

上海交通大学

高等数学试题及题解汇编

(1977~1988)

上海交通大学出版社

上海交通大学
高等数学试题及题解汇编

(1977~1988)

上海交通大学应用数学系 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书收录了上海交通大学1977级到1987级高等数学期中、期末考试试题,1978年到1987年数学竞赛试题及1978年到1986年工科研究生入学考试的高等数学试题,书末附有该校1961级到1964级的部分高等数学试题。

上海交通大学历届的高等数学试题,内容丰富,形式多样,深浅得当。对所有这些题目,本书都给出了详尽的解答,解题方法简明扼要,步骤清楚,通俗易懂。有的解法颇新颖、巧妙,有的还列有多种解法,以供读者参考。

本书适用于广大高等工科院校的师生、成人高校的师生及自学高等数学课程的读者。它能帮助读者用不太长的时间,花费不很多的精力,对所学过的高等数学内容起到复习、巩固和提高的作用。

高等数学试题及题解汇编

出 版: 上海交通大学出版社

(淮海中路1984弄19)

发 行: 新华书店上海发行所

印 刷: 上海交通大学印刷厂

开 本: 787×1092(毫米)1/32

印 张: 21

字 数: 466000

版 次: 1989年5月 第一版

印 次: 1989年6月 第一次

印 数: 1—6100

书 号: J85-279
ISBN7-313-00349-8/O·13

定价: 6.75元

前 言

上海交通大学是我国一所重点大学。“起点高、基础厚，要求严”历来是我校的办学传统。二十多年来，我校对学生数学基础的要求在逐年提高。从交大历年的高等数学试题中可见一斑。

我校历届的试题，内容充实，形式多样，深浅得当。对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精炼的归纳和总结，其中既有一些体现高等数学课程要求的基本题，又有一些难度较大、技巧性较强的综合题。对所有这些题目，我们都逐一给出了详尽的解答。对大部分解答，特别是证明题，在原有的基础上，经过再三斟酌，进行了必要的修正与补充。解题方法力求简明扼要，步骤清楚，通俗易懂。为培养读者综合分析的能力，对部分试题还列有几种解法以供参考。有的证法之新颖，解法之巧妙，不无可取之处。

由于上述特点，本书具有比较广泛的适用性。广大工科院校师生、成人高校的师生及自学高等数学课程的读者，都可用作为辅导参考材料。

编者希望，本书的出版能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的高等数学课程起到复习、巩固和提高的作用。

本书由朱有清、贺才兴、李重华编写。在编写过程中还得到我校应用数学系广大教师的关心和帮助，许多教师对命题工作

也曾付出了艰辛的劳动，一些教师也热心地提供了部分资料，在此一并致谢。

限于水平，加之时间仓促，不妥甚至错误之处恐还难免，敬请广大读者给予批评指正。

编者

1988年8月1日于上海交通大学

目 录

第一篇 本科生试题及题解

一、1977级	1
第一学期期中考试	1
第一学期期末考试	8
第二学期期中考试	23
第二学期期末考试	38
二、1978级	48
第一学期期中考试	48
第一学期期末考试	57
第二学期期中考试	65
第二学期期末考试	76
三、1979级	88
第一学期期中考试	88
第一学期期末考试	98
第二学期期中考试	108
第二学期期末考试	117
四、1980级	137
第一学期期中考试	137
第一学期期末考试	147
第二学期期中考试	158
第二学期期末考试	168
五、1981级	178

第一学期期中考试.....	178
第一学期期末考试.....	185
第二学期期中考试.....	196
第二学期期末考试.....	206
六、1982级	216
第一学期期中考试.....	216
第一学期期末考试.....	224
第二学期期中考试.....	233
第二学期期末考试.....	241
七、1983级	249
第一学期期中考试.....	249
第一学期期末考试.....	258
第二学期期中考试.....	268
第二学期期末考试.....	275
八、1984级	284
第一学期期中考试.....	284
第一学期期末考试.....	293
第二学期期中考试.....	299
第二学期期末考试.....	307
九、1985级	315
第一学期期中考试.....	315
第一学期期末考试.....	323
第二学期期中考试.....	331
第二学期期末考试.....	336
十、1986级	345
第一学期期中考试.....	345

第一学期期末考试	352
第二学期期中考试	360
第二学期期末考试	368
十一、1987 级	380
第一学期期中考试	380
第一学期期末考试	387
第二学期期中考试	394
第二学期期末考试	406
第二篇 数学竞赛试题及题解	417
一、1978 年	417
二、1982 年	424
三、1983 年	429
第一试	429
第二试	436
四、1984 年	446
五、1985 年	456
六、1986 年	463
第一试	463
第二试	470
七、1987 年	482
第三篇 研究生入学试题及题解	500
一、1978 年	500
二、1979 年	514
三、1980 年	522
试卷一	522
试卷二	534

四、1981年	545
五、1982年	561
六、1983年	573
七、1984年	590
八、1985年	602
试卷一.....	602
试卷二.....	613
试卷三.....	622
试卷四.....	627
九、1986年	634
试卷一.....	634
试卷二.....	642
附录 本科生1961级~1964级试题	
一、1961级	645
第一学期期中考试.....	645
第一学期期末考试.....	646
第二学期期中考试.....	648
第二学期期末考试.....	649
二、1962级	649
第一学期期中考试.....	649
第一学期期末考试.....	650
第二学期期中考试.....	652
第二学期期末考试.....	653
三、1963级	654
第一学期期中考试.....	654
第一学期期末考试.....	655

第二学期期末考试.....	656
四、1964 级	657
第二学期期末考试.....	657

第一篇 本科生试题及题解

一、1977 级

第一学期 期中考试

一、解方程组

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

解法一 因为该方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以方程组有无穷多组解。

又因为 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以方程组 $\begin{cases} 3x - y + z = 0, \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ 与原方程组为同解方程组。

取 $z = k$, 则上述方程组可改写为 $\begin{cases} 3x - y = -k, \\ x + 2y = k, \end{cases}$

解之, 得 $x = -\frac{k}{7}$, $y = \frac{4k}{7}$ 。

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x = -\frac{k}{7}, \\ y = \frac{4k}{7}, \\ z = k; \end{cases}$$

其中 k 为任意常数。

解法二 对原方程组的系数矩阵进行初等变换，为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是得齐次线性方程组

$$\begin{cases} x + \frac{1}{7}z = 0, \\ y - \frac{4}{7}z = 0. \end{cases}$$

令 $z=1$ ，则 $x = -\frac{1}{7}$ ， $y = \frac{4}{7}$ 。所以原方程组的基础解系为

$\alpha = \left\{ -\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 1 \right\}$ ，从而原方程组的通解为

$$\{x, y, z\} = k\alpha = \left\{ -\frac{k}{7}, \frac{4k}{7}, k \right\} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

即原方程组的解为

$$\begin{cases} x = -\frac{k}{7}, \\ y = \frac{4}{7}k, \\ z = k, \end{cases}$$

其中 k 为任意常数。

二、试在直线 $x + y - 1 = 0$ 上求一点，使它与点 $(-1, 0)$ 和 $(0, -2)$ 的距离相等。

解法一 设所求点为 (x_0, y_0) ，则由题意有

$$x_0 + y_0 = 1, \quad (1)$$

$$(x_0 + 1)^2 + y_0^2 = x_0^2 + (y_0 + 2)^2. \quad (2)$$

联立(1)、(2)式，即有

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 1, \\ 2x_0 - 4y_0 = 3. \end{cases}$$

解之，得 $x_0 = \frac{7}{6}$ ， $y_0 = -\frac{1}{6}$ ，

即所求点为 $(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$ 。

解法二 因为点 $(-1, 0)$ 与 $(0, -2)$ 中的点为 $(-\frac{1}{2}, -1)$ ，

且过这两点的直线斜率为 -2 ，所以连接这两点的线段的中垂线方程为

$$y + 1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

即

$$2x - 4y = 3.$$

于是由方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ ，可解得已知直线与中垂线的交点

为 $(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$ 。此交点即为所求之点。

三、试求与直线 $2x+y-5=0$ 平行,且与坐标轴所围成的三角形面积等于1的直线方程。

解法一 设所求直线方程为 $2x+y+c=0$, 则它在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $-\frac{c}{2}$ 与 $-c$, 所以所围成的三角形面积

为
$$S = \frac{1}{4}c^2.$$

于是由题设, 有
$$S = 1,$$

即
$$\frac{1}{4}c^2 = 1,$$

解之, 得
$$c = \pm 2.$$

从而所求的直线方程为

$$2x + y + 2 = 0 \text{ 或 } 2x + y - 2 = 0.$$

解法二 设所求直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 则由题意, 有

$$\frac{1}{2}ab = 1,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b},$$

即
$$ab = 2, \tag{1}$$

$$2a = b. \tag{2}$$

联立(1)、(2)式, 解得
$$\begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-1, \\ b=-2. \end{cases}$$

于是所求直线方程为

$$x + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{-2} = 1,$$

即 $2x + y - 2 = 0$ 或 $2x + y + 2 = 0$ 。

四、1. 试求以双曲线 $16x^2 - 9y^2 = 144$ 的右焦点为圆心，且通过坐标原点的圆的方程；

2. 求这双曲线的渐近线与该圆的交点。

解 1 因为双曲线 $16x^2 - 9y^2 = 144$ 的标准方程为

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1,$$

所以其右焦点为 $F_1(5, 0)$ 。于是所求圆的方程为

$$(x-5)^2 + (y-0)^2 = 5^2,$$

即 $x^2 - 10x + y^2 = 0$ 。

2. 因为该双曲线的渐近线方程为

$$4x - 3y = 0 \quad \text{与} \quad 4x + 3y = 0,$$

所以由方程组

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = 0, \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = 0, \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

可分别解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x = \frac{18}{5}, \\ y = -\frac{24}{5}. \end{cases}$$

即所求交点为 $(0, 0)$ 、 $(\frac{18}{5}, \frac{24}{5})$ 和 $(\frac{18}{5}, -\frac{24}{5})$ 。

五、试化简方程 $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ ，并作图。

解 因为 $\text{ctg } 2\theta = 0$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{令 } \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \end{cases}$$

则原方程化为

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + (x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + \sqrt{2}(x' - y') - \sqrt{2}(x' + y') - 2 = 0,$$

即

$$x'^2 - \sqrt{2}y' - 1 = 0,$$

亦即

$$y' + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x'^2. \quad (1)$$

再令

$$\begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{则(1)式变为}$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x''^2.$$

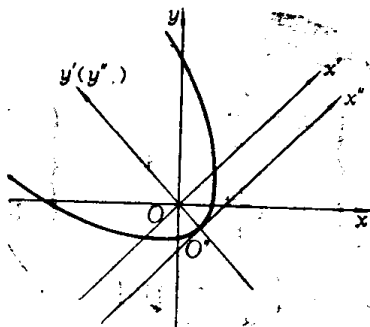


图 1

这是一条抛物线，其图形如图 1 所示。

六、试将方程 $(x^2 + y^2 + x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ 化为极坐标方程，并画出草图。

解 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则原方程化为

$$(r^2 + r \cos \theta)^2 - r^2 = 0,$$

即 $(r + \cos \theta)^2 = 1,$

亦即 $r + \cos \theta = 1, \quad r + \cos \theta = -1 \quad (\text{舍去}),$

于是所求的极坐标方程为

$$r = 1 - \cos \theta.$$

其图形如图 2 所示。

七、如图 3 所示，设有边长为 a 的正方形 $ABCD$, 它的顶

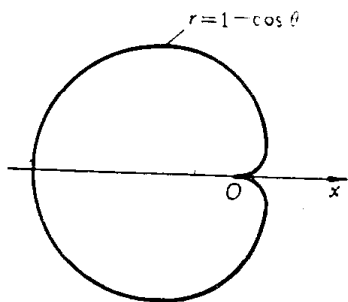


图 2

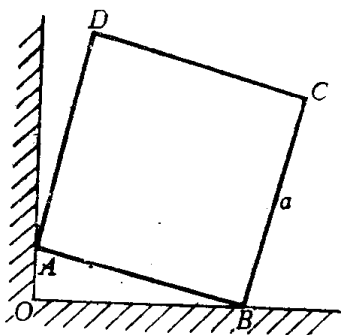


图 3

点 A 靠着墙移动，顶点 B 在地面上移动，试求顶点 C 的轨迹。

解 以墙为 y 轴，地面为 x 轴建立坐标系，设 C 的坐标为 (x, y) , $\angle ABO = \theta$, 则由图 3 中几何关系，得

$$\begin{cases} x = a \cos \theta + a \sin \theta, & (1) \\ y = a \cos \theta. & (2) \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

这是正方形顶点 C 的轨迹的参数方程。