工学硕士入学考试数学复习指南

（第二版）

主　编　季文铎
副主编　胡金德　许履瑚
编　者　季文铎　胡金德　许履瑚
　　　　富景隆　蔡燧林　李恒沛　王式安

北京理工大学出版社

工学硕士入学考试

数学复习指南

（第二版）

主　编　季文铎

副主编　胡金德　许履瑚

编　者　季文铎　胡金德　许履瑚　富景隆

　　　　蔡燧林　李恒沛　王式安

安徽建筑大学
藏書
图书馆

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是由全国七所重点高等工业院校的几位具有丰富教学经验、且对研究生入学考试中的数学试题有深入研究的教师专门为报考工学硕士研究生的考生编写的。现在出版的第二版，是在保留第一版特色的基础上，根据国家教委1996年颁布的研究生考试大纲作了相应的修改。全书各章除阐述重点内容和要求外，还对集中精选的几百道典型例题，进行分析、讨论，以帮助考生扩大思路，提高分析问题与解决问题的能力。第二版在每一章的后面增加了练习题，供考生检验复习效果。书后附练习题的答案或提示。本书诚为报考工学硕士研究生复习数学的一本好指南。

图书在版编目（CIP）数据

工学硕士入学考试数学复习指南/季文铎主编. —2版. 北京：北京理工大学出版社，1997.6

ISBN 7-81045-272-X

Ⅰ. 工… Ⅱ. 季… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第05353号

北京理工大学出版社出版发行
（北京市海淀区白石桥路7号）
邮政编码 100081　电话（010）68422683
各地新华书店经售
北京房山先锋印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　20.5印张　504千字
1997年6月第二版　1997年6月第二次印刷
印数：8001—14000册　　定价：24.00元

※图书印装有误，可随时与我社退换※

前　言

硕士研究生入学考试是目前我国由国家教委统一组织的最高层次的考试，它既关系到为国家选拔和培养高层次人才的质量，也关系到每一个考生个人的前途与发展. 对每一个欲报考硕士研究生的同学来说最关心的问题便是怎样复习、备考，方能与考试要求相吻合，而取得满意的考试成绩，要解决这个问题，首先必须深刻理解考试大纲中所规定的内容，哪些是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度与广度上要求到什么程度，以及在试题中经常出现的题型有哪些. 只有对上述问题做到心中有数以后，才能复习好并在考试中取得好成绩.

为了回答考生所关心的上述问题，并帮助考生深入理解考试大纲所规定的考试内容，我们组织了北方交通大学、清华大学、北京工业大学、哈尔滨工业大学、浙江大学、北京航空航天大学、北京理工大学等七所重点工业院校中具有丰富教学经验，且对研究生入学考试中的数学试题有深入研究的七位数学教授，经过反复讨论并认真精选所收集到的资料，共同努力，编写了这本《工学硕士入学考试数学复习指南》，献给有志于报考工学硕士研究生的学子.

为了达到上述目的，我们采取的办法是：

第一，为帮助考生深刻理解考试大纲中的要求，不仅本书的章节顺序的安排与考试大纲完全一致，而且在每一章或每一节的开头都指明本部分的重点内容与非重点内容. 重点内容当然是指最基本的概念、理论、方法与公式，这也是考题中经常出现的内容，而且一些基本题型也多出于此，因而是每一个考生都应该深刻理解、彻底掌握，并能融会贯通的内容. 对非重点内容，并不是说它们是无足轻重或可有可无的，只是相对来说他们的重要性差一些，在试题中出现的频率相对地小一些. 因此，对非重点内容中所涉及的一些概念、公式或方法，也都是每个考生应该知道和了解的.

第二，为了更具体地说明各部分要求的深度、广度以及考生所应具备的知识与能力，并让考生了解各部分的常见题型，我们在每一节中都精选了一部分例题，其中也包括了一些近年来（1987 年～1995 年）的试题. 对每个例题都先给出恰当的分析，指出解决问题的思路，然后再逐步推导、论证，达到问题的彻底解决，借以帮助考生扩大思路、开阔眼界，提高分析问题和解决问题的能力. 若在例题序号与题目正文之间，插有括号及五位数码，如(92106)，则表示此题是 1992 年试卷一中的 6 分题；(871′12) 则表示此题是 1987 年试卷一（副题）中的 12 分题. 从这类例题中既可以看出此类题型在历年中出现的频率，也可以看出这类题在试卷中所占的比重（分值).

第三，为了帮助考生总结和归纳所学到的知识，在每一节的开头不仅提出在试题中与本节有关的常见题型，而且在每一节的末尾还加以小结，指出解决这些常见题型的关键，或思路的实质，以促进考生从根本上掌握解题的基本方法.

第四，为了方便考生复习，在工程数学部分的每一章都写了内容提要.

本书在编写过程中始终得到了北京航空航天大学李心灿教授的支持与鼓励，他在百忙之中为本书写了序言. 华中理工大学于寅教授对全部书稿作了仔细的审阅，并提出了许多有益

0AA63/26

的修改意见，胡乃冏副编审也对高等数学部分作了校审，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平所限，书中难免有疏漏、错误或不妥之处，欢迎同行们批评指正.

编　者

1995 年元月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第二版前言

1996 年国家教委颁布了新修订的全国硕士研究生数学考试大纲。为了适应这一变化，我们对本书第一版作了重大修订。修订的主要内容有：

一、增写了数理统计，改写了概率论部分，进一步充实了这一部分的内容。

二、全面改写了线性代数部分，增加了一些典型例题，删去了复变函数一章。

三、每一章后面都新增了精选的练习题。练习题基本覆盖了每章的内容，以帮助读者检查对内容的掌握程度。

四、将 1997 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题试卷一、试卷二及参考答案作为附录放在书后。

本书第一版发行后，受到了广大读者的欢迎。不少专家和读者对本书提出了宝贵的意见和建议。我们在进行修订时均给予了充分的考虑和吸收，在此，我们对他们表示衷心的感谢！并欢迎同行专家和广大读者继续给予批评指正。

华中理工大学数学系于寅教授一如既往地关心本书的修订工作，并认真审阅了修改稿。我们向他表示诚挚的谢意。

序

现在有越来越多的青年报考研究生，并希望能够得到有关研究生入学考试方面的自学辅导教材. 这本《工学硕士入学考试数学复习指南》，是根据国家教委制定的硕士研究生入学数学考试大纲所规定的考试内容和要求，为了帮助考生全面地进行数学复习而编写的.

本书分别对《高等数学》、《线性代数》、《概率论》、《复变函数》中的一些基本概念、方法、理论进行了简要的归纳，总结，然后通过精选各种类型不同层次的例题和历年工学硕士研究生入学数学试卷中较为典型的试题进行讲解、分析、讨论，使读者理解解题的思路和方法，从而提高解题的能力. 著名数学家、教育家乔治·波利亚（G Polya）指出："解题可以认为是人的最富有特征性的活动. ……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样；你只能够靠模仿和实践才能学到它. ……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其它的问题时，能起到指导的作用. 一种解题方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那么它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型."我很赞赏乔治·波利亚的这些见解，并希望考生能够根据他的这些见解来阅读本书中的例题.

本书的编者，都是在我国一些著名大学中长期从事数学教学的教授，他们不但具有丰富的教学经验，而且熟悉工学硕士研究生入学数学考试的要求，因此本书不仅是一本难得的工学硕士研究生入学考试数学复习指南，还是一本颇具特色的数学教学参考书.

李心灿

1995年5月　于北京

目　录

高等数学

工 程 数 学

高　等　数　学

第一章　函数、极限、连续

函数、极限、连续等基本概念及其运算，是学习高等数学的基础，也是从初等数学过渡到高等数学的桥梁．这一部分在历年考试的试题中从表面上看所占的比例并不太大，但有关它的内容却几乎渗透在每一道试题之中，因此是不容忽视的。

本章的重点内容及要求有：

一、理解函数的概念（包括反函数、复合函数、隐函数、参数方程给定的函数、基本初等函数与初等函数），掌握函数的表示方法，能判断函数是否具有单调性、周期性、有界性、奇偶性；

二、会建立简单应用问题中的函数关系式；

三、理解无穷小量与无穷大量的概念，以及无穷小的比较，无穷小的阶，无穷小与极限的关系；

四、掌握数列极限的“$\varepsilon-N$”定义与函数极限的“$\varepsilon-\delta$”定义，理解函数的左极限与右极限的概念、函数极限存在的充要条件、极限存在准则与两个重要极限，掌握极限运算法则并用以求极限；

五、理解连续与间断的概念，会判别函数间断点的类型，了解闭区间上连续函数的性质．

本章将按上述五个方面来展开讨论。

§1.1　函数

本节的重点是函数概念以及函数记号的运算，特别是复合函数概念以及函数的表示法中的分段函数，这些都是读者应该能熟练运用的内容．有关建立函数的问题，即建立数学模型，虽然也应该是本节的内容，但我们将其放在第二、三章（微分学、积分学）中．更深入的概念，如变上限积分所定义的函数，用无穷级数所定义的函数等等，都将在今后逐渐加以讨论．

例 1(88105)　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$．求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域．

分析　由 $f(x)=e^{x^2}$，有 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$．按题意有

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x.$$

由此即可解得 $\varphi(x)$，然后再求其定义域．

解　由题意有 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，从而有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

它的定义域是 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $1-x\geqslant 1$，亦即 $x\leqslant 0$.

例 2 若已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式.

分析 所给条件是 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 某一线性组合的关系式，这启示我们，经变换 $u=1-x$ 后，$f(x)$ 与 $f(1-x)$ 分别变为 $f(1-u)$ 与 $f(u)$，从而得到 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 的另一线性组合的关系式，于是可解得 $f(x)$.

解 令 $1-x=u$，从而得

$$2f(1-u)+f(u)=(1-u)^2$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$$

与原式解得 $3f(x)=2x^2-(1-x)^2$，即

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

例 3 讨论 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性，其中 $a>0, a\neq 1$.

分析 检验函数 $f(x)$ 的奇偶性只能用奇函数与偶函数的定义来判断，看其是否满足 $f(x)=-f(-x)$ 或 $f(x)=f(-x)$，两者都需要我们从 $f(-x)$ 着手.

解
$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\log_a\left[(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]\\&=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

由此即知 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

例 4 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数，并求其定义域.

分析 求反函数一般都要由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$. 这里欲解出 x. 显然需先将 y 的表达式两端三次方，再设法解之.

解
$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\\&\quad+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}+x-\sqrt{1+x^2}\\&=2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}]\\&=2x+3(-1)^{\frac{1}{3}}y=2x-3y,\end{aligned}$$

解得

$$x=\frac{1}{2}(y^3+3y),$$

即所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x^3+3x)，其定义域为 x\in(-\infty,+\infty).$$

例 5(90103，90203)填空题. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1,\end{cases}$

则函数 $f[f(x)]=$____________.

分析　由于 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$ 而由已知条件知，无论 x 取何值总有 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1, x\in(-\infty,+\infty)$.

解　应填 1.

例 6　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析　按复合函数的概念，欲求 $f[g(x)]$，只需将 $f(x)$ 的表达式中的 x 换成 $g(x)$，然后再依次整理化简即可.

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & e^x<1,\\ 0, & e^x=1,\\ -1, & e^x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

相仿可得

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 7(92303)选择题.　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A)　$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0;\end{cases}$

(B)　$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(C)　$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0;\end{cases}$

(D)　$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

分析　由 $f(x)$ 的表达式知，欲建立 $f(-x)$ 的表达式，只需分两种情况来探讨：一是 $-x\leqslant 0$，二是 $-x>0$，于是有

当 $-x\leqslant 0$ 时，$f(-x)=(-x)^2=x^2$；

当 $-x>0$ 时，$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$.

从而

$$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

解 应选择(D).

例 8 设$f(x)$是单调增函数,对任意x,函数$g(x)$,满足不等式$f(x)\leqslant g(x)$,证明:

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)].$$

分析 由已知条件并通过比较$f[f(x)]$、$f[g(x)]$及$g[g(x)]$之间的大小即可证明此题.

证 对任意x,由已知条件所给的不等式$f(x)\leqslant g(x)$及f是单调增函数,故有

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)];$$

而对于值$g(x)$,再由已知条件的不等式,

$$f[g(x)]\leqslant g[g(x)].$$

于是证得$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

小结 与本节有关的习题的题型很多,可能涉及函数的各种表达式或性质.但由于它们都属于最基本的内容,所以在解题时,大多数情况下只要从基本定义出发,经过适当的演算,即可得出所需的结论.

§1.2 无穷小量与无穷大量

无穷小量是高等数学中最基本概念之一,在试题中出现的频率也比较大,读者应该较为透彻地理解有关无穷小量、无穷小的比较、无穷小的阶等基本概念,知道无穷小与无穷大的诸性质及其与极限的关系,要熟记几对常用的等价无穷小.例如当$x\to 0$时,

$$x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}x;\qquad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;$$

$$\ln(1+x)\sim x;\qquad e^x-1\sim x;\qquad (1+x)^{\frac{1}{n}}\sim 1+\frac{x}{n},$$

并能运用以上诸关系来解相应的习题.

例 1(93303)选择题. 当$x\to 0$时,变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是

(A)无穷小; (B)无穷大;

(C)有界的,但不是无穷小; (D)无界的,但不是无穷大.

分析 变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是$\frac{1}{x^2}$与$\sin\frac{1}{x}$的乘积,当$x\to 0$时,$\frac{1}{x^2}$显然是无穷大量,而$\sin\frac{1}{x}$在$x\to 0$的过程中虽然是有界变量,但其值有时可以为零(如在$x=\frac{1}{2k\pi}$,$k=1,2\cdots$的一系列点处),有时也可以为1(如在$x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{1}{2}\pi}$,$k=0,1,2,\cdots$),于是$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$的值在这些相应点处也随之为零或为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2$.再注意到这两串点在趋向于零的过程中是互相交替出现的,因而,其所取的值0与$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2$也是互相交替出现的,这即说明变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$既不是无穷小量,也不是无穷

大量，更不是有界变量，这样就排除了前三个选项．且同时也说明(D)是正确的．

解 应选(D)．

例 2 填空题 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$的定义域为____________．

分析 函数$f(x)$是由取极限定义的，所以求其定义域即是求使极限存在的x．

(1)当$x\leqslant -1$且n为正奇数时，$e^x+x^n<0$，故$f(x)$无定义；

(2)当$-1<x\leqslant 1$时，对任何正整数n，$\ln(e^x+x^n)$有界，所以$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}=0$即$f(x)$有定义；

(3)当$x>1$时，$\ln(e^x+x^n)>n\ln x$，所以$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$也不存在．

解 应填$(-1,1]$或$-1<x\leqslant 1$．

例 3 讨论当$x\to 1$时，无穷小量$1-x$与$1-\sqrt[3]{x}$哪个阶数较高．

分析 按无穷小比较的概念，只需看极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$．

解 由$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\xlongequal[1-\sqrt[3]{x}=y]{\text{令}}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-(1-y)^3}{y}=\lim\limits_{y\to 0}(3-3y+y^2)=3$，即知$1-x$与$1-\sqrt[3]{x}$是同阶无穷小．

说明：若用洛必达法则求极限值，则更为简捷，事实上

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=3.$$

例 4(91103、91203)填空题．已知$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则常数$a=$____________．

分析 本题应从两个无穷小量是等价的定义出发，即由

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$$

推算a之值．由$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{a}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a,$$

可见

$$-\frac{2}{3}a=1,\text{即 }a=-\frac{3}{2}.$$

解 应填$a=-\dfrac{3}{2}$．

例 5 当$x\to 0$时，求无穷小量$f(x)=\mathrm{tg}x-\sin x$的阶及其主部．

分析 欲求当$x\to 0$时$f(x)=\mathrm{tg}x-\sin x$的阶，可以从分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^k}$$

入手. 化上式为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k\cos x}$$

再用等价无穷小代替：

$$\sin x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$$

便可看出，只要取 $k=3$，则上述极限值就等于$\frac{1}{2}$，即 $\mathrm{tg}x-\sin x$ 与 x^3 是同阶无穷小，其主部是 $\frac{1}{2}x^3$.

解法一 取 $g(x)=x^3$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

从而 $f(x)$ 是关于 x 的三阶无穷小，其主部是$\frac{1}{2}x^3$.

解法二 将 $\mathrm{tg}x-\sin x$ 在 $x=0$ 处展成泰勒公式. 因为 $\mathrm{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+0(x^3)$，$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+0(x^3)$，故 $\mathrm{tg}x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+0(x^3)$. 因而当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{tg}x-\sin x$ 是关于 x 的 3 阶无穷小.

例 6(88103，88203)选择题. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A)与 Δx 等价的无穷小； (B)与 Δx 同阶不等价的无穷小；

(C)比 Δx 低阶的无穷小； (D)比 Δx 高阶的无穷小.

分析 根据函数微分的定义

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$$

即知 $\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小.

解 应选择(B).

例 7(93103，93203)选择题. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A)等价无穷小； (B)同阶但非等价无穷小；

(C)高阶无穷小； (D)低阶无穷小.

分析 只要看下述极限并注意到：当 $x\to 0$ 时 $\sin(\sin^2x)\sim\sin^2x\sim x^2$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin(\sin^2x)}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2x)}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

即知二者是同阶但非等价的无穷小.

解 应选择(B).

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

分析　当 $x\to0+$时,所给极限是"$\dfrac{0}{0}$"型的未定式,可以用洛必达法则求之,但计算较麻烦.注意到 $e^{x^3}-1\sim x^3$,并由 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$得

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x(1-\cos x)})^2\sim\frac{1}{4}x^3,$$

这时应用等价无穷小来求原式的极限将简便得多.

解法一　由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0+}\frac{3x^2e^{x^3}}{\sin\sqrt{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x(1-\cos x)}}{1-\cos x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0+}6e^{x^3}\frac{\sqrt{x(1-\cos x)}}{\sin\sqrt{x(1-\cos x)}}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}=6\cdot1\cdot\lim_{x\to0+}\frac{2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}$$

$$=6\cdot\lim_{x\to0+}\frac{2x}{2\sin x+x\cos x}=6\cdot\frac{2}{3}=4.$$

解法二　用等价无穷小代替,便有

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3}{\frac{1}{4}x^3}=4.$$

可见解法二比解法一简便得多.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{e^x-1}$

分析　原式也是"$\dfrac{0}{0}$"型的未定式,按例 8 的分析也有两种做法.

解法一　用格必达法则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sec^2x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}+\frac{1}{2}\frac{\sec^2x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}}{e^x}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1}=1.$$

解法二　利用 $\mathrm{tg}x\sim x$,$e^x-1\sim x$,并先化 $\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}$ 为 $\dfrac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}$,则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\mathrm{tg}x}{e^x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=\frac{1}{2}\cdot2=1.$$

相比之下,本例解法一比解法二较为简便,其原因在于分子与分母的求导较为简单.

小结　本节所涉及的问题可归纳为两种类型:第一类是有关无穷小(大)量或有界变量的判定;第二类是有关无穷小(大)量的比较及其阶数的判定(包含求主部).这两类问题大部分都是从有关概念的基本定义出发,或利用无穷小(大)量的性质,或利用泰勒展开,就可以解决.应注意的是在计算极限的过程中只能用等价无穷小代替求极限式子中的某一因子,而绝不可用等价无穷小代替式子中的某一项.例如

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com