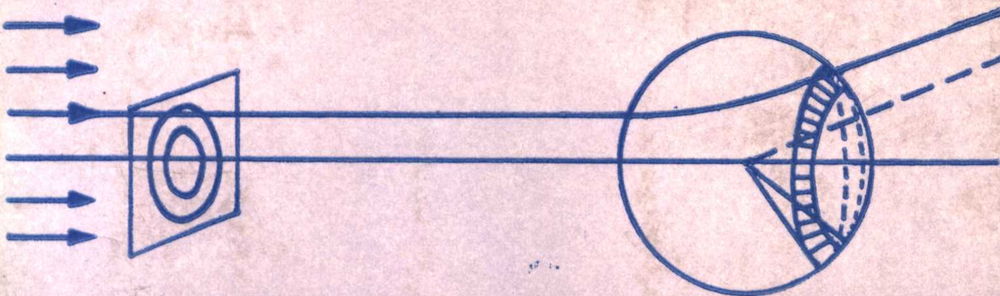
刘书振　杭桂生　主编



理论力学

河南大学出版社

LILUNLIXUE

理 论 力 学

刘书振　杭桂生　主编

诸庭飞　倪泽林
丁尧坚　陈书勤　编

河南大学出版社

内 容 提 要

本书是编者根据1980年原教育部制定的高等师范院校《理论力学》教学大纲和多年来的教学实践编写而成的。它的内容包括：质点力学，质点系力学，刚体力学，相对运动和分析力学五章。为适合教学，每章都挑选有一定数量的例题和习题，书末附有习题答案。

本书采用1988年全国自然科学名词审定委员会审定公布的物理学名词。

本书可作为高等师范院校物理专业教材，也可作为综合大学的教材或参考书，还可供高等函授及其他有关专业师生参考。

理 论 力 学

主编 刘书振 杭桂生

责任编辑 姜伟林

河南大学出版社出版

（开封市明伦街85号）

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32 印张：9.5 字数：238千字

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数：1—4000 定价：2.45元

ISBN7-81018-428-8/O·20

序　　言

理论力学是物理类专业的一门重要理论课程．一方面，它为各门理论物理以及其他后继课程提供坚实基础；另一方面，对于培养学生严密科学思维，运用数学手段深入研究物理问题的能力，理论力学也起着独特的重要作用．刘书振、杭桂生等同志总结多年教学经验，编写出这本《理论力学》教本．他们在编写中充分考虑后行课的需要，加强基本理论的阐述和分析问题的方法，并注意使书的篇幅与教学时数相适应．我以为他们作了一件很有意义的工作，因而不揣谫陋，写了上面几句话以表祝贺．

梁昆淼

1988年10月

DHA10/05

编 者 的 话

本书是按照1980年高等学校理科物理教材编审委员会审定的高等师范院校物理专业理论力学教学大纲的要求，在总结我们多年的教学经验的基础上编写而成的．在编写中，引入了有效势的概念，增加了静力学的内容，适当加强了线性代数的应用，将相对运动、各种非惯性系的问题相对集中，分析力学从变分原理入手．尽可能使课程内容既简明扼要，又易于理解，且和教学时数相适应．

书稿的第一章由杭桂生执笔，第二章由诸庭飞执笔，第三章由倪泽林、丁尧坚执笔，第四章、第五章由陈书勤、刘书振执笔，全书由刘书振、杭桂生通稿，在通稿过程中，陈书勤作了许多工作．杭桂生、刘书振绘制了本书插图．

该书初稿完成后，承南京大学梁昆淼教授仔细审阅了全稿，并提出了许多宝贵的修改意见，编者对此表示衷心的感谢，并根据梁昆淼教授提出的意见，作了全面的修改．但由于编者的水平所限书中仍会有不少的缺点和错误，恳请广大教师和读者批评指正．

编　者

1989年1月

目　录

第一章 质点力学

§1.1 质点运动学

我们在学习普通物理力学时已经知道，当所研究的物体的大小远小于有关距离，并且问题不涉及物体各部分运动的差别时，就可以把真实的物体抽象化为具有一定质量的几何点，即**质点**．在所有的情况下，一切物体或物体系统都可以看作是质点的集合，因此，研究力学总是从质点开始．

质点运动学研究如何描述质点的运动，以及描述运动的物理量之间的关系．这涉及质点在不同时刻的**位置**、**速度**、**加速度**以及质点的运动**轨道**，但不涉及质点的质量及其所受的外力，因而也可以把这部分内容称作"点"的运动学．

一、参考系和坐标系

宇宙间的万物都处于永不停息的运动之中，这就是说运动具有绝对性，而静止是相对的．物体的位置只能相对地确定，因此，要描述物体的运动，就必须先选定一个刚性的物体(或物体系统)作标准，然后借助于这个物体来描述其他物体的运动．我们把与标准物体相固连的整个空间称为**参考系**．运动的描述有赖于参考系的选择，或者说运动的描述具有相对性．

我们在讨论地球上物体的运动时，常选地球为参考系；在讨论行星的公转运动时，则可选取由日心引向一些恒星的直线所构成的标架为参考系．从运动学的角度来看，任何参考系都是等价的，虽然对具体运动的描述在方便程度上可能不一，但本质上并无优劣之分．

一个几何点不足以构成参考系，因为相对于一个点只能给出物体离参考点的距离，而不能说明物体所处的方位.

为了定量地描述物体的运动，还需要在参考系上建立**坐标系**. 在同一参考系中可以建立各种不同的坐标系. 例如，描述质点在空间的运动常采用**直角坐标系**、**柱面坐标系**、**球面坐标系**或**自然坐标系**；在平面问题中则常用**平面直角坐标系**、**平面极坐标系**或**自然坐标系**.

描述运动离不开**空间**和**时间**. 现代物理学已经证实，空间、时间与运动的物质之间是相互关联的、不可分割的. 但在经典力学的范畴内，对于空间和时间的理解仍是基于牛顿的绝对时空观，即认为空间是连续的、均匀的、各向同性的，并且在一切方向上都具有无限的广延性；时间也是连续的、均匀的，是单向的流逝；空间和时间彼此独立，并且也不依赖于物质的运动.

二、运动学方程和轨道

在参考系中取一固定点O作为原点，由原点引向质点P的矢量$\boldsymbol{r}$便可以用来表示该质点在空间的位置. $\boldsymbol{r}$称为质点的**位置矢量**(图1－1)，简称**位矢**. 如果以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别表示直角坐标系$x, y, z$轴上的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \quad (1.1.1)$$

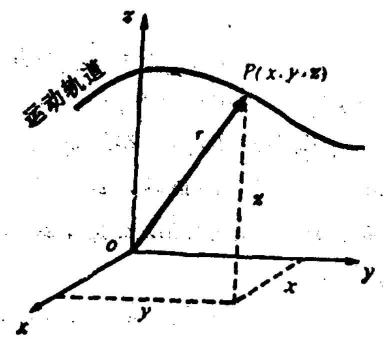


图1-1

运动质点在空间的位置随时间连续地变化着，因此$\boldsymbol{r}$应是时间t的单值连续的矢量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \quad (1.1.2)$$

用直角坐标系中的分量式来表示，则为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t). \tag{1.1.3}$$

(1.1.2) 或 (1.1.3)式给出了任意时刻质点在空间的位置，或者说它们描述了质点的运动规律，故称为质点的**运动学方程**.

如果质点在一确定的平面上运动，则运动学方程的直角坐标形式可写为

$$x=x(t),\ y=y(t). \tag{1.1.4}$$

也可以利用平面极坐标(图 1－2)表示为

$$r=r(t),\ \theta=\theta(t). \tag{1.1.5}$$

上式中 r 为**径矢**，即 P 点位矢 $\boldsymbol{r}$ 的量值；θ 为**极角**，由极轴沿逆时方向量度.

当 t 连续变化时，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的矢端在空间所画出的曲线称为质点运动的轨道(见图1-1). 从方程组(1.1.3)、(1.1.4) 或 (1.1.5)中消去 t，就得到质点运动的**轨道方程**. (1.1.3)、(1.1.4) 和 (1.1.5)本身则可看作为轨道的参量方程，这里参量就是 t.

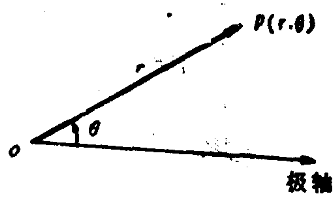


图1-2

对于平面问题，我们由(1.1.4) 和 (1.1.5)式可以分别得到平面直角坐标系和平面极坐标系中的轨道方程

$$y=y(x), \tag{1.1.6}$$

及

$$r=r(\theta). \tag{1.1.7}$$

它们都代表了一条平面曲线. 对于空间问题，则可由(1.1.3)式消去 t，得到一个方程组

$$\left.\begin{aligned} f_1(y,\ z)=0,\\ f_2(z,\ x)=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.8}$$

(1.1.8)式中的两个方程分别表示母线与 x 轴和 y 轴平行的两个

柱面；整个方程组则给出了两个柱面相交而成的一条空间曲线. 当然也能得到与(1.1.8)式完全等价的另外两组方程

$$\begin{cases}f_2(z,x)=0,\\ f_3(x,y)=0.\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}f_1(y,z)=0,\\ f_3(x,y)=0.\end{cases}$$

三、位移、速度和加速度

若运动质点在时刻 t 位于 P 点，Δt 时间后沿轨道曲线运动到 Q 点，这两个时刻的位矢分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$，则

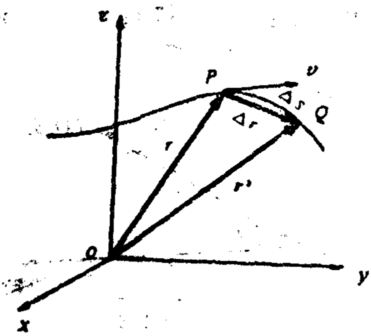


图1-3

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$$

就称为质点在 Δt 时间内所发生的**位移**(图 1－3). 位移是个矢量，而质点在 Δt 内所通过的**路程**则应由质点沿轨道实际运动的弧长 $\Delta s=\widehat{PQ}$ 来量度. 不难看出，在一般情况下路程与位移的量值不等，甚至可以相差很大.

我们把极限

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.9}$$

称为质点在 t 时刻的**瞬时速度**，简称**速度**. 它表征了位矢的时间变化率. 按定义，速度也是一个矢量，其方向沿轨道上 P 点的切线方向(图 1－3)，其量值

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.10}$$

称为**速率**. 上式中 $\mathrm{d}s$ 是与元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 所对应的一段元弧的大小. 前面已经提到，一般 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，但在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.

一般情况下速度仍是时间的函数．速度随时间的变化率称为**瞬时加速度**，简称**加速度**，以 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.1.11}$$

加速度也是矢量，方向与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向相同．在一般情况下，加速度也是时间的函数．

四、速度、加速度的分量表示

速度和加速度的定义式(1.1.9) 和 (1.1.11) 是以矢量形式给出的．这种表述形式不依赖于坐标系的选择，因此在一般性理论推导中常被采用．但在具体问题中，则往往要选定合适的坐标系，把这些矢量分解为相应的分量，才有利于求解具体结果．

1．直角坐标系

在直角坐标系中，单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 不随时间变化，根据速度的定义及(1.1.1)式知

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$$

$$=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}. \tag{1.1.12}$$

这里 $v_x=\dot{x}, v_y=\dot{y}, v_z=\dot{z}$ 分别为速度在 x, y, z 轴上的分量．速度的大小则为

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}. \tag{1.1.13}$$

同样，由加速度的定义可知

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.1.14}$$

［例1］ 椭圆规的曲柄 OC 可绕 O 轴转动，C 点为杆 AB 的中点，A，B 两点分别在相互垂直的导槽中运动(图1－4)．试求 AB 上任一点 M 的轨迹．已知 $AB=2l$, $OC=l$, $CM=a$, 角度 $\varphi=\omega t$,

其中 ω 为常量.

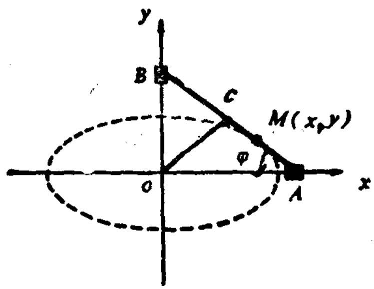


图1-4

［解］ 取直角坐标 Oxy 如图. 因为 $\triangle OCB$ 为等腰三角形，于是可写出 M 点的坐标为

$$x=(l+a)\cos\varphi,$$
$$y=(l-a)\sin\varphi.$$

将 $\varphi=\omega t$ 代入上两式，即得 M 点的运动方程

$$\left.\begin{aligned} x&=(l+a)\cos\omega t,\\ y&=(l-a)\sin\omega t.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由上面两式消去 t，便得到轨道方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1. \tag{2}$$

（2）式表明，M 点的轨道为一椭圆，其半长轴和半短轴分别为 $(l+a)$ 和 $(l-a)$. AB 及其延长线上除了 A,B,C 三点外，其余各点的运动皆为椭圆，因此这一机构称为椭圆规.

2. 平面极坐标系和柱坐标系

在讨论速度和加速度在平面极坐标系中的分量表示式之前，有必要先介绍一下有关单位矢量求导的知识.

设有一常模矢量 $\boldsymbol{A}$ 为某标量参量 a 的函数，则其导数 $\frac{d\boldsymbol{A}}{da}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相互垂直. 现证明如下：

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{da}=\frac{1}{2}\frac{d}{da}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d(A^2)}{da}.$$

因 A^2 为一常量，所以 $\frac{d(A^2)}{dt}=0$.

于是 $$A\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}=0;$$

即证得 A 与$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}$必相互垂直.

在平面极坐标系中，我们所取的单位矢量一个是沿位矢方向的 e_r; 另一个是 e_θ，它与位矢相垂直并指向极角 θ 增加的方向(图1-5)．显然，e_r 和 e_θ 都是 θ 的函数，并且其模恒为 1，根据上面所

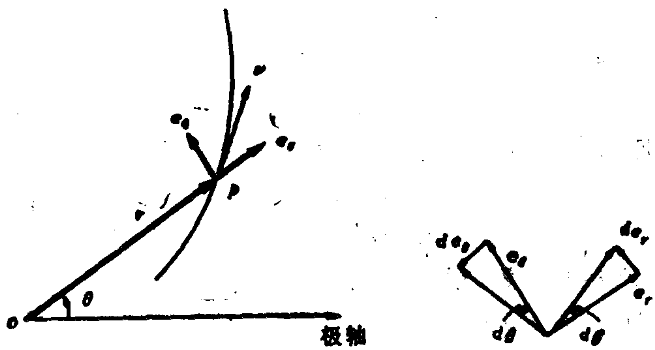


图1-5

证的结论，有 $\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}\theta}\perp e_r$ 和 $\frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta}\perp e_\theta$．由图 1-5 不难看出：$|\mathrm{d}e_r|=|\mathrm{d}e_\theta|=\mathrm{d}\theta$，故有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}\theta}&=e_\theta,\\ \frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta}&=-e_r.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.15}$$

于是可求得 e_r 和 e_θ 对时间 t 的导数

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}\theta}\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}e_\theta=\omega\times e_r,\\ \frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta}\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}e_r=\omega\times e_\theta.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.16}$$

式中$\boldsymbol{\omega}$为两个单位矢量旋转的角速度矢量，其方向规定由右手螺旋定则确定. 顺便指出，(1.1.16) 式的结论对于任意常模矢量也是适用的，即任意常模矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的导数，等于该矢量的旋转角速度与它本身的矢积.

在平面极坐标系中，位矢可以表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r. \tag{1.1.17}$$

根据以上得到的单位矢量求导的关系式及速度的定义，我们有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r.$$

将(1.1.16)式代入上式即得

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{1.1.18}$$

我们把速度在平面极坐标系中的两个分量

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.19}$$

分别称为径向速度和横向速度.

根据加速度的定义，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r. \end{aligned}$$

上式中第一、二两项分别起因于径向速度的量值和方向的改变；第三、四两项为横向速度量值改变的贡献；第五项则来源于横向速度方向的改变. 整理上式，即得平面极坐标系中加速度的表达式

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta. \tag{1.1.20}$$

加速度的径向分量和横向分量分别为

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}). \end{aligned}\right\} \tag{1.1.21}$$

[例2] 已知一质点在平面上运动，其运动方程为 $r = ut$，$\theta = \omega t$. 式中 u 和 ω 均为常量. 求该质点的运动轨道、速度和加速度.