应用数学丛书

应用泛函分析

柳重堪 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

应用泛函分析

柳重堪 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍泛函分析的下列基本知识：线性赋范空间、内积空间、线性算子、线性泛函及非线性泛函分析。同时介绍泛函分析在最优化、最佳逼近、控制理论、线性估计、变分法、凸分析及近似方法等方面的应用。适合工科研究生和工程技术人员阅读，也可作为应用数学专业和计算数学专业学生的泛函分析补充读物。

应用数学丛书
应用泛函分析
柳重堪 编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 $^1/_{32}$ 印张10　　259千字
1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷　印数：0,001—3,700册
统一书号：15034·3070　　定价：2.25元

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

本丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序 言

泛函分析以其高度的统一性和广泛的应用性，在数学领域中占有重要的地位。近几十年来，随着科学技术的迅速发展，泛函分析不再仅仅是数学工作者必须具备的基础知识，而且成为愈来愈多的工程技术人员所渴望了解的一门学科。这是因为在科学技术各个分支的发展过程中，泛函分析所起的指导作用和工具作用日益显著。

泛函分析是本世纪初才逐渐形成的一个新的数学分支。其产生的背景一方面是出于研究数学物理中各种艰深问题的需要，另一方面则是受到其它数学分支高度发展的影响。泛函分析的许多概念和方法是在总结各数学分支的相似点的基础上提炼抽象出来的。例如 n 维矢量的直角坐标表示与函数的傅立叶级数展开；线性的代数方程、常微分方程、差分方程与积分方程的解的结构和求解方法；微积分中的函数与变分学中的泛函都可通过使微分为零来求极值；等等，都有异乎寻常的相似性。这就促使数学家们用抽象的方式、统一的观点对这些不同范畴中的共同点进行加工，其结果不仅使经典分析中的概念和方法一般化了，而且由于与代数、几何结合在一起考虑，使得这些概念和方法也代数化、几何化了。在数学中，代数、几何、分析的思想体系和方法论各有千秋，泛函分析则将它们融为一体，以紧凑、简洁的方式予以描述。因此，泛函分析所具有的统一性和适应性要比其它数学分支更为突出。而在用它处理各种应用问题时，其过程也就显得格外的清晰、明确和简捷。

具体地说，泛函分析主要研究一些抽象空间的属性及空间与空间的相互联系（算子）的特征。在数学中，通常把赋于某些数学结构的集合称为空间。例如，一个集合，若能引进线性运算（加

法和数乘)，便成为线性空间；若再引入元素的“长度”——范数——的概念，便成为线性赋范空间；若再引入元素与元素的“内积”，便成为内积空间。在线性赋范空间中，可以讨论极限概念，从而可以研究类似于微积分中的许多问题。在内积空间中，许多平面几何中的直观事实都可以得到推广。数学中有两种最常见的基本结构：代数结构(例如群、环、域、线性空间、线性代数等)与拓扑结构(例如距离、极限、开集闭集、连通性、紧性等)。泛函分析中所研究的空间主要是将一个拓扑结构加到一个代数结构上所形成的所谓拓扑线性空间。它无论在内容、系统和思想方法上都承袭了人们所熟悉的代数、几何和分析（包括微积分）这些基础数学的本质和精髓，并且作了深刻而广泛的拓展。因此，只要具备这些基础数学知识，就会在学习泛函分析的过程中不断地温故而知新。例如，微积分中的函数是定义和取值都在实数域中的算子。这是一种最简单的算子，它的许多性质和有关的研究方法都可以推广到定义和取值都在抽象空间中的算子。通过对比，便可体会到这些推广既有充分的继承性，又产生了质的飞跃。

在泛函分析中，许多分散在各个数学分支中的事实得到了统一的处理。例如常见的 n 维欧氏空间和各种函数空间都可作为线性赋范空间来研究；微积分中的隐函数存在定理、微分积分方程的解的存在唯一性定理和代数方程、微分积分方程的逐次逼近法求解，在泛函分析中都归结为一个定理——不动点原理。这正是“抽象”的结果。泛函分析可以使一些原来不太容易理解的结果变得非常显然和自然。例如连续周期函数的傅立叶级数可能是发散的，这是共鸣定理的必然结果。但是当初数学家们为了弄清这个问题的是与否，曾经付出了相当多的时间和精力。泛函分析还能使一些用传统的数学知识无法解释而物理意义又很明确的概念获得恰当的严格的描述。例如广义函数（δ 函数）的理论。如今，泛函分析不仅与各个经典的数学分支密切相关，而且与许多应用学科（例如控制理论、优化与规划、逼近理论、近似方法等）紧密联系，相辅相成。正因为泛函分析的思想方法和理论成果揭示了

数学和工程技术许多分支的共同属性与相互联系，并以整体的方式表示出来，所以掌握了这一有力的工具，就将有助于人们从比较普遍的角度和观点去考察和研究各种问题，启发人们较快地理解问题的实质，从而极大地开辟通向使问题获得解决的各种途径，最后得到较为圆满的处理问题的方法。

本书的编写宗旨是为了使更多的非数学工作者获得基本的泛函分析知识，并能较快地应用这些知识去研究有关课题。为此，在选材时，对于基本的概念和理论；我们强调少而精的原则；对于应用，则突出其中的典型方法。基于上述观点及篇幅所限，某些经典的内容例如线性算子的谱理论、若干种特殊算子的性质等，书中没有涉及，读者可在其它许多著作中找到。我们把主要篇幅置于如何将泛函分析的重要结论应用于具体课题。在前四章中，首先以简洁的方式介绍各种类型的抽象空间和算子、泛函，列举了大量常见的实例。在此基础上，以某些几何意义明显而应用范围较广的定理（例如第二章中的投影定理，第四章中的线性泛函延拓定理及第六章中的分离定理等）为线索，深入地讨论各种应用方法。第五、六章属于非线性泛函分析范畴。我们从无穷维空间的微分学出发，着重介绍了变分学和非线性规划中的泛函极值求法。它和微积分中函数极值求法是很相似的。第七章以统一的方式论述数值近似计算中常用的伽辽金法、差分法、有限元法和样条内插法等的近似格式，给出了抽象近似的一般理论。最后，第八章介绍了在泛函分析中占重要地位的不动点原理及其在求解方程中的应用。

阅读本书不需要实变函数理论作为基础。读者只要较好地具备微积分和线性代数知识，就能阅读绝大部分章节。对于极少数地方需要一些补充知识的，我们都列出了参考书。但如果不去查阅，也并无妨碍。此外，为了使不同的读者能按自己的需要有选择地阅读某些章节，本书尽可能地做到使各章内容有较强的相对独立性。

在本书编写过程中，始终得到郭大钧教授的热情关怀和指导，

同时，刘锦萼、王日爽、蒋正新副教授以及李志尧、肖亮壮、徐源、向晓京等同志分别阅过部分章节原稿，提出了许多宝贵的意见和建议，在此深表谢意。

由于作者学识水平有限，书中错误与不妥之处在所难免，诚恳地期待来自各方面的批评指正。

1983年12月

应用数学丛书目录

第一批目录

*1. z-变换与拉普拉斯变换…………… 关肇直 王思平 编著
*2. 常微分方程及其应用…………………秦化淑 林正国 编著
*3. 实变函数论基础 ……………………………胡钦训 编著
*4. 正交函数及其应用 …………………………柳重堪 编著
*5. 沃尔什函数与沃尔什变换 ………… 关肇直 陈文德 编著
*6. 圆柱函数……………………………………………刘颖 编著

第二批目录

*7. 集合论 ………………………………………程极泰 编著
*8. 图论 …………………………………………王朝瑞 编著
*9. 概率论 ………………………………………狄昂照 编著
10. 矩阵理论 ……………………………王耕禄 史荣昌 编著
11. 复变函数论 …………………………………杨维奇 编著
*12. 逼近论 ……………………徐利治 周蕴时 孙玉柏 编著
*13. 矢量与张量分析 …………冯潮清 赵愉深 何浩法 编著
14. 模糊数学 ……………………………汪培庄 刘锡荟 编著
15. 编码理论……………………………………肖国镇 编著
*16. 应用泛函分析 ………………………………柳重堪 编著

注，这是第一、二批的目录，以后将陆续分批刊登；有*者已出版。

目 录

第一章　线性赋范空间

泛函分析的主要研究对象之一是抽象空间。通常，人们对于一维、二维和三维的几何空间是熟悉的，在学习线性代数后，对于 n 维空间也会有一定的认识。然而对于泛函分析来说，这些都是最原始的素材。本章及第二章旨在这些素材的基础上，将普通的几何、代数和分析中的基本概念予以抽象和拓展，介绍各种常见的抽象空间（特别是无穷维空间），并进一步探讨这些空间的特性。

§1.1　线性空间

1.1.1　线性空间的定义

线性空间的概念是数学中最基本的概念之一。实数的全体（R_1），平面矢量的全体（R_2），空间矢量的全体（R_3），所有次数 $\leqslant n$ 的实系数多项式的全体等等，都是线性空间的实例。其特点是在该集合中能够引入两种代数运算：加法和数乘。这两种运算都满足一定的运算规律。下面，以公理化的方式给出其定义。

定义1.1.1　设 E 为非空集合，如果

（Ⅰ）对于 E 中任意两个元素 x 与 y，均对应于 E 中的一个元素，称为 x 与 y 之和，记为 $x+y$；

（Ⅱ）对于 E 中任一元素 x 和任一实数 λ，均对应于 E 中的一个元素，称为 x 与 λ 的数乘，记为 λx；

（Ⅲ）上述两种运算满足下列运算规律（x、y、z 为 E 中任意元素，λ 与 μ 为任意实数）：

（1）$x+y=y+x$，

（2）$x+(y+z)=(x+y)+z$，

（3）E中存在唯一的零元素 θ（有时也记为0）：它满足 $\theta+x=x$，$x\in E$；且对任一 $x\in E$ 均存在唯一的"负元素" $-x\in E$，它满足 $x+(-x)=\theta$，

（4）$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$，

（5）$1x=x$，$0x=\theta$，

（6）$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$，

（7）$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$，

则称E是**实线性空间**。线性空间的元素有时也称为"点"。

类似地，若上述定义中的"实数"均改为"复数"，则称E是**复线性空间**。我们强调指出，除非特别声明，本书自始至终都是指实线性空间。

例1.1.1　n 维空间R_n，其元素 x 由 n 个有次序的实数构成：$x=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$，则$R_n$是线性空间，其中加法与数乘如通常的定义方法：若 $x=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$，$y=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$，则

$$x+y=[\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n]$$

$$\lambda x=[\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n]$$

例1.1.2　所有$m\times n$阶实矩阵所构成的集合 M_{mn} 是线性空间，其加法与数乘定义为通常的矩阵加法与矩阵数乘。

例1.1.3　所有无穷（实）数列 $x=[\xi_1,\xi_2,\cdots]$所构成的集合 l_∞ 是线性空间。

例1.1.4　所有次数$\leqslant n$ 的实系数多项式所构成的集合 P_n 是线性空间。

例1.1.5　所有在区间$[a,b]$上连续的实函数所构成的集合 $C[a,b]$是线性空间。

例1.1.6　所有在区间$[a,b]$上具有连续的k阶导数的实函数所构成的集合 $C^k[a,b]$ 是线性空间。

与线性代数中类似，可以在线性空间中引入线性相关、线性无关以及基的概念。设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n（$n\geqslant 1$）是线性空间E中的 n 个元素，如果存在不全为零的常数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 使得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$$

则称 x_1，x_2，…，x_n是线性相关的。反之，若由

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n=\theta$$

的成立可导致 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，则称 x_1，x_2，…，x_n是线性无关的。如果线性空间E中存在 n 个线性无关的元素 e_1，e_2，…，e_n，使得E 中任一元素 x 均可表成 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，则称 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为空间E 的一组**基**。n 称为空间E 的**维数**，记为 $\dim E=n$。而E 称为有限维（n 维）线性空间。不是有限维的线性空间称为无穷维线性空间。容易看出，上述诸例中，空间 R_n、M_{mn} 与 P_n 都是有限维的，而 l_∞、$C[a,b]$与 $C^k[a,b]$则都是无穷维的。

1.1.2 线性空间的同构

定义1.1.2 设X和 $\widetilde{X}$ 是两个线性空间，如果在X和 $\widetilde{X}$ 之间存在一一对应关系 φ（即对于任意的元素 $x\in X$，均有唯一的元素 $\tilde{x}\in\widetilde{X}$ 与之对应，记为 $\tilde{x}=\varphi(x)$，反之，对于任一 $\tilde{x}\in\widetilde{X}$，均有唯一的 $x\in X$，它满足 $\varphi(x)=\tilde{x}$)，使得对任意的 x、$y\in X$及任意的实数 λ，都有等式

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$
$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x) \tag{1.1.1}$$

则称空间X和$\widetilde{X}$是**线性同构**的，简称为**同构**。而 φ 称为**同构映射**。

例如，例 1.1.4 中的线性空间 P_n 与 $n+1$ 维矢量空间R_{n+1} 是同构的。事实上，设 $x(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$，则它可以与矢量 $[a_k]_{k=0}^{n}\triangleq[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]\in R_{n+1}$ 相对应，也就是定义 $\varphi(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)=[a_k]_{k=0}^{n}$。且这种对应关系 φ 是满足式（1.1.1）的（请读者验证)。

例1.1.7 任一 n 维实线性空间E 都与 R_n 同构。事实上，我们可以在空间E 中取定一组基 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$，则E 中任一元素 x 均可唯一地表为 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$。令 $\varphi(x)=[\xi_k]_{k=1}^{n}\in R_n$，则空间$E$ 和R_n 之间的这种对应关系显然是一一对应的关系。下面证明 φ 满足式

(1.1.1)。设 $y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in E$，则对任意实数 λ 和 μ，有

$$\lambda x+\mu y=\sum_{k=1}^{n}(\lambda\xi_k+\mu\eta_k)e_k$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x+\mu y)&=[\lambda\xi_k+\mu\eta_k]_{k=1}^{n}\\&=\lambda[\xi_k]_{k=1}^{n}+\mu[\eta_k]_{k=1}^{n}=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)\end{aligned}$$

此式等价于式（1.1.1）。

同构概念的引入，使得我们在处理有关问题时可以将两个同构的线性空间视为等同的空间。

1.1.3 子空间与凸集

定义1.1.3 设 L 是线性空间 E 的子集。如果对于任意的 x、$y\in L$ 及实数 λ、μ，均有 $\lambda x+\mu y\in L$，则称 L 是 E 的一个**子空间**。

显然，子空间本身也是一个线性空间。

例如，在三维空间 R_3 中，任何过原点的平面都是 R_3 中的二维子空间，任何过原点的直线都是 R_3 中的一维子空间。

再例如，在 n 维空间 R_n 中，所有满足齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n=0\\a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n=0\\\qquad\cdots\qquad\cdots\\a_{s1}\xi_1+a_{s2}\xi_2+\cdots+a_{sn}\xi_n=0\end{cases}$$

的矢量 $[\xi_k]_{k=1}^{n}$ 的全体构成 R_n 的一个子空间。在线性代数中，这个子空间称为齐次线性方程组的解空间。解空间的维数等于 $n-r$，其中 r 为系数矩阵的秩。而方程组的基础解系就是解空间的一组基。

设 E 是线性空间，L_1 和 L_2 是 E 中的两个子空间，如果 E 中任一元素 x 均可唯一地表示成

$$x = x_1 + x_2$$

其中$x_1 \in L_1$，$x_2 \in L_2$，则称E是L_1与L_2的**直和**，并记为$E = L_1 \oplus L_2$。

例如，若L_1是R_3中的一条过原点的直线，L_2是R_3中的一个过原点的平面，且L_1不落在L_2上，则$R_3 = L_1 \oplus L_2$。

有了子空间的概念后，我们可以引入另一种重要的集合——仿射流形。它是子空间的平移。

定义1.1.4 设L是线性空间E的真子空间，$x_0 \in E$，则集合

$$x_0 + L = \{x_0 + l;\ l \in L\}$$

称为E中的一个**仿射流形**(也称为线性流形或线性簇)。

例如，在三维空间R_3中，若L是过原点的一条直线（它是R_3中的一维子空间)，则所有平行于L的直线都是对应于L的仿射流形。类似地，若L是R_3中的一个二维子空间（即过原点的平面)，则所有平行于L的平面都是对应于L的二维仿射流形（仿射流形$x_0 + L$的维数是指它所对应的子空间L的维数)。

再如，设n元线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ \cdots \qquad \cdots \\ a_{s1}\xi_1 + \cdots + a_{sn}\xi_n = b_s \end{cases}$$

有解，其系数矩阵的秩为r，则其解的全体是R_n中的一个$n-r$维仿射流形。这可由“线性方程的通解等于其特解加上对应的齐次方程的通解”推知。

同样，对于线性非齐次常微分方程也有类似的结论。方程(设函数$a_i(t)$、$f(t) \in C[a, b]$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t)$$

的解的全体是线性空间$C[a, b]$中的一个仿射流形。

下列命题给出了仿射流形的等价定义。

引理1.1.1 设E是线性空间，则$V \subset E$是仿射流形的充分必要条件是对V中的任意元素x、y及任意满足$\lambda + \mu = 1$的实

数 λ、μ 有 $\lambda x+\mu y\in V$。

证明 设 V 是 E 中的仿射流形：$V=x_0+L$，其中 $x_0\in E$，L 是 E 中的子空间。设 x，$y\in V$，$\lambda+\mu=1$。则 x 可表为：$x=x_0+\tilde{x}$；y 可表为：$y=x_0+\tilde{y}$，其中 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}\in L$。于是 $\lambda x+\mu y=\lambda x_0+\mu x_0+\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}=x_0+\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}\in V$。反之，设 x、$y\in V$，$V=\{\lambda x+\mu y;\ \lambda+\mu=1\}$。在 V 中任意取定一点 $v_0=\lambda_0 x+\mu_0 y$，则集合 $L=\{\lambda x+\mu y-\lambda_0 x-\mu_0 y;\ \lambda+\mu=1\}$ 是子空间（请读者验证）。于是 $V=v_0+L$ 是仿射流形。引理得证。

今后，我们还要遇到线性空间中的另一种重要的集合：凸集。

定义1.1.5 设 M 是线性空间 E 中的一个集合，如果对于任意的 x、$y\in M$ 及满足 $\lambda+\mu=1$ 之 $\lambda\geqslant 0$，$\mu\geqslant 0$，均有

$$\lambda x+\mu y\in M, \tag{1.1.1}$$

则称 M 是 E 中的**凸集**。

式（1.1.1）可改写为

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in E,\quad \lambda\in[0,\ 1] \tag{1.1.2}$$

若 $E=R_2$，则当 λ 取遍 $[0,1]$ 中的数值时，$\lambda x+(1-\lambda)y$ 表示连接 x，y 这两点的直线段。因此从直观上看，R_2 中的凸集就是通常的凸几何图形。

最后提请读者注意，虽然子空间、仿射流形和凸集都要求元素 $\lambda x+\mu y$ 与 x，y 一起仍属于本集合，但由于对 λ，μ 的要求不同，故这三种集合的差别是明显的。

§1.2 距离空间

线性空间的引入，使我们能够在其中进行简单的代数运算，即线性运算。但这是很不够的。例如单凭代数运算并不能建立极限概念，从而无法将微积分中的许多重要概念和思想进行推广。我们知道，在微积分课程中，极限的定义是基于两个实数之间的“距离”这个概念上的。本节将距离的概念推广到一般的抽象空间中，并以公理化的形式给出定义，从而揭示了这个概念的本质。