试验分析与设计

SHI YAN FEN XI YU SHE JI

● 陈兆能　邱泽麟　余经洪　编著

● 上海交通大学出版社

试验分析与设计

陈兆能　邱泽麟　余经洪　编

上海交通大学出版社

（沪）新登字205号

内容简介

本书论述工程试验的分析与设计，内容包括有总体参数的评估、比较和检验；总体的非参数检验和分布函数检验；回归、方差分析；因素试验；加速寿命试验；序贯试验；正交试验等。

本书密切结合工程实际，内容丰富，论述清晰，每节都有应用实例说明。

本书可作为高等院校工科类专业研究生、本科生、专修班的教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

试验分析与设计
出　版：上海交通大学出版社
（淮海中路1984弄19号）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：江苏太仓印刷厂
开　本：850×1168(毫米)1/32
印　张：10.625
字　数：270000
版　次：1991年11月　第1版
印　次：1991年12月　第1次
印　数：1—2350
科　目：261—299
ISBN 7—313—00976—3/N·94
定价：3.15元

前　言

实践出真知，理论需要试验去验证。一个好的科学试验就是要花最少的时间，最少的人力和物力去获得所需的可靠数据和信息。因此，一个好的科学试验必须要正确地进行分析与设计。

本书是根据中国造船公司制定的液压专业“七五”教材规划中有关研究生课程的教学基本要求，在上海交通大学机械系多年研究生教学的基础上编写的。全书共分十章，前两章为基本知识，第三、四、五、八、十章是本书的重点。

本书注重工程实际应用，强调理论联系实际，学以致用。书中实例丰富，不同于一般的数学专著。

本书可作为高等院校工科类专业研究生、本科生、专修班的教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

本书由上海交通大学陈兆能、邱泽麟、余经洪编写，陈兆能教授任主编。哈尔滨工业大学的许耀铭教授担任了本书的主审，并提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者才疏学浅，加之时间仓促，错误和不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

一九九一年三月

目　录

第一章 统计方法概述

任何产品、任何零件都不可能是绝对相同的，无论是它们的尺寸、强度、成份以及其他性能，差别即使很小也总是存在。因为差别存在，所以就不能简单地取一个样本(个体)作试验，并把试验结论应用于总体(全体)。样本数越多，结论越全面、正确。但由于经济和现实条件的限制，工程试验的样本数不可能很多。因此如何在总体中取小的样本数？如何从样本中获取关于总体的有效结论？这都需要借助于正确的统计方法。

§1-1 总体与样本

一、总 体

直观地说，人们所研究的对象的全体叫总体。而组成总体的每个单元叫个体。一整批型材的强度的全体是一个总体，而每根型材的强度则是一个个体。组成总体的个体都不可能是完全相同的。

任何一个总体，都可用一个随机变量来描述它。总体包含的个体数可以是有限的，也可以是无限的。以整批型材强度为例，任取其中一根型材，其强度为某值的可能存在一定的概率。也可以说，该批型材中具有不同强度值的根数是按一定规律分布的。因此，型材强度是一个随机变量。这批型材的根数可以有多有少，也可以趋于无穷，但其强度的分布规律是客观存在的。

由此可见，总体就是一个具有确定概率分布的随机变量。常用大写字母 X、Y、Z 等表示。

二、样　　本

为了对总体X的分布规律进行各种必需的研究，就需要对总体进行抽样观察，根据观察结果来推断总体的性质。这种从总体X中随机抽取若干个体来观察某种数量指标的取值过程，称为抽样。从总体中抽取一个个体以作观察或试验，这个抽出的个体称为样本。样本在未观察前，它可能取某个值，也可能取另一个值。因此，样本也是一个随机变量。常用大写字母 X_i 表示。

从一个总体中，随机地抽取 n 个样本 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$，这样取得的$(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$称为总体$X$的一个子样。子样中样本的数目称为样本容量或称为样本大小。对于样本来说，一次抽取、观察的结果是 n 个具体的数据 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$，称为样本 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$的一个观测值，简称样本观测值。而样本观测值的所有可能取值的全体，称做样本空间。

为了使抽样结果能反映总体性质，即样本有反映总体特征的代表性，要求抽样观察是独立的。每次抽样的观察值互不影响；还要求样本 $X_i(i=1,2,\cdots\cdots n)$ 必须与总体有相同的分布 $F(x)$ 。

如果一个子样中每个样本 X_i 都与总体 X 有相同的分布，且相互独立，则这个子样称为简单子样。

定义 1.1　设 X 为具有分布函数 $F(x)$ 的随机变量，若 X_1, $X_2, \cdots\cdots, X_n$ 为具有相同分布函数 $F(x)$ 的相互独立的随机变量，则称$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$为来自总体 X 的简单随机样本，简称样本。它们的观察值 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 又称 X 的 n 个独立的观察值。而$(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$称为来自总体容量为 n 的一个子样。

§1-2　统计量与抽样分布

一、统　计　量

样本是总体的代表与反映，但要从分散的样本中提取有用的

信息，还必须对样本进行加工，针对不同的要求，构造不同的不含有未知参数的样本函数，这种函数称为统计量。

在实践中，人们经常用样本函数来估计总体。用样本的数字特征来估计总体的数字特征。如用样本均值$\left(\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$来估计总体的数学期望。

定义 1.2 设$(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$为总体 X 的一个子样，$g(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$为一连续函数，若$g$ 中不含任何未知参数，则称$g(X_1, X_2\cdots\cdots, X_n)$为一个统计量。

例如，X_1, X_2 是从具有分布密度为 $N(\mu, \sigma^2)$的正态分布总体中抽取的样本，其中 μ 已知，σ 未知，则 $X_1, X_2+1, \frac{1}{2}(X_1+X_2)-\mu$ 等都是统计量，但 $(X_1+X_2)/\sigma$，因为 σ 是未知量，所以不是统计量。

二、常用统计量——样本矩

1．样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i。\tag{1-1}$$

2．样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2。\tag{1-2}$$

3．样本标准差

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}。\tag{1-3}$$

4．样本极差

$$R=X_n-X_1。\tag{1-4}$$

三、抽样分布

由于统计量是样本的函数，所以统计量也是个随机变量，它应

有确定的概率分布。统计量的分布称为抽样分布。从理论上说，当总体的分布函数已知时，统计量的分布是可以得到的，但实践中并不容易。

下面介绍总体为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的几个统计量的分布。

1．若 U 是样本的任一确定的线性函数：

$$U = aX + b,$$

则随机变量 U 服从 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ 的正态分布。

2．若 Z 是 X, Y 两个相互独立，各自服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 分布的随机变量之和：

$$Z = X + Y,$$

则随机变量 Z 服从 $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的正态分布。

若 Z 为任意有限个独立正态变量之和，则 Z 服从于 $N(\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i, \sum\limits_{i=1}^{in}\sigma_i^2)$ 分布。若各独立变量具有同一分布，则 Z 的分布为 $N(n\mu, n\sigma^2)$。

3．样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 也是一个随机变量，其分布为 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 正态分布。

显然可见，样本均值 $\overline{X}$ 与总体 X 有相同的数学期望，但 $\overline{X}$ 的方差只是 X 方差的 n 分之一，即 $\overline{X}$ 的取值更向数学期望 μ 集中，n 越大，集中更甚。

4．特别需要注意的是，正态变量的非线性组合一般不服从于正态分布。

§1-3 参数估计

参数估计就是根据样本的数据来估计总体中的未知参数。解决参数估计问题的通常方式有两种：点估计和区间估计。

一、点 估 计

点估计是用一个统计量的单一数值来估计一个未知参数的数值。

常用的点估计方法有：

1. 图估法

图估法是利用概率纸作图的方式估计参数。概率纸是一种特殊刻度的坐标纸，其特殊刻度是根据某一特定分布函数制定的，不同类型的分布函数有不同的概率纸。如正态概率纸、对数概率纸、威布尔概率纸等。将观测(试验)数据在相应的概率纸上描点，然后根据点值配置直线。若直线存在，则可判定所观测的样本来自某个相应分布函数的总体，并据此作出有关参数的点估计。

例 1.1 设有一批零件，欲求其平均寿命。随机抽取 8 个样本，经试验得出其各自的失效时间 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_8$ 和相应的失效概率 $F(t_1)$，$F(t_2)\cdots\cdots F(t_8)$。将数据逐点作图在单对数概率纸上（如图 1.1)，并可配置成一条直线。由此可得出该批零件的寿命服从指数分布。根据指数分布性质，在平均寿命时 $F(t)=0.632$，与此相应的时间 t 即为平均寿命的估计值 $\hat{\mu}$。

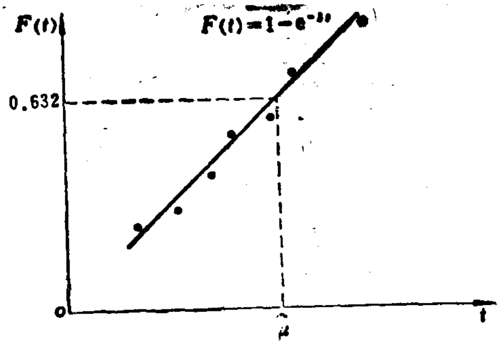

图 1.1 指数分布的图估

图估法的优点是简单、直观、容易掌握。但其精度较低，误差较大。

2. 矩法估计

矩法的基本内容就是用样本的各阶矩或中心矩来估计总体的各阶矩或中心矩。

设 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，则

样本的 k 阶矩 $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$。

样本的 k 阶中心矩 $W_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$。

矩法中常用样本均值（即样本的一阶矩）来估计总体的数学期望，用样本方差（即样本的二阶中心矩）来估计总体的方差。因此

$$\hat{E}(X) = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1-5}$$

$$\hat{D}(X) = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2。 \tag{1-6}$$

矩法的优点是不需要已知总体的分布类型，适应性强。但其精度也较低。

3. 极大似然估计

当总体的分布类型已知时，常用极大似然法来估计未知参数。

极大似然估计法的基本思想，是在待估参数 θ 的一切可能值中取出一个，以样本观察结果出现的概率为最大的值作为 θ 的估计值，此估计值 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的极大似然估计。

不论总体分布是离散型还是连续型，人们都可以找到一个函数，这个函数表示了样本观察值出现的概率。此概率在样本观察值给定的条件下是 θ 的函数，通常以 $L(\theta)$ 表示，称为似然函数。

对不同的 θ，有不同的似然函数值。为了使 $L(\theta)$ 最大，应满足 $\frac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$，由此可得到 $\hat{\theta}$ 值。

由于 $\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 是同时达到极大值的，为计算方便，常用

$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 求 $\hat{\theta}$。

当总体分布为离散型时，由于样本彼此独立，故有

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta), \tag{1-7}$$

式中 $p(x,\theta)$ 为总体分布列。

当总体分布为连续型时，则有

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta), \tag{1-8}$$

式中 $f(x,\theta)$ 为总体分布密度函数。

例 1.2　设某一元件的寿命分布服从 $\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}$ 的指数分布，试验得n个元件的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots\cdots t_n$，试求θ的极大似然估计。

解：

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}$,

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i。$$

似然方程 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}t_i=0$,

由此　$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}=T$,

式中 T 为样本寿命的平均值。

极大似然估计是针对已知的总体分布作观察结果出现概率最大的估计，因此其估计精度较高。但在应用于威布尔分布的参数估计时，由于计算复杂，使用受到一定限制。

4．最小方差线性无偏估计

估计量是一个随机变量，它一般在总体参数值的附近波动，而不是总体参数的真实值。无偏估计就是要求估计量 $\hat{\theta}$ 围绕被估计

参数变化，而不是偏离一侧。即要求 $\hat{\theta}$ 的数学期望等于未知参数 θ 的真值 $E(\hat{\theta})=\theta$。

例 1.3　设 X_1，X_2，……，X_n 为来自数学期望 μ，方差 σ^2 总体的各样本，试问 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是否是 μ 和 σ^2 的无偏估计量。

解：

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}[E(X_1)+\cdots\cdots+E(X_n)]=E(X)=\mu。$$

可见，$\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计。

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$-2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2\Big]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$-2n(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{n}-\frac{\mu}{n}\right)+n(\overline{X}-\mu)^2\Big]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n(\overline{X}-\mu)^2+n(\overline{X}-\mu)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\overline{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}[n\sigma^2 - nD(\overline{X})]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$= \sigma^2。$$

可见，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计，而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是 σ^2 的有偏估计。只有当 n 值较大时，两者才比较接近。

参数估计除了要求无偏性外，还常希望 $\hat{\theta}$ 在 θ 值附近波动的幅值要小，即 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$ 要小。

最小方差线性无偏估计的基本出发点就是要满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 和 $D(\hat{\theta}) \leqslant D(\hat{\theta})$。这里 $\hat{\theta}$ 是 θ 的任意一个无偏估计。

最小方差线性无偏估计方法的数学推论，可参见有关数理统计书籍，这里不作赘述。常用的方法是利用现有的系数表进行查表计算（表格见《可靠性试验用表》，国防工业出版社，1979年）。

例 1.4　设某产品的寿命服从对数正态分布，随机抽样 9 个产品进行试验，试验到有 6 个产品失效时停止。观察到的失效时间为 8,23,38,80,115，200 (h)。试求总体分布参数 μ 和 σ 的最小方差线性无偏估计

解：本题中样本数 $n=9$，截尾数 $r=6$，再根据失效时间 t_j，$j=1,2,\cdots\cdots r$，可从附表十五查得系数 $D(n,r,j)$ 和 $C(n,r,j)$。整个计算过程可在下面表 1.1 中完成。

由表可得

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{r} D(n,r,j)\ln t_j = 2.0811,$$

$$\hat{\sigma} = \sum_{j=1}^{r} C(n,r,j)\ln t_j = 0.7938。$$

需要说明的是，对于不同的分布类型，它的系数表也不同。此