函授 夜大

入学考试辅导

（数学部分）

HSYDRXKSFD

贺新瑜
郭立焕 编

中国广播出版社

函授夜大入学考试辅导

（数学部分）

贺新瑜　郭立焕　编

中国展望出版社

一九八五年·北京

内 容 提 要

本书根据中学数学教材的内容，采取提要式的写作方法概述数学基本原理，同时又选择典型例题进行讲解，以帮助读者理解基本数学原理。全书包括代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何等五个部分，可供中学生和经济管理干部、职工学习参考。

函授夜大入学考试辅导

（数学部分）

贺新瑜 郭立焕 编

中国展望出版社出版

（北京西城区太平桥大街4号）

太原新华印刷厂印刷

北京市新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 11.25印张

248千字 1985年4月 北京第1版

1985年4月第1次印刷 1—60,000册

统一书号：13271·005 定价：2.00元

目　　录

一、代　数

（一）集　合

具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。集合分为有限集和无限集。

集合用大写字母表示，元素用小写字母表示。如集合A，元素a等。

1　常用的集合表示法

（1）列举法：把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合。如：$\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$。

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序。上述集合又可表示为：$\{2, 1, 4, 3, \cdots\cdots\}$。

a与$\{a\}$是不同的，a表示一个元素；$\{a\}$表示一个集合，该集合仅有一个元素a。

（2）描述法：把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内表示集合。例如：

$\{x \mid 3x^2-5 \geqslant 0, x \in R\}$，

$\{x \mid x=5$或$x<3, x \in R\}$。

若a是集合A的元素，则表示为$a \in A$，读作a属于A。

若a不是集合A的元素，则表示为$a \overline{\in} A$（或$a \notin A$）。读作a不属于A。

全体自然数的集合通常简称自然数集，记作N；

全体整数的集合通常简称整数集，记作Z；
全体有理数的集合通常简称有理数集，记作Q；
全体实数的集合通常简称实数集，记作R；
全体复数的集合通常简称复数集，记作C。

2 从属关系与包含关系

（1）子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集。记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）。

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集。记作$A\subset B$（或$B\supset A$）。

当A不是B的子集时，我们记作$A\nsubseteq B$（或$B\nsupseteq A$）。

任何一个集合是它本身的子集，即$A\subseteq A$

相等：对于两个集合A与B，如果有$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么集合A与B叫做相等的集合。记作$A=B$。

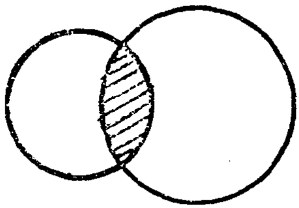

图1—1

（2）交集：由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集。表示为$A\cap B$，如图1—1。

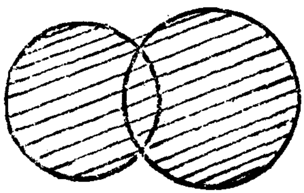

图1—2

（3）并集：由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，表示为$A\cup B$。如图1—2。

空集：不含任何元素的集合叫做空集，用符号φ表示。空集是任何集合的子集。若 $A \cap B = \phi$，则称A、B是分离的。如图1—3。

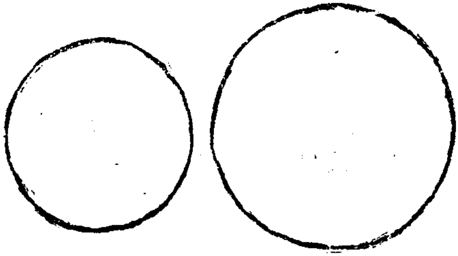

图1—3

集合φ与集合{0}是不相同的两个集合，前者表示集合中不含有任何元素；后者表示集合中仅含有元素零。

（4）全集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集。用符号I来表示。由此可见，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。

（5）补集：已知全集I，若 $A \subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集，表示为 $\overline{A}$。如图1—4中阴影部分表示集合A的补集 $\overline{A}$。

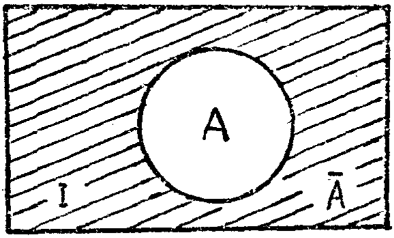

图1—4

例1　分别用列举法和描述法写在大于5小于15的奇数集。

解：　列举法：$\{7, 9, 11, 13\}$

　　　描述法：$\{x \mid x = 2n + 1, n = 3, 4, 5, 6\}$

例2　设 $A = \{x \mid x \leqslant 8, x \in N\}$

$B = \{y \mid y^2 - 7y - 8 = 0, y \in N\}$

$C = \{z \mid z \neq z, z \in N\}$

求：$A \cup B$，$A \cap B$，$A \cap \overline{B}$，$A \cup C$，$A \cap \overline{C}$。

解：$\because A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B=\{8\}$，$C=\phi$，

$\overline{B}=\{y \mid y\neq 8, y\in N\}$，$\overline{C}=N$，

$\therefore$ $A\cup B=A$，$A\cap B=B=\{8\}$，

$A\cap\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A\cup C=A\cup\phi=A$，$A\cap\overline{C}=A\cap N=A$。

习　题　一

1　将下面集合用描述法表示出来：

$A=\{1, 3\}$；$B=\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$；

$C=\{\cdots\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\cdots\}$；

$D=\{1, 4, 9, 16, \cdots\cdots\}$。

2　将下面集合用列举法表示出来：

$A=\{y \mid 5<x<8, x\in N\}$；

$B=\{W \mid |W|<5, W\in Z\}$；

$C=\{y \mid y^2-5y+2=0, y\in R\}$；

$D=\{Z \mid Z^3=1, Z\in C\}$。

3　求适合条件的集合：

（1）$F=\{x \mid 0<x<5, x\in z\}$

$G=\{y \mid 4\leqslant y<7, y\in z\}$

求：　$F\cap G$，$F\cup G$，$F\cap\overline{G}$。

（2）$I=\{x \mid |x-1|<1, x\in R\}$

$A=\{x \mid 0<x<1, x\in R\}$

求：$\overline{A}$

4　已知　$Z=\{x \mid x=2n, n\in Z\}$

$D=\{y \mid y=2n+1, n\in Z\}$

$P=\{W \mid 0<W<25, W\in Z\}$

$T=\{Z \mid Z=3n, n\in Z\}$

求：（1）$Z\cup D$；（2）$Z\cap D$；（3）$N\cap P$；

（4）$T\cap\overline{Z}$；（5）$P\cap D$；（6）$(N\cap Z)\cap T$；

（7）$(Z\cap T)\cap P$。

5　已知：$A=B$，$A=\{c, a, b\}$，$B=\{a, x, b\}$

求：x。

6　若$A\cup B=\phi$，$C=\{1, 2, 3\}$

求：$A\cap C$　　$A\cup C$

7　若$A\cap B=I$　$A=\{1, 2, 3\}$

求：I，B各等于什么？

8　若$A\cap B=\phi$，能否推得$A=\phi$或$B=\phi$，为什么？

9　若$A=\{1, 3, 5\}$　$\overline{A}=\{2, 4, 6\}$

$B=\{1, 2\}$

求：$\overline{B}$；$\overline{A\cup B}$；$\overline{A}\cap\overline{B}$。

习题一参考答案

1　$A=\{x \mid 1\leqslant x<4, x=2n-1, n\in N\}$；

$B=\{y \mid y=\frac{1}{5}n, \quad 1\leqslant n\leqslant 5, \quad n\in N\}$；

$C=\{z \mid z=2m, m\in Z\}$；

$D=\{m \mid m=n^2, n\in N\}$。

2　$A=\{6, 7\}$；$B=\{-4, -3, -2, -1,$

0, 1, 2, 3, 4 };

$C = \{ \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2} \}$;

$D = \{ 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \}$。

3 (1) $F \cap G = \{4\}$;

$F \cup G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$F \cap \overline{G} = \{1, 2, 3\}$;

(2) $\overline{A} = \{x \mid 1 \leqslant x < 2 \quad x \in R\}$。

4 (1) $Z \cup D = Z$;

(2) $Z \cap D = \phi$;

(3) $N \cap P = \{1, 2, 3 \cdots\cdots, 24\}$;

(4) $T \cap \overline{Z} = T \cap D = D$;

(5) $P \cap D = \{1, 3, 5 \cdots\cdots, 23\}$;

(6) $(N \cap Z) \cap T = \{x \mid x = 6n, n \in N\}$;

(7) $(Z \cap T) \cap P = \{6, 12, 18, 24\}$。

5 $x = c$。

6 $A \cap C = \phi$; $A \cup C = C$。

7 $I = \{1, 2, 3\} = B$。

8 不能推得。如$A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6\}$就是一反例。

9 $\overline{B} = \{3, 4, 5, 6\}$; $\overline{A \cup B} = \{4, 6\}$; $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 6\}$。

（二）数及其运算

1、数系表

- 复数$a+bi$
  - 实数a $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数——有限小数或无限循环小数
    - 无理数——无限不循环小数
  - 虚数 $b\neq 0$
    - 纯虚数（$a=0$）
    - 混合虚数（$a\neq 0$）

2、实数

（1）有理数：

①定义：整数和分数统称有理数。任何一个有理数都可用既约分数$\frac{q}{p}$来表示（P为自然数，q为整数）。

②倒数和负倒数

两个数的乘积等于1时，这两个数叫做互为倒数。例如：$\frac{2}{5}$与$\frac{5}{2}$；$\frac{b}{a}$和$\frac{a}{b}$；

两个数的乘积等于－1时，这两个数叫做互为负倒数。例：$\frac{n}{m}$与$-\frac{m}{n}$。

注意：零没有倒数。

③绝对值：一个数的绝对值，就是数轴上表示它的点到原点的距离。所以正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

④相反数：绝对值相等、符号相反的两个数叫做互为相反数。

⑤数轴：规定了原点、方向和单位长度的直线叫做数轴。原点所对应的数是零；原点右方任何一点所对应的数都是正数；原点左方任何一点所对应的数都是负数。因此，任何一个有理数都可以在数轴上找到与它相对应的点；反之，在数轴上的任何一点所对应的数，不一定都是有理数。

绝对值相等，符号相反的两个数在数轴上的两个对应点关于原点对称。

⑥算术根：正数的正的方根叫算术根（0的算术根是0），记为$\sqrt[n]{A}$。其中$A \geqslant 0$，n为大于1的自然数。若$n = 2$，$\sqrt{A}$表示A的算术平方根。（$A \geqslant 0$）。

由算术平方根的定义知：

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

（2）无理数：无限不循环小数叫做无理数。常见的无理数有$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{10}$，π，e等。

无理数不能用分数$\frac{q}{p}$来表示（p为自然数，q为整数）。

（3）实数：有理数和无理数统称为实数。

实数集合中的数与数轴上的点可以建立一一对应关系，也就是说，每一个实数都可以在数轴上找到与它相对应的唯一的一个点；反之，数轴上的每个点都对应着唯一的一个实数。

相反数、倒数、绝对值的定义在实数范围内依然有效。

（4）实数的性质（略）

（5）实数的运算：

①六种基本运算：加、减、乘、除、乘方、开方。必须特别注意，负数开偶次方在实数集合内是没有意义的。

②运算定律：

加法交换律：$a+b=b+a$

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$

乘法对加法的分配律：$(a+b)\cdot c=ac+bc$

③运算顺序

加法和减法为第一级运算，乘法和除法为第二级运算，乘方和开方为第三级运算。

在作混合运算时，按第三级，第二级，第一级的顺序进行运算。如有括号时，先进行括号内的运算，即从里到外；若是同级运算，按从左到右的顺序进行。

例 1　计算

$$\left[(-0.15)\div(-0.03)-(-4)\div\left|-2\frac{1}{5}\right|\times\left(-2\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

解：原式 $=\left[5-(-4)\times\frac{5}{11}\times\left(-\frac{11}{4}\right)\right]\times\frac{1}{3}+$

$+1\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=[5-5]\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})$

$=0\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=1$。

例2　求证$\sqrt{2}$是无理数。

证：假设$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}$可表示成$\frac{q}{p}$。即

$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p是自然数，q为整数，且p、q互质）。那么

$2=\frac{q^2}{p^2}$故$q^2=2p^2$。

所以q^2是偶数，q必为偶数。设$q=2m$，即有

$$(2m)^2=2p^2\qquad 即\ 2m^2=p^2$$

所以p^2也是偶数，p也必定为偶数。从而$\frac{q}{p}$不是既约分数，这与q、p互质的假设矛盾，故$\sqrt{2}$是无理数。

例3　已知

$|x-4y|+|2y-1|=0$

求：x和y的值

解：∵两个绝对值的和为零，那么这两个绝对值必须都是零

$\therefore\begin{cases}x-4y=0\\2y-1=0\end{cases}$　　解得$\begin{cases}x=2\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

例4　已知$a<-5$　化简：

$|6-a|-|2a+1|+|a+5|$

解：$\because a<-5$，故$6-a>0$

$2a+1<0\qquad a+5<0$

$\therefore |6-a|-|2a+1|+|a+5|$

$=6-a+(2a+1)-(a+5)=2$。

8、复数

（1）虚数单位：

$i^2=-1$，i叫做虚数单位；

-1的两个平方根分别是i和$-i$；

i可以按照同样的运算律与实数在一起进行四则运算；

i的幂的性质：

$i^{4n}=1 \quad i^{4n+1}=i \quad i^{4n+2}=-1 \quad i^{4n+3}=-i$

（n为整数）

（2）复数的概念：形如$a+bi$的数叫做复数（其中a，b都是实数。a叫做实部，bi叫做虚部，b叫虚部系数。当$b=0$时，复数$a+bi$就是实数a；当$a=0$，$b\neq 0$时，复数$a+bi$就是纯虚数bi。全体复数所成的集合叫做复数集，一般用字母C来表示。

（3）复数的几何表示

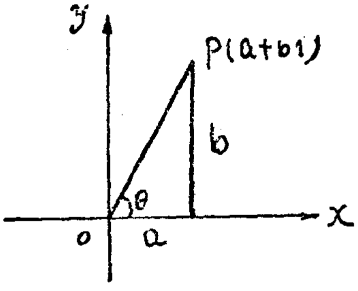

图1—5

表示复数的坐标平面叫做复平面，横坐标轴叫实轴，纵坐标轴叫做虚轴。如图1—5。复数$a+bi$与复平面上的点P（a，b）是一一对应的。当$b=0$时，它与实轴上的点一一对应；当$a=0$时，它与虚轴上的点是一一对应的。

（4）复数的模数（绝对值）

$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$叫做复数$a+bi$的模数。其

几何意义是复数$a+bi$的对应点P到原点的距离。

（5）复数的辐角：

复数$a+bi$在复数平面内的对应点为P（a，b）。若x轴正方向与OP所夹的角为θ，则θ叫做这个复数的辐角。不等于零的复数有无数个辐角，即$2k\pi+\theta$。（k为整数）。其中适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的辐角θ，叫做辐角的主值。

（6）复数的性质：

①无顺序性：两个复数如果都是实数，可以比较它们的大小；如果不全是实数，就不能比较它们的大小。

复数相等：$a+bi=c+di$　当且仅当$a=c$，$b=d$

复数等于零：$a+bi=0$　当且仅当$a=0$，$b=0$

②共轭复数：当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数。$z=a+bi$的共轭复数是$\overline{z}=a-bi$。

性质：　$z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2bi$，$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$

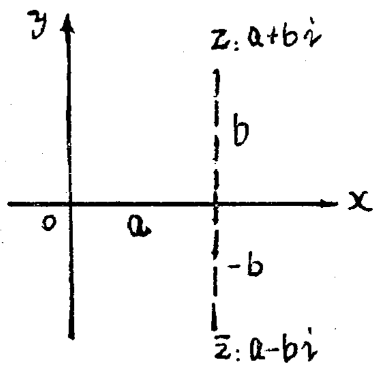

图1—6

几何意义：共轭复数关于实轴对称。如图1—6。

③在复数范围内可施行加、减、乘、除（除数不得为零）乘方和开方六种运算。

（7）复数的向量表示：

①向量：既有大小又有方向的量叫做向量。

几何表示：向量可以用有向线段来表示，线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向。

规定1：长度相等方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量。这样我们把在平面上的向量归结为以原点为起点的向量来研究。复平面上的每一点均可看成一个向量。相等的向量在复平面上是同一个点。

由上面规定可见，向量可以根据需要进行平移。

规定2：长度为零的向量（它的方向不确定）叫做零向量，所有的零向量都相等。

②复数的向量表示：设Z点表示复数$a+bi$，连结OZ，如果我们将OZ看成向量（方向是由O点指向Z点），就记作$\overline{OZ}$或$\overline{Z}$。

规定：相等的向量表示同一复数。

复数集C与复平面内所有的点所成的集合之间是一一对应的，也与复平面内所有从原点出发的向量所成的集合之间是一一对应的。

（3）复数代数形式的运算。

$z=a+bi$叫做复数z的代数表示式，其运算规则如下：

加法与减法：把复数的实部与实部，虚部与虚部分别相加（减），即

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

乘法：按多项式乘法法则进行，在所得的结果中把i^2换成-1，并且把实部与虚部分别合并，即

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

除法：先把它们的商写成分式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，并且把结果化简。即：