1}{4}c^2。$$

于是由题设，有
$$S=1,$$

即
$$\frac{1}{4}c^2=1,$$

解之，得
$$c=\pm 2。$$

从而所求的直线方程为

$$2x+y+2=0 \text{ 或 } 2x+y-2=0。$$

解法二 设所求直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，则由题意，有

$$\frac{1}{2}ab=1,$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{2}=\frac{\frac{1}{b}}{1},$$

即
$$ab=2, \tag{1}$$
$$2a=b。 \tag{2}$$

联立(1)、(2)式，解得$\begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1, \\ b=-2。\end{cases}$

于是所求直线方程为

$$x+\frac{y}{2}=1 \quad 或 \quad \frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1,$$

即 $$2x+y-2=0 \text{ 或 } 2x+y+2=0。$$

四、1. 试求以双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的右焦点为圆心，且通过坐标原点的圆的方程；

2. 求这双曲线的渐近线与该圆的交点。

解1 因为双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的标准方程为

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1,$$

所以其右焦点为 $F_1(5,0)$。于是所求圆的方程为

$$(x-5)^2+(y-0)^2=5^2,$$

即 $$x^2-10x+y^2=0。$$

2. 因为该双曲线的渐近线方程为

$$4x-3y=0 \text{ 与 } 4x+3y=0,$$

所以由方程组

$$\begin{cases} x^2-10x+y^2=0, \\ 4x-3y=0 \end{cases} 与 \begin{cases} x^2-10x+y^2=0, \\ 4x+3y=0 \end{cases}$$

可分别解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x=\frac{18}{5} \\ y=\frac{24}{5} \end{cases} 和 \begin{cases} x=\frac{18}{5}, \\ y=-\frac{24}{5}。 \end{cases}$$

即所求交点为 $(0,0)$、$\left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$ 和 $\left(\frac{18}{5}, -\frac{24}{5}\right)$。

五、试化简方程 $x^2+2xy+y^2+2x-2y-2=0$，并作图。

解 因为 $\operatorname{ctg} 2\theta=0$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$。

令 $$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'), \end{cases}$$

则原方程化为

$$\frac{1}{2}(x'-y')^2+(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'+y')^2+\sqrt{2}(x'-y')-$$

$$-\sqrt{2}(x'+y')-2=0,$$

即 $$x'^2-\sqrt{2}y'-1=0,$$

亦即 $$y'+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}x'^2。\tag{1}$$

再令 $\begin{cases} x'=x'', \\ y'=y''-\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ 则(1)式变为

$$y''=\frac{1}{\sqrt{2}}x''^2。$$

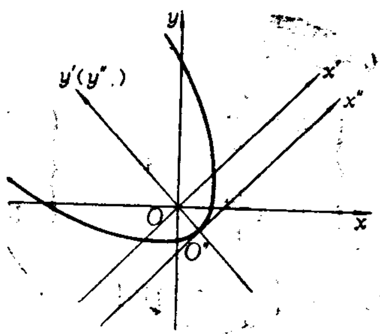

图 1

这是一条抛物线，其图形如图1所示。

六、试将方程$(x^2+y^2+x)^2-(x^2+y^2)=0$化为极坐标方程，并画出草图。

解 令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则原方程化为

$$(r^2+r\cos\theta)^2-r^2=0,$$

即
$$(r+\cos\theta)^2=1,$$

亦即
$$r+\cos\theta=1,\quad r+\cos\theta=-1 \quad (\text{舍去}),$$

于是所求的极坐标方程为

$$r=1-\cos\theta。$$

其图形如图2所示。

七、如图3所示，设有边长为a的正方形$ABCD$，它的顶

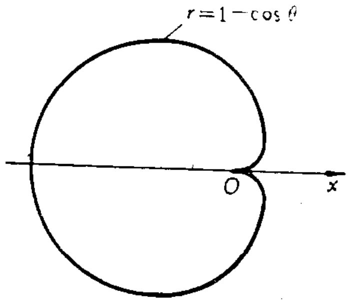

图 2

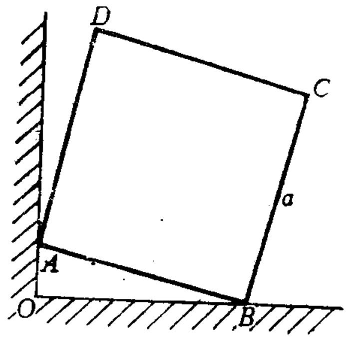

图 3

点A靠着墙移动，顶点B在地面上移动，试求顶点C的轨迹。

解 以墙为y轴，地面为x轴建立坐标系，设C的坐标系为(x,y)，$\angle ABO=\theta$，则由图3中几何关系，得

$$\begin{cases} x=a\cos\theta+a\sin\theta, & (1)\\ y=a\cos\theta。 & (2)\end{cases} \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)。$$

这是正方形顶点C的轨迹的参数方程。