高等学校教材

机械工程中的有限元法基础

高德平　主编

西北工业大学出版社

高 等 学 校 教 材

机械工程中的有限元法基础

高德平　主编

高德平　饶寿期　杜生广　尹　晶　编

西 北 工 业 大 学 出 版 社

1993 年 12 月　西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】本书以平面三角形常应变单元为基础，系统地阐述了有限元法的基本理论和方法，详细地介绍了求解平面问题的三角形单元有限元程序。全书共分七章：第一章绪论，第二章平面问题的有限元法，第三章轴对称体的有限元法，第四章等参数单元，第五章有限元方程的解法，第六章有限元法的程序设计，第七章变分原理与有限元法。书末还附有可供教学参考和实际应用的“采用三角形常应变单元求解平面问题的有限元源程序”。

本书主要是为航空发动机专业本科学生编写的，也可作为一般工科院校机械类专业本科生“有限元法基础”课程的教材和研究生相应课程的教学参考书。同时，还可供从事机械工程专业的科技工作人员自学参考之用。

高等学校教材
机械工程中的有限元法基础
高德平 主编
责任编辑 王夏林
责任校对 长 生

（西安市友谊西路 127 号 邮编 710072）
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0486-8/TH・23(课)
*
开本 787×1092 毫米 1/16 13.875 印张 335 千字
1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷
印数：1－2 000 册 定价：6.60 元

前　　言

本书是为航空发动机专业本科学生编写的，也适用于一般工科院校机械类专业学生作为学习有限元法基础的教材以及工程技术人员作为学习有限元法的参考书。

随着现代科学技术的发展，有限元法已成为工程科学中一种十分重要的数值分析工具。除了用于工程领域的结构分析问题外，有限元法还广泛地应用于非结构的场领域，例如流场、温度场、电磁场等。有限元法的发展和应用已受到了科技界和工程界人士的广泛重视。

目前，我国各工科高等院校的力学专业以及大多数非力学的机械类专业都已开设了有限元法基础这门课程。本书是在南京航空航天大学等三所航空院校合编、1986 年出版的航空专业统编教材的基础上，吸取了近年来教学实践中的经验，修改、充实重新编写而成的。本书遵循由浅入深、突出重点，阐明概念，注重实用的编写原则，以平面常应变三角形单元为基础，介绍了有限元法的基本原理和方法，并进一步介绍了用常应变三角形单元求解平面问题的有限元程序，使学生掌握应用有限元法求解工程问题的全过程，也为学生进一步学习和实际应用打下必要的基础。本书第一、二、六章是有限元法理论和方法的最基本部分，其余各章是在上述基本内容基础上的深化和扩展。其中，第三章为轴对称体承受轴对称和非轴对称载荷情况下的有限元法，第四章为等参数单元分析，第五章为有限元方程的各种解法，都是平面三角形单元有限元法基础上的拓宽。而第七章的内容则是将有限元法的理论和方法扩展到了非结构的场问题分析，具有一定的深度。本书作为本科生教材使用时，可以根据学生的基础和教学时数的多寡酌情处理。本书各章附有习题和思考题，供教学过程中参考。附录为有限元法的基本教学程序，对此，在第六章中进行了详细分析，也可供学生上机实践之用。

本书由南京航空航天大学高德平主编，河海大学姜弘道教授主审。其中第一、三、五章由西北工业大学杜生广编写，第二章由南京航空航天大学高德平、尹晶编写，第四、七章由北京航空航天大学饶寿期编写，第六章由南京航空航天大学尹晶编写，附录的源程序由尹晶提供。

由于水平有限，经验不足，书中难免有错误和不妥之处，望读者给予批评指正。

主　编
1993 年 10 月

目　　录

第一章 绪 论

1.1 引 言

在工程技术和科学研究中，常常会遇到大量的由常微分方程、偏微分方程及相应的边界条件来描述的场问题，如位移场和应力场问题，但能用解析方法求出精确解的，只是方程性质比较简单，且几何边界相当规则的少数问题。对于大多数问题，由于物体的几何形状比较复杂或者问题的某些特征呈非线性，则很少能得出解析解。这就需要研究它的数值解法，以求出近似解。

在已发展了的许多近似数值解法中，开始常用的是有限差分法。它把基本微分方程及其边界条件近似地改用差分方程来表示，把求解微分方程的问题改换成求解代数方程的问题。一个问题的有限差分模型可以给出它的基本微分方程的逐点近似，当取较多节点时，问题的精度可以大大提高。这种方法在工程计算中曾被广泛地采用，使人们积累了丰富的经验。但是，当遇到几何形状复杂的边界条件时，应用有限差分法，解的精度较低，甚至求解发生困难。

30 年来，随着电子计算机的迅速发展和普遍应用，出现了另一种数值计算方法——有限元法。其基本思想是将一个连续的求解域离散化，即分割成彼此用节点（离散点）互相联系的有限个单元，在单元体内假设近似解的模式，用有限个节点上的未知参数表征单元的特性，然后用适当方法，将各个单元的关系式组合成包含这些未知参数的方程组，求解这个方程组，得出各节点的未知参数，利用插值函数求出近似解。随着单元尺寸的缩小，也即单元数目的增加，解的近似程度不断改进，如果单元是满足收敛要求的话，近似解最后收敛于真实解。有限元法按照所选用的基本未知量和分析方法的不同，可以分为两种基本解法。一种是以节点位移为基本未知量，在选择适当的位移函数的基础上，进行单元的力学特性分析，在节点上建立平衡方程，即单元的刚度方程和结构总体刚度方程，然后解出节点位移，再由节点位移求得应力，这种方法称为位移法。另一种是以节点力为基本未知量，在节点上建立位移连续方程，解出节点力后，再计算节点位移和应力，这种方法称为力法。一般讲来，用力法求得的应力较位移法求得的精度高，但位移法比较简单，计算规律性强，且便于编写计算机通用程序，因此，在用有限元法进行结构分析时，大多采用位移法。用有限元位移法分析结构大致经过以下几个步骤：

(1) 将结构划分成若干个单元，单元与单元之间以节点互相连接；

(2) 计算单元刚度矩阵，并形成结构总体刚度矩阵；

(3) 将非节点载荷等效地移置到节点上，并求出结构总体载荷列阵；

(4) 引入约束条件，解线性代数方程组，求得节点位移；

(5) 计算应变和应力。

有限元法与有限差分法相比，其优点就在于可以计算复杂结构的场问题，这是因为单元能按各种不同的连接方式组合在一起，且单元本身又可以有不同的几何形状，因此可以模拟

几何形状复杂的结构，得出其近似解；又由于有限元法的解题步骤已经系统化、标准化，且有相当数量灵活通用的计算机程序，所以可以解决各种不同的工程问题；而且计算速度快、精度高、成本低，因此是目前工程计算中应用最广泛最有效的数值计算方法之一。

有限元法的发展，从应用数学的观点来看，其基本思想的提出可以追溯到40年代初，数学家R. Courant第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小势能原理相结合，来求St·Venant扭转问题。后来，一些应用数学家和工程技术人员由于各种原因都涉足过有限元的概念。1954年联邦德国阿亨大学的J. H. Argyris教授用系统的最小势能原理，得到了系统的刚度方程，使已经成熟的杆系结构矩阵分析法，可以用来对连续介质进行分析。随着航空事业发展的需要，促进了有限元法的发展，1956年美国波音飞机制造公司的M. J. Turner，R. W. Clough等人在分析大型飞机结构时，第一次采用直接刚度法给出了用三角形单元求解平面应力问题的正确解答，从而开创了利用电子计算机求解复杂弹性平面问题的新局面。Clough于1960年在一篇论文中首先采用“Finite Element”（有限元或有限单元）这个术语。有限元法的出现引起了各国工程界的高度重视。1963年—1964年，J. F. Besseling等人证明了有限元法是基于变分原理的Ritz法的另一种形式，1969年J. T. Oden教授又将有限元法扩展应用于加权余量法（如Galerkin法），同年英国O. C. Zienkiewicz教授提出等参单元的概念，从而使有限元法更加普及与完善，在理论上和实践方面都得到了飞速发展。

目前，这种方法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题，从固体力学扩展到流体力学、传热学等学科，由弹性材料扩展到弹塑性、塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料，从航空技术领域扩展到宇航、土木建筑、机械制造、水利工程、造船及原子能等。在我国，有限元法已经得到充分的重视。可以预料，随着电子计算机技术的发展，有限元法作为一个具有坚实理论基础和广泛应用效力的数值计算工具，必将在我国国民经济和科学技术发展中，发挥更大的作用，且有着极其广阔的前景。

1.2 结构离散化

从上节可以看出，结构离散化是有限元分析的基本前提，也是有限元法解题的重要步骤。结构离散化的主要任务是：

(1) 把结构分割成有限个单元；

(2) 把结构边界上的约束，用适当的节点约束来代替；

(3) 把作用在结构上的非节点载荷等效地移置为节点载荷。

结构离散化的具体做法，将在第二章中阐明。

在弹性平面问题中，可以把结构分割成三角形、矩形、6节点三角形和任意四边形等单元（图1.1）。由于三角形单元最简单，所以被广泛地采用。为了减少复杂边界的几何逼近误差及提高单元内部插值精度，通常还采用8节点曲边四边形单元（图1.1）。

对于轴对称问题，一般采用三角形环单元和四边形环单元（图1.2），最常用的是三角形环单元。同样，为模拟曲线边界及提高插值函数精度，还可以采用8节点四边形环单元（图1.2）。

在空间问题中，可以把结构划分成四面体和六面体单元，常常采用8节点和20节点六面单元（图1.3）。

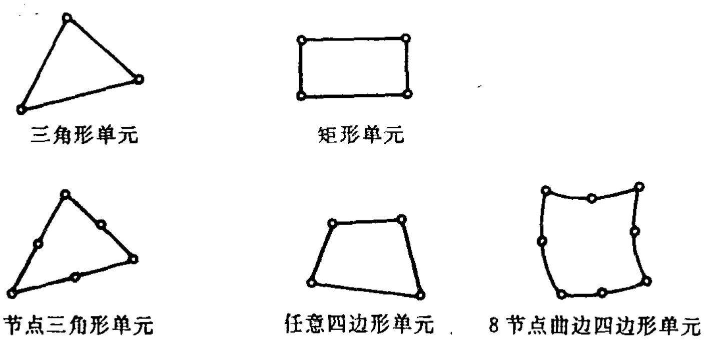


图 1.1　平面单元

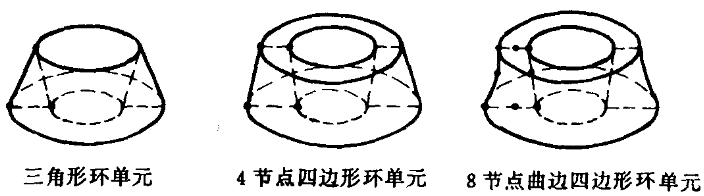


图 1.2　轴对称单元

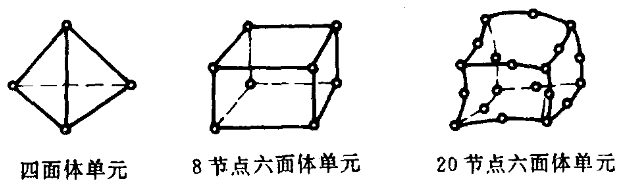


图 1.3　空间单元

1.3　刚度矩阵的概念

为了说明有限元刚度矩阵的概念，先介绍杆系结构的矩阵分析法。图 1.4 所示的平面桁架结构，作用在节点上的外力及桁架内各杆的位移都在平面内。当用有限元法分析杆系结构时，需要将复杂的结构离散化，通常采用自然离散的形式，也即把结构的杆作为单元，称为

杆单元。有限个杆单元之间，利用有限个节点相互铰接（桁架情况），以传递负荷。先对单元的特性进行分析，然后再将其组成结构进行整体分析。由于有限元法用于杆系，具有十分清晰的物理意义，这对深入了解有限元刚度矩阵的概念很有帮助。

1.3.1 杆系结构的单元刚度矩阵

从图 1.4 的平面桁架中，任取一个杆单元③表示为图 1.5，令其节点号为 i、j，节点位移分量为 u_i、v_i、u_j、v_j，用矩阵式表示

$$\delta^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

式中 δ^e 称为单元节点位移列阵。单元节点力列阵的矩阵表达式为

$$F^e = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

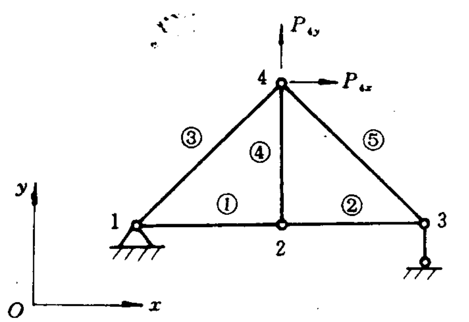


图 1.4　平面桁架结构

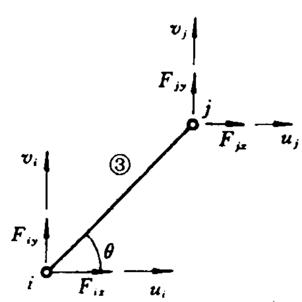
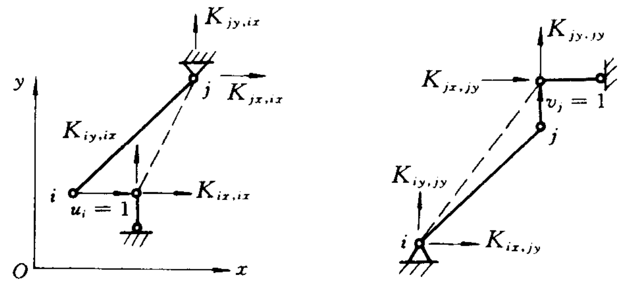


图 1.5　杆单元

当 $u_i=1$，$v_i=u_j=v_j=0$ 时，这相当于在节点 i 处安置了一个只允许产生水平位移的连杆铰支座，在节点 j 处安置了固定铰支座，如图 1.6（a）所示。这时在 i、j 二节点的 x，y 两个方向所产生的抵抗 u_i 变形的力（即刚度）为

$$\begin{cases} F_{ix}=K_{ix,ix}, & F_{iy}=K_{iy,ix} \\ F_{jx}=K_{jx,ix}, & F_{jy}=K_{jy,ix} \end{cases}$$

式中刚度元素符号的的第二个下标，说明存在单位位移的节点号和方向，第一个下标表明所产生力的节点号和方向。如 $K_{jy,ix}$表示节点 i 的 x 方向具有单位位移时，在节点 j 的 y 方向所产生的力（图 1.6（a））。



(a) (b)

图 1.6 刚度系数的物理概念

同样方法，当 $v_j=1$，其它方向的位移为零时，各节点沿 x，y 方向所产生的低抗 v_j 变形的力为

$$\begin{cases} F_{ix}=K_{ix,jy}, & F_{iy}=K_{iy,jy} \\ F_{jx}=K_{jx,jy}, & F_{jy}=K_{jy,jy} \end{cases}$$

如图 1.6（b）所示。其它依此类推。

当各节点位移分量同时存在，在线弹性范围内，则各节点力分量为各个位移分量所产生的节点力分量的线性叠加，即

$$\begin{cases} F_{ix}=K_{ix,ix}u_i+K_{ix,iy}v_i+K_{ix,jx}u_j+K_{ix,jy}v_j \\ F_{iy}=K_{iy,ix}u_i+K_{iy,iy}v_i+K_{iy,jx}u_j+K_{jy,jy}v_j \\ F_{jx}=K_{jx,ix}u_i+K_{jx,iy}v_i+K_{jx,jx}u_j+K_{jx,jy}v_j \\ F_{jy}=K_{jy,ix}u_i+K_{jy,iy}v_i+K_{jy,jx}u_j+K_{jy,jy}v_j \end{cases}$$

将上式写成矩阵形式，并把刚度元素的下标 ix，iy，jx，jy 替换成 1，2，3，4 于是有

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \qquad (1-3)$$

或简写为

$$F^e=K^e\delta^e$$

式中 K^e 称为单元刚度矩阵，上标 e 表示为一个单元的参数，如单元的节点力 F^e 等。

杆单元的刚度矩阵，也可以用下述方法得到。由于桁架结构的杆件只承受轴向力 F_a，因而只产生轴向位移 δ_a，由图 1.5 可以看出

$$\delta_a=u_j\cos\theta+v_j\sin\theta-u_i\cos\theta-v_i\sin\theta$$

$$F_{jx}=F_a\text{coa}\theta=K\delta_a\cos\theta$$

将前式代入后式，并经整理得

$$F_{jx}=K\left[(u_j-u_i)\cos^2\theta+(v_j-v_i)\cos\theta\sin\theta\right]$$

同样方法可求得其它节点力与节点位移的关系。列成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \qquad (1-4)$$

式中，K 为杆件的轴向刚度系数（相当于弹簧系数）由材料力学知

$$K=\frac{EA}{L}$$

式中，E 为弹性模量，A 为杆件横截面积，L 为杆的长度，“C” 代表 $\cos\theta$，“S” 表示 $\sin\theta$。

由上述分析可见，单元刚度矩阵的物理意义就是单元抵抗变形的能力，与单向弹簧拉伸刚度不同的是当存在一个单位位移时，杆单元所产生的节点力不是 1 个，而是 4 个节点力分量。任何 1 个节点力分量都是由 4 个节点位移分量变化所产生的综合结果。

1.3.2 结构刚度方程

将杆单元组成结构，列出整体刚度方程，即建立平面桁架各节点上内力和外力的平衡方程。

把图 1.4 所示的桁架结构自然离散成如图 1.7 所示各个单元，并将各单元节点力均注在图上。

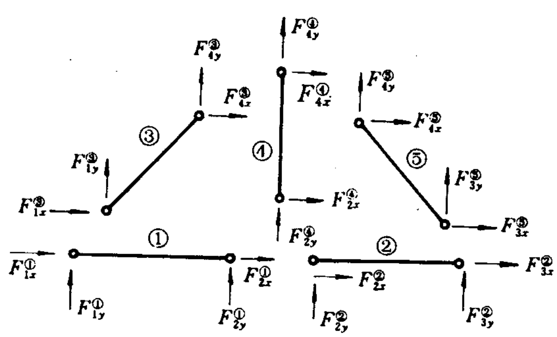


图 1.7 桁架结构的离散

对于单元③的刚度方程，由式（1-3），并将式中 i，j 替换为 1，4，可以直接写出其单元刚度方程

$$\begin{bmatrix} F_{1x}^{③} \\ F_{1y}^{③} \\ F_{4x}^{③} \\ F_{4y}^{③} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{③} & K_{12}^{③} & K_{13}^{③} & K_{14}^{③} \\ K_{21}^{③} & K_{22}^{③} & K_{23}^{③} & K_{24}^{③} \\ K_{31}^{③} & K_{32}^{③} & K_{33}^{③} & K_{34}^{③} \\ K_{41}^{③} & K_{42}^{③} & K_{43}^{③} & K_{44}^{③} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

类似上式可以写出

单元④
$$\begin{bmatrix} F_{4x}^{④} \\ F_{4y}^{④} \\ F_{2x}^{④} \\ F_{2y}^{④} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{④} & K_{12}^{④} & K_{13}^{④} & K_{14}^{④} \\ K_{21}^{④} & K_{22}^{④} & K_{23}^{④} & K_{24}^{④} \\ K_{31}^{④} & K_{32}^{④} & K_{33}^{④} & K_{34}^{④} \\ K_{41}^{④} & K_{42}^{④} & K_{43}^{④} & K_{44}^{④} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

单元⑤
$$\begin{bmatrix} F_{4x}^{⑤} \\ F_{4y}^{⑤} \\ F_{3x}^{⑤} \\ F_{3y}^{⑤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{⑤} & K_{12}^{⑤} & K_{13}^{⑤} & K_{14}^{⑤} \\ K_{21}^{⑤} & K_{22}^{⑤} & K_{23}^{⑤} & K_{24}^{⑤} \\ K_{31}^{⑤} & K_{32}^{⑤} & K_{33}^{⑤} & K_{34}^{⑤} \\ K_{41}^{⑤} & K_{42}^{⑤} & K_{43}^{⑤} & K_{44}^{⑤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

单元①和单元②的刚度方程类同，不再列出。

根据变形协调条件，即在相互连接的公共节点处，各单元的节点位移必须相等，如节点 4 处，其位移

$$u_4^{③}=u_4^{④}=u_4^{⑤}=u_4, \qquad v_4^{③}=v_4^{④}=v_4^{⑤}=v_4$$

按力的平衡条件，就是在相互连接的公共节点处，各单元的对节点的作用力与作用在该节点的外载荷必须相等，对于节点 4 有

$$\begin{aligned} P_{4x} &= F_{4x}^{③}+F_{4x}^{④}+F_{4x}^{⑤} \\ &= (K_{31}^{③}u_1+K_{32}^{③}v_1+K_{33}^{③}u_4+K_{34}^{③}v_4)+(K_{11}^{④}u_4+K_{12}^{④}v_4+K_{13}^{④}u_2+K_{14}^{④}v_2) \\ &\quad +(K_{11}^{⑤}u_4+K_{12}^{⑤}v_4+K_{13}^{⑤}u_3+K_{14}^{⑤}v_3) \\ &= K_{31}^{③}u_1+K_{32}^{③}v_1+K_{13}^{④}u_2+K_{14}^{④}v_2+K_{13}^{⑤}u_3+K_{14}^{⑤}v_3+(K_{33}^{③}+K_{11}^{④}+K_{11}^{⑤})u_4 \\ &\quad +(K_{34}^{③}+K_{12}^{④}+K_{12}^{⑤})v_4 \\ P_{4y} &= F_{4y}^{③}+F_{4y}^{④}+F_{4y}^{⑤} \\ &= K_{41}^{③}u_1+K_{42}^{③}v_1+K_{23}^{④}u_2+K_{24}^{④}v_2+K_{23}^{⑤}u_3+K_{24}^{⑤}v_3+(K_{43}^{③}+K_{21}^{④}+K_{21}^{⑤})u_4 \\ &\quad +(K_{44}^{③}+K_{22}^{④}+K_{22}^{⑤})v_4 \end{aligned}$$

用同样方法可列出其它节点处力的平衡公式。

将上面各节点总合力与各节点位移的关系写成矩阵形式

$$
\begin{bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{iy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{3y} \\ P_{4x} \\ P_{4y} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_{11}^{①}+K_{11}^{②} & K_{12}^{①}+K_{12}^{③} & K_{13}^{①} & K_{14}^{①} & 0 & 0 & K_{13}^{③} & K_{14}^{③} \\
K_{21}^{①}+K_{21}^{③} & K_{22}^{①}+K_{22}^{③} & K_{23}^{①} & K_{24}^{①} & 0 & 0 & K_{23}^{③} & K_{24}^{③} \\
K_{31}^{①} & K_{32}^{①} & K_{33}^{①}+K_{11}^{②}+K_{33}^{④} & K_{34}^{①}+K_{12}^{②}+K_{34}^{④} & K_{13}^{②} & K_{14}^{②} & K_{31}^{④} & K_{32}^{④} \\
K_{41}^{①} & K_{42}^{①} & K_{43}^{①}+K_{21}^{②}+K_{43}^{④} & K_{44}^{①}+K_{22}^{②}+K_{44}^{④} & K_{23}^{②} & K_{24}^{②} & K_{41}^{④} & K_{42}^{④} \\
0 & 0 & K_{31}^{②} & K_{32}^{②} & K_{33}^{②}+K_{33}^{⑤} & K_{34}^{②}+K_{34}^{⑤} & K_{31}^{⑤} & K_{32}^{⑤} \\
0 & 0 & K_{41}^{②} & K_{42}^{②} & K_{43}^{②}+K_{43}^{⑤} & K_{44}^{②}+K_{44}^{⑤} & K_{41}^{⑤} & K_{42}^{⑤} \\
K_{31}^{③} & K_{32}^{③} & K_{13}^{④} & K_{14}^{④} & K_{13}^{⑤} & K_{14}^{⑤} & K_{33}^{③}+K_{11}^{④}+K_{11}^{⑤} & K_{34}^{③}+K_{12}^{④}+K_{12}^{⑤} \\
K_{41}^{③} & K_{42}^{③} & K_{23}^{④} & K_{24}^{④} & K_{23}^{⑤} & K_{24}^{⑤} & K_{43}^{③}+K_{21}^{④}+K_{21}^{⑤} & K_{44}^{③}+K_{22}^{④}+K_{22}^{⑤}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
$$

或简写成

$$R=K\delta \tag{1-5}$$

式中 K 为结构总体刚度矩阵，R 称结构总体载荷列阵，其中 Q_{1x}，Q_{1y}，Q_{3y}是支承反力，P_{4x}和 P_{4y}为作用在结构上的外载荷。

式（1－5）为结构总体刚度方程，对于 n 个节点的结构，有 $2n$ 个节点位移分量，便有 $2n$ 个方程。

应当指出，根据力的平衡条件

$$\Sigma F_x=0, \qquad \Sigma F_y=0, \qquad \Sigma M=0$$

在上述方程组中，包含有 3 个线性相关的方程，即它们不完全是独立的，因此其解有无穷多个，不可能得出唯一的解。从物理意义上解释，由于所研究的桁架未给予约束，可以产生刚体位移，致使节点位移分量值得不出唯一的解。在具体结构上，由于支座限制了刚体位移，即 $u_1=v_1=v_3=0$，将其代入方程，这样，8 个方程保存了 5 个方程，便可解出其余 5 个节点位移分量，进而求出各个杆单元的轴向伸长量，最后得出各杆的应变和应力。

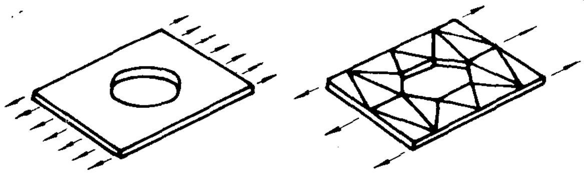
1.3.3 连续体的刚度矩阵

以上用杆系的矩阵分析法（实质上就是有限元法用于分析杆系结构）明确表达了杆系结构的单元刚度矩阵和结构总体刚度矩阵的物理概念，下面通过用有限元法分析弹性平面问题，进一步阐述连续体的刚度矩阵概念。

设有一个带孔的矩阵薄板，两端承受均布拉力（图 1.8（a）），当用有限元分析时，将它离散成在 n 个节点处相连接的有限个三角形单元的组合体（图 1.8（b）），从中任取 1 个单元表示为图 1.9，令其 3 个节点为 i，j，m，单元节点位移为 $\delta^e=[u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$，节点力为 $F^e=[F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{jx} \quad F_{jy} \quad F_{mx} \quad F_{my}]^T$（图 1.9）。

如同杆系结构一样，首先建立单元节点位移与节点力分量之间的关系式，即单元刚度方程。在这里仍用类似杆单元刚度元素的定义，所不同的是杆单元有 2 个节点，4 个自由度，而三角形单元有 3 个节点，6 个自由度。

当 $u_i=1$，其它节点位移分量为零，即 $v_i=u_j=v_j=u_m=v_m=0$，这相当于在节点 i 处安置了一个只允许产生水平方向位移的连杆铰支座，在节点 j，m处分别安置了固定铰支座



(a)　　(b)

图 1.8　带孔的矩形板

(图 1.10 (a)，若假设三角形单元内各点的位移按线性变化，单元的变形情况如图中虚线所示，那末抵抗 u_i 变形的各节点力分量（即刚度）为

$$\begin{cases} F_{ix}=K_{ix,ix}, & F_{iy}=K_{iy,ix} \\ F_{jx}=K_{jx,ix}, & F_{jy}=K_{jy,ix} \\ F_{mx}=K_{mx,ix}, & F_{my}=K_{my,ix} \end{cases}$$

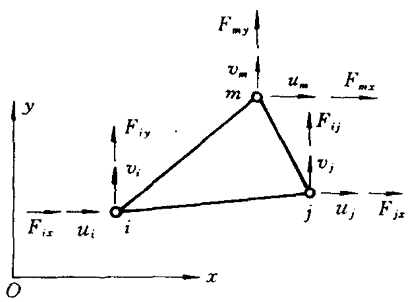


图 1.9　三角形平面单元

同样方法，当 $v_j=1$，$u_i=v_i=u_j=u_m=v_m=0$ 时，如图 1.10 (b) 所示，抵抗 v_j 变形的节点力分量为

$$\begin{cases} F_{ix}=K_{ix,jy}, & F_{iy}=K_{iy,jy} \\ F_{jx}=K_{jx,jy}, & F_{jy}=K_{jy,jy} \\ F_{mx}=K_{mx,jy}, & F_{my}=K_{my,jy} \end{cases}$$

其它依此类推。

若各节点位移分量同时存在，则各节点力分量为各个位移分量所产生的节点力分量的线

性叠加，即

$$
\begin{cases}
F_{ix}=K_{ix,ix}u_i+K_{ix,iy}v_i+K_{ix,jx}u_j+K_{ix,jy}v_j+K_{ix,mx}u_m+K_{ix,my}v_m \\
F_{iy}=K_{iy,ix}u_i+K_{iy,iy}v_i+K_{iy,jx}u_j+K_{iy,jy}v_j+K_{iy,mx}u_m+K_{iy,my}v_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{my}=K_{my,ix}u_i+K_{my,iy}v_i+K_{my,jx}u_j+K_{my,jy}v_j+K_{my,mx}u_m+K_{my,my}v_m
\end{cases}
$$

将上式写成矩阵形式，并把单元刚度元素的下标 ix，iy，jx，jy，mx 及 my 分别替换成 1，2，3，4，5 及 6，则有

$$
\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{my} \\ F_{my} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\
K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}
\tag{1-6}
$$

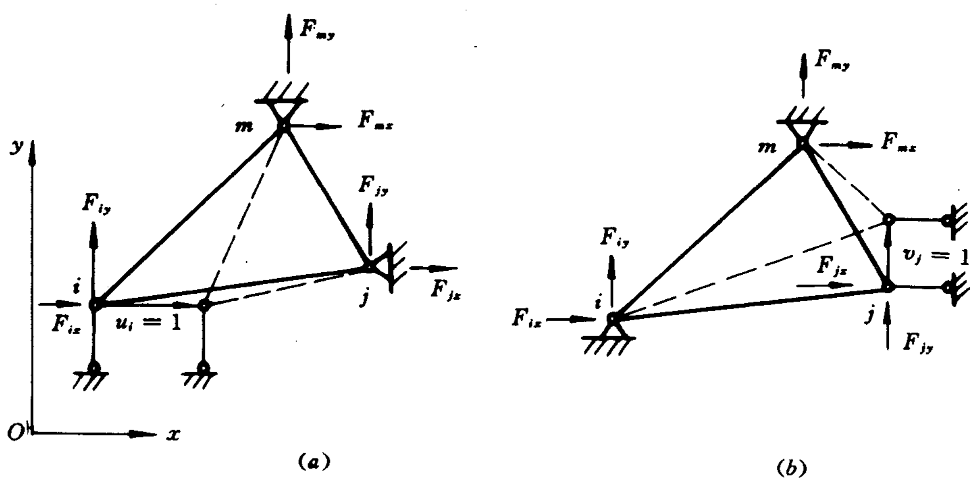


图 1.10　三角形单元单位位移及其产生的力分量

从以上分析可以看出，三角形单元刚度矩阵的物理意义即是单元抵抗变形的能力。与杆单元刚度矩阵不同的是当存在一个单位位移时，所产生的节点力分量不是 4 个，而是 6 个。单元内任一个节点力分量的数值，也都是单元内所有节点位移分量影响的结果。三角形单元有 3 个节点，6 个节点位移分量，因此单元刚度矩阵共有 36 个元素，其值用材料力学的公式是无法求出的，需利用能量原理求得。

在建立单元刚度矩阵以后，通过适当方法，将单元刚度矩阵叠加形成结构总体刚度矩阵，这部分内容详见第二章。

思考题

1. 有限元法的含义是什么？用有限元位移法分析结构时有哪些基本步骤？
2. 用有限元法分析结构时，与有限差分法有什么区别和特点。
3. 何谓结构离散化？用有限元法离散杆系结构与离散连续体结构有什么区别？
4. 指出以下单元划分中（见图 1.11）不合理的地方。

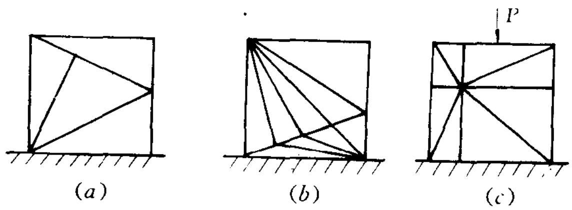


图 1.11

5. 试说明单元刚度矩阵的物理意义，并比较弹簧单向拉伸刚度、杆单元刚度矩阵及三角形单元刚度矩阵的异同点。