# 工科大学数学教程(Ⅱ)

## 上 册

戚振开 主编
郑宝东 张宗达 副主编

哈尔滨工业大学出版社

# 工科大学数学教程(Ⅱ)

## (上册)

戚振开 主 编
郑宝东
张宗达 副主编



哈尔滨工业大学出版社

### 内 容 简 介

本书是以国家教委1995年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求为纲，针对培养21世纪工程技术人才的需要，吸取我校多年教学经验而编写的系列课程教材。

工科大学数学教程包括：微积分，空间解析几何与线性代数，常微分方程，计算方法，概率与统计。

工科大学数学教程（I）（上册）共九章，主要内容有：行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值和特征向量及相似矩阵、实二次型、线性空间与线性变换、空间解析几何、微分方程。每章后均配有一定数量的习题。

本书可作为工科大学本科生数学课教材，也可作为准备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

**工科大学数学教程（I）（上册）**

Gongke Daxue Shuxue Jiaocheng

戚振开　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 16　字数 366 千字

1996年9月第1版　1996年9月第1次印刷

印数　1—8 060

ISBN 7-5603-1169-5/O·79　定价：18.00元

# 前　言

本教程是参照国家教委1995年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和1997年研究生入学考试大纲而编写的。在编写过程中，充分考虑了培养21世纪工程技术人才对数学的要求和国家教委关于系列课程改革的精神，并吸取了我校多年来数学教学改革的经验，编写成了这套系列数学教材——《工科大学数学教程》。

本教程的编写力求做到具有以下特色：

1. 把过去的几门课程内容融汇在一起，有机地结合，但又保持一定的独立性，构成一个系列课程教材。这样，既保证了提高教学质量，又压缩了教学时数。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确简洁、透彻深入。取材上，精选内容，突出重点，强调应用。

3. 以附录形式开了一些新知识窗口，以开阔学生视野，为进一步学习提供初步基础。

4. 例题与习题都很丰富，若干章节之后还有综合性的例题，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题、解决问题的能力。

本教程分为Ⅰ、Ⅱ两个系列，每个系列分上、下两册。教程Ⅰ、Ⅱ可在大学一年级同时并行讲授，计280学时左右，其中Ⅰ上册76学时，Ⅱ上册64学时；Ⅰ下册70学时，Ⅱ下册70学时。教程中带*号的部分可供不同专业选学，教师可选讲一部分例题，留一部分例题供学生自学，一些章节后的附录仅供学生参考。

哈尔滨工业大学数学系的富景隆、全永洙、杨克劭、曹彬、崔明根五位教授分别审阅了全教程的各部分内容，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心地感谢。由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

**哈尔滨工业大学《工科大学数学教程》编委会**

1996年6月

# 目　录

# 第一章　$n$ 阶行列式

在工程技术和科学研究中，有很多问题需要用到“行列式”这个数学工具，本章主要讨论如下几个问题：

1. 行列式的定义；
2. 行列式的性质；
3. 行列式的计算；
4. 克莱姆(Cramer)法则。

## 1.1　$n$ 阶行列式

### 1.1.1　全排列的逆序数、对换

如果数集 $F$ 包含数 0 和 1，并且 $F$ 中任何两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍在 $F$ 中，那么，就称 $F$ 是一个**数域**。

容易验证，全体有理数之集 $Q$，全体实数之集 $R$，全体复数之集 $C$ 都是数域。这是三个最常用的数域，分别称之为**有理数域**，**实数域**和**复数域**。

线性代数中的许多问题都与数域有关，所以必须弄清此时是在什么数域上考虑问题的。如无特别声明，本书均在实数域上考虑问题。

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，首先介绍全排列的“逆序数”及其“对换”。

把 $n$ 个不同的元素排成一列，叫做这 $n$ 个元素的**全排列**(简称**排列**)。$n$ 个不同元素的排列共有 $n!$ 种。例如，自然数 1,2,3 的排列共有六种：

1 2 3，　1 3 2，　2 1 3，　2 3 1，　3 1 2，　3 2 1.

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 $n$ 个不同的元素的代表。用 $p_i$ 表示这 $n$ 个数中的一个($i=1,2,\cdots,n$)，且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 便是由 1 至 $n$ 的一种排列。对此排列，我们把排在 $p_i$ 前面且比 $p_i$ 大的数的个数 $t_i$ 称为 $p_i$ 的**逆序数**，把这排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

称为这个排列的**逆序数**。记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$。

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。显然，排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，故它是一偶排列。今后，称此排列为**自然排列**。

**例 1**　求排列 23514 的逆序数。

**解** 在排列 23514 中,2 的逆序数是 0;3 的逆序数是 0;5 的逆序数是 0;1 的逆序数是 3;4 的逆序数是 1,故排列 23514 的逆序数

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

在一个排列中,将某两个数的位置对调(其它数不动)的变动叫做一个对换。两个相邻数的对换称为相邻对换。

**定理 1.1** 一个排列中的任意两个数对换后,排列改变奇偶性。

**证** 先证相邻对换的情形。

设排列 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$,对换 $a$ 与 $b$ 后排列变为 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$. 显然,经过此对换后,$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数并不改变,而 $a,b$ 两数的逆序数变为:当 $a<b$ 时,$a$ 的逆序数增加 1,而 $b$ 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,$a$ 的逆序数不变,而 $b$ 的逆序数减少 1. 所以,排列 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$,与 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

对排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 做 $m$ 次相邻对换,调成 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n$,再做 $m+1$ 次相邻对换,调成 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$. 总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,可以把排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$,所以,这两个排列的奇偶性相反。

□

### 1.1.2 $n$ 阶行列式的定义

首先来看二、三阶行列式。称形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的符号为二阶行列式,二阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$为数,$a_{ij}$的两个下标 $i$ 与 $j$ 分别表示 $a_{ij}$所在的行与列的序数(表内横排称行,纵排叫列)。

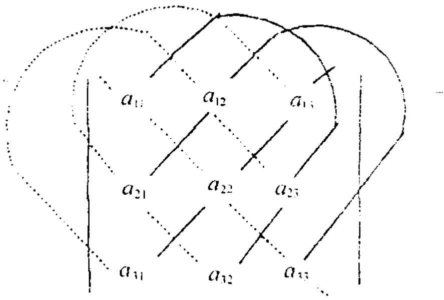
例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-5\times(-1)=11.$$

类似地,称形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的符号为三阶行列式。三阶行列式的展开式为




$$\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}\tag{1}$$

例如

$$\begin{vmatrix}3&0&4\\1&1&2\\2&1&0\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=3\times1\times0+0\times2\times2+4\times1\times1-3\times2\times1-0\times1\times0-4\times1\times2\\&=-10\end{aligned}$$

利用行列式，可以把线性方程组的解表达成简洁的形式。例如

设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\x_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0.$$

又设

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{12}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

由三阶行列式的定义容易看出：

1.(1)式等号后的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。这些乘积都可写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中第一个下标排成自然排列 123，而第二个下标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的排列，这样的排列共有 3! 种，恰好与(1)式等号后的 6 项对应。

2. 各项的正负号与其第二个下标的排列有关。取正号时，对应的排列分别是 123，

312,231,它们都是偶排列;取负号时,对应的排列分别是132,213,321,它们都是奇排列。

至此,可将行列式的概念推广到$n$阶。

**定义 1.1** 设$n^2$个数,排成$n$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{2}$$

其中$a_{ij}$是第$i$行第$j$列的数(称为元素)。每取由1至$n$的一个排列$p_1p_2\cdots p_n$,便做$n$个元素$a_{1p},a_{2p},\cdots,a_{np_n}$的乘积,并冠以符号$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$,而得到一项

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

这样的项共有$n!$个。称这$n!$项的和为与(2)式中数表相对应的$n$阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中“$\sum$”是对所有$n$阶排列$p_1p_2p_3\cdots p_n$取和。也可把行列式简记作$\triangle(a_{ij})$.

因此,数表(2)式所对应的行列式是$n!$项的代数和。这些项是一切可能的取自(2)式的不同行,不同列的$n$个元素的乘积。其一般项为$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,当$p_1p_2\cdots p_n$是个奇排列时,此项取负号;当$p_1,p_2,\cdots,p_n$是个偶排列时,此项取正号。

由定义可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

这与前面的定义是一致的。

当$n=1$时,一阶行列式$|a|=a$,不要与绝对值记号混淆。

显然,若行列式$D$的某行(列)的元素全是零,则一般项$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$,故此行列式的值为零。

**例 2** 证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

**证** 这是一个四阶行列式,在展开式中应有$4!=24$项。但在每项乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$中,只要有一个元素等于零,乘积就是零,所以只需计算乘积中不出现零的项。由于第4行除了$a_{44}$外都是0,故只须考虑$p_4=4$,第3行中除了$a_{33}$,$a_{34}$外都是0,现已取$p_4=4$,故必须

取 $p_3=3$。同理，只能取 $p_2=2, p_1=1$. 于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而 1234 的逆序数是 0，所以这一项所带的符号是正的。因此，该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. □

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种主对角线(从左上角到右下角这条线)以下(上)的元素都是 0 的行列式，叫做上(下)三角行列式。类似地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{t(n,n-1,\cdots,2,1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

我们定义的行列式中的元素是数，事实上可以将其推广成元素是某些其它数学对象的情形。例如，可以同样地定义元素是多项式的行列式。

## 1.2 $n$ 阶行列式的性质

$n$ 阶行列式的转置，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $D'$ 是这样得到的：把 $D$ 中第 $i$ 行记为 $D'$ 的第 $i$ 列。这就是说 $D'$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列处的元素恰为 $D$ 的第 $j$ 行第 $i$ 列处的元素。

称 $D'$ 为行列式 $D$ 的转置行列式。

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等。

我们将在性质 6 的后边证明性质 1. 由性质 1 可知，对于行列式而言，关于“行”成立的性质，对于“列”也同样成立，反之亦然。

**性质 2** 互换行列式的两行(列)，行列式变号。

**证** 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $D_1$ 是交换 $D$ 的 $i,j$ 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；而 $b_{jp}=a_{ip}, b_{ip}=a_{jp}$. 于是(不妨设 $i<j$)

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1}b_{2p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，由定理 1.1 知

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)},$$

故 $\quad D_1=-\sum (-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$ □

**推论 1** 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为 0.

**性质 3** 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 $k$，等于用数 $k$ 乘此行列式。

这相当于，行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

**推论 2** 行列式中如果有两行(列)的元素成比例，则此行列式为 0.

**性质 4** 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和。

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

后两个行列式的 $i$ 列恰是 $D$ 的第 $i$ 列分成的，而它们其余的列全与 $D$ 的相应列保持一致。

**性质 5** 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变。

性质 3、性质 4 都可以直接利用 $n$ 阶行列式的定义证明，请读者证明之(参考性质 2 的

证明)。利用性质 4 及推论 2 立即可得性质 5 的证明。

利用这些性质可以简化行列式的计算。为清楚起见，交换行列式 $i,j$ 两行(列)，记作 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$；行列式第 $i$ 行(列)乘以 $k$，记作 $r_i \times k(c_i \times k)$；行列式第 $i$ 行(列)提出公因子 $k$，记作 $r_i \div k(c_i \div k)$；以数 $k$ 乘行列式第 $i$ 行(列)加到第 $j$ 行(列)上，记作 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$.

**例 3** 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

**解**

$$D \xlongequal{r_2+(-2)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+1\cdot r_1]{r_4+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+1\cdot r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times 2\times 5=-10.$$

**例 4** 已知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a, \qquad \begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix}=b.$$

求

$$D=\begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+3b_1 & c_2+3b_2 & c_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

**解**

$$D \xlongequal{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1' & 2a_2' & 2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 2}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a-2b.$$

下面引入 $n$ 阶行列式的余子式和代数余子式的概念。

在给定的 $n$ 阶行列式中，把 $a_{ij}$所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素划去，余下的元素按原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 $a_{ij}$的**余子式**，记为 $M_{ij}$，而 $a_{ij}$的**代数余子式**是指 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 $a_{32}$的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

**引理 1** 如果 $n$ 阶行列式 $D$ 中第 $i$ 行所有元素除 $a_{ij}$外都是零，那么 $D$ 等于 $a_{ij}$与它的代数余子式 $A_{ij}$的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

**证** 先证 $a_{ij}$位于第 $n$ 行第 $n$ 列处的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于只有 $p_n=n$ 时，$a_{np_n}$才可能不为 0，于是

$$\begin{aligned} D&=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{nn} \\ &=a_{nn}\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}} \\ &=a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}. \end{aligned}$$