经 济 管 理 数 学

东北财经大学
基础部数学教研室 编

东北财经大学出版社出版（大连黑石礁）
东北财经大学出版社发行科发行
海军大连舰艇学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：22 3/4　字数：552,000
1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

责任编辑：周明辉　曹桂英　封面设计：吴伟

印数：1—8,000
统一书号：13428·12　定价：5.35元

前　言

在科学迅猛发展的今天，数学在经济科学中的应用更加广泛和深入，为适应成人教育事业不断发展的需要，我们在我校原编函大和专修科数学教材的基础上，根据财经类各专业的函大与专修科的教学计划所规定的数学课程的教学要求，进行了修改和补充，本书作为今后财经类各专业函大与专修科的教学用书。

全书以系统的数学基础理论和基本方法为主，适当地引入了应用数学的内容。根据函大、专修科的特点，在文字叙述上力求通俗易懂，便于接受；有些定理只引取结论而不加证明。每章前有内容简介，每章末有小结。本书内容涉及面较广，可满足120—200学时的教学需要，带※号的内容可根据教学时数决定取舍。本书还可作为财经干部培训教材及财经类大专高等数学的自学参考书。

全书由许开甲付教授审阅，刘文龙主编，第一章到第七章微积分部分由刘文龙编写，第八章到第十四章线性代数与线性规划部分由周士风编写，第十五章到第十七章概率论部分由薛素贞编写。在编写过程中吸收了我校本科教材和现今流通书刊中许多新资料，还得到有关同志大力支持，在此一并致谢。

由于作者水平有限，加之时间仓促，错漏之处一定不少，敬请读者批评指正。

东北财经大学基础部数学教研室

一九八六年七月

目　　录

第一章 函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。在各门类科学中，数学占有极为重要的地位。马克思认为"一种科学只有成功地运用了数学以后才算达到了完善的地步。"

函数和极限，是变量数学中两个极为重要的基本概念。

函数是微积分的主要研究对象。本章着重讨论函数、反函数和初等函数的概念。

极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法和重要工具。我们将主要讨论极限的概念、性质、运算法则及极限存在的准则，其次讨论函数连续性的概念。

§1 函 数

1.1 常 量 与 变 量

我们在观察某种自然现象或社会现象过程中，会遇到很多量，如长度、面积、时间、速度、价格、成本等等，这些量一般可以分成两种：一种是在某种现象或过程中保持不变的量，即在事物的运动或变化过程中，保持一定数值的量，称为常量；另一种是在某种现象或过程的进行中不断变化的量，即在事物的运动或变化过程中可以取不同数值的量，称为变量。

如在经济学中，某种商品销售额是R，销售量为x，单价为p，则

$$R = Px$$

随着销售量x的变化，销售额R也变化，故x和R是变量，而价格P在某个过程中可以看作是不变的量，即为常量。

值得注意的是，常量与变量不是一成不变的。如在上例中，P是常量，随着生产的发展和供求关系的变化，价格P也要作相应的调整。

在高等数学里，为了研究问题方便起见，有时把常量看成是取同一个数值的变量。

常量一般用字母a、b、c等来表示，而变量用字母x，y，z等来表示。

1.2 函 数 概 念

1．函数定义

高等数学是研究变量的数学，在同一个自然现象或社会问题中，常常有几个变量同时存在，这些变量之间往往不是独立的，而是存在着确定的依赖关系。

例1 最简单的生产总费用c表为

$$c = ax + b$$

其中c为生产总费用，x为产品数量，a为单位产品的可变成本，包括生产该产品的原料消耗，工资开支等；b为固定生产费用，包括厂房和设备折旧、调整和安装机器设备及掌握新技术的费用等。

该式表明生产产品数量x变化时，生产总费用c也随着变化，当x取定某一个数值x_0时，c就有一个确定的值c_0与之对应。

例 2 某气象台用自动记录器测出一昼夜气温的变化情况，如图1.1。

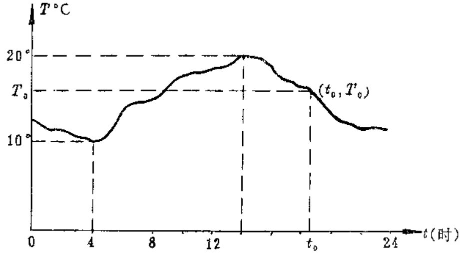

图 1.1

横坐标表示时间t，纵坐标表示温度T，曲线上任一点$P(t_0, T_0)$表示时间$t=t_0$时，测得的气温$T=T_0$，所以图形表示了在24小时内时间与气温这两个变量之间的依赖关系，它反应了气温随时间变化的规律。

例 3 我们常用的平方根表、对数表，以常用对数表为例

表 1.1

真　数(x)	10	11	12	13	14	15	16
对　数(y)	1.0000	1.0414	1.0792	1.1139	1.1461	1.1761	1.2041

上表反映了对数y随真数x变化的对应关系，对于一个确定的真数x_0就有一个确定的对数值y_0与之对应。

以上几个例子反映变量之间是相互联系并遵循一定的规律变化着。这种变化规律就由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来，我们把这种变量之间确定的对应关系叫做**函数关系**。

定义：在某个变化过程中有两个变量x和y，如果对于x在变化范围内的每一个值，按照一定的规律，y总有一个确定的值和它对应，那么就说y是x的**函数**，并且记作

$$y=f(x)$$

其中x叫做**自变量**，y叫做**因变量**。

记号$y=f(x)$中，f只表示y与x的对应关系,不能看作f乘x。

表示函数常用的记号有：$y=f(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=g(x)$等。

如果我们仔细分析一下，可以看到，上述函数概念涉及函数三个基本要素，即①自变量x的取值范围，我们称之为**定义域**；②函数值的范围，我们称之为**值域**；③变量x与变量y之间的对应规律f。

应该特别着重指出的是，上述定义中虽然包括了“变量随变量变化”的内容，但它并不是函数概念的核心，函数概念的核心是“一个对应规律”。只有根据这个规律，才能对于每一个x值有唯一确定的y值与之对应。

2．函数值

函数$y=f(x)$,当$x=a$时的对应值，叫做当$x=a$时的**函数值**。用记号$f(a)$或$y|_{x=a}$来表示。

如自由落体中，$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$，当$t=1.5$时，对应的函数值就是：

$$S(1.5)=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1.5^2=11.025$$

有时也记为：

$$S|_{t=1.5}=11.025$$

又如函数$f(x)=3x^2-2x+1$，则有：

$$f(0)=3\times 0^2-2\times 0+1=1$$

$$f(x_0)=3x_0^2-2x_0+1$$

$$f(a+b)=3(a+b)^2-2(a+b)+1=3a^2+3b^2+6ab-2a-2b+1$$

可见，求$x=a$时的函数值，只要把函数关系中的自变量x用a代替就行了。

3．函数的定义域

使函数有意义的自变量的取值范围叫做函数的**定义域**。

函数的定义域指明函数关系的适用范围。也就是说，只有当自变量在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，这时，我们就说函数是有定义的。

为了简便起见，我们用“区间”来表示函数的定义域。

两个实数间的全体实数叫做区间。该二实数叫区间的端点。设$a<b$为二实数

满足$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数x叫做以a，b为端点的闭区间，记作$[a,b]$。

满足$a<x<b$的全体实数x叫做以a，b为端点的开区间，记作(a,b)。

满足$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的全体实数x叫半开区间，记作$[a,b)$或$(a,b]$此外还有无穷区间$(-\infty,a)$，$(-\infty,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$等。

例 4 求函数$f(x)=\dfrac{2}{x-3}$的定义域。

解 因为仅当$x-3=0$时，即$x=3$时，函数$f(x)$无意义，所以函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,3)$、$(3,+\infty)$，这里$(-\infty,3)$表示小于3的所有实数，即$-\infty<x<3$，同理，$(3,+\infty)$表示$3<x<+\infty$。

例 5 求函数$f(x)=\sqrt{4x+1}$的定义域。

解 因为要使函数$f(x)$有意义，必须

$$4x+1\geqslant 0\text{即}x\geqslant -\frac{1}{4}$$

所以函数$f(x)$的定义域是：$-\frac{1}{4}\leqslant x<+\infty$或$[-\frac{1}{4},\ +\infty)$。

例 6 求函数$f(x)=lg(2x-3)$的定义域。

解 因为要使函数$f(x)$有意义，必须

$$2x-3>0\text{即}x>\frac{3}{2}$$

所以函数$f(x)$的定义域是：$\frac{3}{2}<x<+\infty$或$\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$。

例 7 求函数$f(x)=\sqrt{1-x}+lg(1+x)+2$的定义域。

解 因为使$\sqrt{1-x}$有意义的实数是$-\infty<x\leqslant 1$，

而使$lg(1+x)$有意义的实数是$-1<x<+\infty$，

所以函数$f(x)=\sqrt{1-x}+lg(1+x)+2$的定义域是

$$-1<x\leqslant 1\text{或}(-1,\ 1]。$$

例 8 某工厂生产某产品，每日最多生产100吨，固定成本为130元，每多生产一吨，成本增加 6 元，则每日产品的总成本 c 是日产量 x 的函数

$$c=f(x)=130+6x$$

定义域：$0\leqslant x\leqslant 100$或$[0,\ 100]$它是由具体问题确定的。

1.3 函数的表示法

函数可以用公式、表格或图形表示出来，如例 1 是公式表示，例 2 是用图形表示，例 3 是用表格表示。

公式表示的函数优点是形式简单，便于应用数学分析的方法加以研究，缺点是自变量与函数间的对应关系不够明显，有时要做复杂的运算才能求得函数值。

表格表示函数的优点是表中的自变量值，可以不经过运算直接查出对应的函数值。特别是列表法可以用来表示还不知道公式的函数，这在许多自然科学中是常用的。其缺点：一般不能在表中把全部数值对应关系表达出来，总有一些自变量值没有列在其中。

图形表示的函数优点是它把自变量与函数间的关系通过图形直观地表示出来。缺点是从图形上得到的自变量与函数的对应值不够准确，并且不能直接运用数学分析方法进行计算。

通常函数有上面三种表示法，但对一个具体函数来说，这三种方法不一定都能适用。有时候，一个函数只能用其中的一种表示法来表示。但也有一些函数，可以有不止一种表示法。

还应说明，函数的某些对应规则还可能比较复杂，对于定义域内不同元素可能有不同的规则。

例如寄信时，信重不超过20克付邮费 8 分，超过20克而不超过40克支付邮费16分，于是

信重x克应付邮费（分）是：

$$f(x)=\begin{cases}8 & 0<x\leqslant 20\\ 16 & 20<x\leqslant 40\end{cases}$$

这里，$f(x)$是一个函数，它的定义域是$(0,40]$，只是它的对应规则不能只用一个式子来表示，这样的函数我们称为**分段函数**，如图1.2

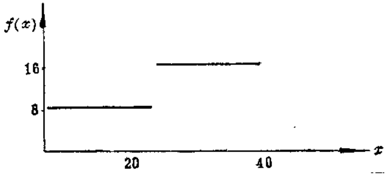

图 1.2

1.4 建立函数关系

上面我们讨论了有关函数概念各个方面的问题，现在举例说明如何建立函数关系式，即如何用解析式表示出存在于实际问题中的函数关系。

寻找函数关系式，首先要在实际问题中找出什么是自变量，什么是因变量，然后建立起联系两者的解析式。

例 1 有一工厂A与铁路的垂直距离为4公里，它的垂足B到火车站C的铁路长为12公里，工厂的产品必须经过火车站C才能转销外地，现知汽车运费是6.5元/吨公里，火车运费是4.5元/吨公里，为使运费最省，想在铁路上另修一小站M作为转运站，如图1.3，那么运费的多少决定于M的位置，试将运费表为距离BM的函数。

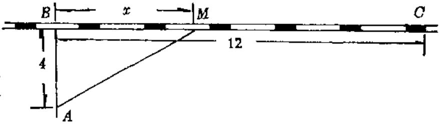

图 1.3

解 设$|BM|=x$，运费为y

根据题意$|AM|=\sqrt{4^2+x^2}$

$$|MC|=12-x$$

则$y=6.5\sqrt{4^2+x^2}+4.5(12-x)$

其定义域为$0\leqslant x\leqslant 12$

例 2 合同规定工厂全年均衡供应某企业产品1200件，根据合同要求，工厂分 n 批组织生产，每批产品制成后先入库，然后按规定速度陆续供应某企业，到该批产品全部出库时正好下一批产品入库，产品在库贮存情况如图1.4所示。

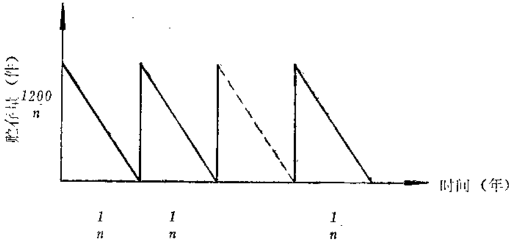

图 1.4

如果每生产一批产品（不分批量大小）均需装配费 500 元，产成品入库后每件每年贮存费0.6元，试求工厂全年供应某企业1200件产品所花总费用 W 与批数 n 的函数关系。

解 因为产品均衡出库，所以在 $\frac{1}{n}$ 年时间内平均贮量为

$$\frac{0+\frac{1200}{n}}{2}=\frac{600}{n}$$

则全年产品贮存费用为

$$0.6\times\frac{600}{n}\times\frac{1}{n}\times n=0.6\times\frac{600}{n}$$

所以工厂全年供应某企业1200件产品所花总费用为：

$$W=500n+0.6\times\frac{600}{n}$$

$$=500n+\frac{360}{n}$$

例 3 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里内，每公里 K 元；超过 a 公里每公里运价 $\frac{4}{5}K$ 元。现把运价 M 和里程 S 之间的函数用公式表示出来为

$$M=\begin{cases} KS & \text{当}0<s\leqslant a \\ Ka+\frac{4}{5}K(s-a) & \text{当}a<s \end{cases}$$

1.5 函数的几个简单性质

1．函数的单调性

如果在区间 (a,b) 内任取两点$x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad （或者f(x_1)>f(x_2)）$$

则称 $y=f(x)$在区间 (a,b) 内为**单调增加**（或**单调减少**）**函数**。单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**。

例 1 讨论函数$y=f(x)=x^2$的单调性。

解 函数 $f(x)=x^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$。在$(-\infty,+\infty)$ 内任取两点x_1和x_2，且$x_1<x_2$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$

若 $x_1<x_2\leqslant 0$，有$x_1+x_2<0$，且$x_2-x_1>0$

所以$(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$，也就是$f(x_2)-f(x_1)<0$．即

$$f(x_1)>f(x_2)$$

若$0\leqslant x_1<x_2$，有$x_1+x_2<0$，且$x_2-x_1>0$

所以$(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$，也就是$f(x^2)-f(x_1)>0$，即

$$f(x_1)<f(x_2)$$

因此$f(x)$在$(-\infty,0)$内是单调减少函数；在$(0,+\infty)$内是单调增加函数。

2．函数的奇偶性

如果函数$y=f(x)$满足$f(-x)=f(x)$，则称它为**偶函数**；如果函数 $y=f(x)$ 满足$f(-x)=-f(x)$，则称它为**奇函数**、

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

例如，$f(x)=x^2$是偶函数，这是因为

$$f(-x)=(-x)^2=x^2，即f(-x)=f(x)$$

又如$f(x)=x^3$是奇函数，这是因为

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3，即f(-x)=-f(x)$$

3．函数的有界性

如果对于区间 (a,b) 内所有x，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，其中M是一个与x无关的正数，则称$f(x)$为区间 (a,b) 内**有界函数**。

例如$y=\sin x$，对于一切x都有

$$|\sin x|\leqslant 1$$

所以，正弦函数在整个数轴上都是有界的。

4．函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 T，当 x 取任何值时，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**。满足这个条件的最小正数 T 叫做 $f(x)$ 的**周期**。

例如 $f(x)=\sin x$

因为 $f(x+2k\pi)=\sin(x+2k\pi)=\sin x=f(x)$

其中 $K=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\cdots\cdots$。

显然对于 $2k\pi$ 来说，当 $k=1$ 时，即 2π 是最小正数，所以 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

1.6 反　函　数

某种商品销售总收入 y 是商品单价 a 和销售量 x 的函数，即

$y=ax$，其中 x 是自变量，y 是函数，反过来，若把 y 看作自变量，x 看成因变量，则有函数关系式

$$x=\frac{y}{a}$$

如果把 $y=ax$ 称为直接函数，那么 $x=\dfrac{y}{a}$ 和前面关系恰好相反，所以把 $x=\dfrac{y}{a}$ 叫做直接函数 $y=ax$ 的反函数。

定义 设给定函数 $y=f(x)$，若把 y 当作自变量，x 当作因变量，则由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $y=f^{-1}(x)$。

如果把 $y=f(x)$ 叫做**直接函数**，则 $x=\varphi(y)$ 叫做**本义反函数**，通常习惯把自变量记作 x，因变量记作 y，所以 $x=\varphi(y)$ 也可写成 $y=\varphi(x)$，为了便于区别，称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的**矫形反函数**。

直接函数与本义反函数图形在同一坐标系下是一致的，而矫形反函数与直接函数图形在同一坐标系下是以直线 $y=x$ 为对称轴的对称图形，我们通常说的反函数是指矫形反函数，

例 1 求 $y=2x-3$ 反函数。

解 由 $y=2x-3$ 可以求出

$$x=\frac{y+3}{2}$$

因此得出 $y=2x-3$ 的反函数是 $y=\dfrac{x-3}{2}$，如图1.5。

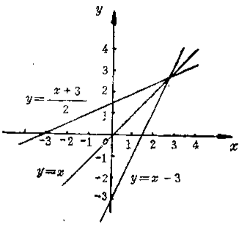

图 1.5

1.7 基本初等函数

在中学已经学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，这五类函数统