成人高等院校试用教材

经济应用数学

主编 蒋果夫

西南财经大学出版社

(川)新登字 017 号

责任编辑:王　书
封面设计:穆志坚
责任校对:王　书

经 济 应 用 数 学

西南财经大学出版社出版　(成都市光华村)
西南财经大学出版社发行　四川省资中县印刷厂印刷

850×1168 毫米　1/32　印张 17.5　字数 390 千字
1992 年 7 月第一版　1992 年 7 月第一次印刷
印数:1—4500 册

书号:ISBN 7-81017-430-4/F·332
定价:7.50 元

前　　言

《经济应用数学》是为适应中国农业银行成人高等院校的教学需要而组织编写的试用教材。它亦可作为有关经济、金融类成人院校的函授、干训教材和广大干部、职工的自学用书。

《经济应用数学》比较系统地阐述了“微积分”、“线性代数”、“概率论”与“数理统计”等数学学科的基础知识，以及它们在现代经济、金融科学领域和经营管理工作中的应用，其中包括边际分析、弹性分析、投入产出分析、线性规划和回归分析等经济数学方法的应用等。

本书还根据成人教育的教学特点，将高等数学中较为抽象的概念、定理、法则和公式推导等内容，在不影响其科学性的前提下，尽可能运用几何直观和多举例题等方式予以阐述，力争做到深入浅出，以便加深学员的理解和记忆。本书的语言表达和文字叙述力求精练、通俗易懂。

《经济应用数学》教材是中国农业银行教育部组织系统内成人高校的部分教师编写的。参加编写的有武汉管理干部学院张国钧（第1～3章）、长春管理干部学院李学君（第4～6章）、天津金融管理干部学院刘绍钰（第7～10章）、湖南农村金融职工大学蒋果夫（第11～14章）等同志，由蒋果夫同志任主编。本书经中央财经学院董承章教授审定。

本书在编写过程中，得到天津金融管理干部学院等院校的大

力支持，在此谨表谢意。

将高等数学的理论、方法与经济、金融实务紧密结合是我们的愿望，但目前还只是进行尝试。由于作者水平有限，加之编写时间比较仓促，书中难免有不少疏漏不妥之处，恳请用书单位的广大师生和读者提出宝贵意见，来信来函请直接寄中国农业银行总行教材处。

中国农业银行教育部

1991年12月

目　　录

第一章　函数

在经济科学研究中，函数受到广泛应用，如在金融分析和银行管理中所遇到的大量数量关系，都可以用函数来表达，因此，函数是经济应用数学的主要内容。

§1·1　实数

一、实数的概念

人们对数的认识是逐步发展的，首先认识的是自然数，然后是有理数（即正负整数、正负分数和零。）有理数总可以表示成$\frac{p}{q}$的形式（其中p、q为整数，$q\neq0$）。一个有理数如果写成小数形式，一定是有限小数或无限循环小数。例如：$1\frac{1}{4}=1.25$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$。不能表示成$\frac{p}{q}$的数，如$\sqrt{2}$、$\pi$、$e$等称为无理数。一个无理数，一定是无限不循环小数，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$，有理数与无理数统称为实数。全体实数所组成的集合称为实数集，记作R。

在一条水平直线上取定一点O（称为原点），指定一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向为正方向），再规定一个长度单位，这种具有原点、正方向、长度单位的直线称为数轴，如图1·1所

示。

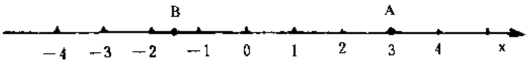

图 1—1

有了数轴以后，对于每一个实数 x，在数轴上总可以找到唯一的一点与它相对应，如 $x=3$，可以在数轴上量得 $|OA|=3$，于是 A 点与它相对应（见图 1·1)。反之，对于数轴上的每一个点，在实数集 R 中总可以找到唯一的一个数与之相对应，如在数轴上取一点 B（见图 1·1)，通过度量，得 $|OB|=1.5$，因 B 点在原点的左侧，$x=-1.5$ 便是与点 B 相对应的实数。这样，全体实数和数轴上的全体点之间便建立了一一对应的关系，通常称与数轴上某点对应的实数为该点的坐标。由于一一对应，所以常常把实数与数轴上对应的点不加区别，实数 x 可以称为点 x，反之，点 x 也可以称为实数 x。显然，全体实数充满数轴而没有空隙，这就是实数的连续性。

*二、绝对值

在以后的讨论中，常常要涉及到实数的绝对值，现简单介绍有关知识。

定义 1·1 一个实数 x 的绝对值记作 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0, \\ -x & x<0. \end{cases}$$

即实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示一个非负实数，当 x 为正数或零时，$|x|$ 就是 x 的本身，当 x 为负数时，$|x|$ 就是 x 的相反数。例如，$|3|=3$，$|-3|=-(-3)=3$，$|0|=0$。

$|x|$ 的几何意义是，在数轴上实数 x 的绝对值表示点 x 到原点之间的距离，而 $|x-a|$ 表示点 x 到点 a 之间的距离。

.关于绝对值及其运算有如下的性质

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|x|=|-x|$;

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$;

(5) 若$|x|\leqslant a$，则$-a\leqslant x\leqslant a$ $(a>0)$;

(6) 若$|x|\geqslant b$，则$x\geqslant b$或$x\leqslant -b$ $(b>0)$;

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$;

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

(10) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

三、区间和邻域

在实际问题中，所研究的变量往往有一定的变化范围，为了既明确又简单地表示变量的变化范围，我们引入区间的概念。

设a，b为实数，且$a<b$.

(1) 满足不等式$a<x<b$的一切实数x所构成的集合，称为以a，b为端点的开区间，记作(a, b)

即$(a, b)=\{x|a<x<b\}$.

(2) 满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x所构成的集合，称为以a，b为端点的闭区间，记作$[a, b]$,

即$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 满足不等式$a<x\leqslant b$和$a\leqslant x<b$的一切实数x所构成的集合，称为以a，b为端点的半开区间，分别记作$(a, b]$和$[a, b)$.

闭区间在数轴上对应于一条线段（图1-2（a））；开区间则可看作是不包含端点的“线段”（图1-2（b））；线段之间的距离$b-a$，称为区间的长。

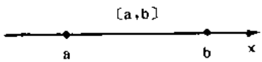

图 1—2 (a)

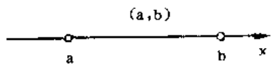

图 1—2 (b)

(4) 我们规定，整个实数集 R 记为开区间 $(-\infty, +\infty)$，或 $-\infty<x<+\infty$。其中符号"∞"读作"无穷大"，它只是一个符号，不能当作数看待，利用这个符号，把满足不等式 $x\geqslant a$，$x>a$，和 $x\leqslant b$，$x<b$ 的所有实数所构成的集合，分别表示为

$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，和 $(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$．

这五种区间都是无限区间。

现引入某点"邻域"的概念，这在以后学习中经常用到。

令 δ 为任意正数，x_0 为任意实数，满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的一切实数 x 所构成的集合称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为邻域的中心，δ 为邻域的半径。

因为 $\quad |x-x_0|<\delta$，

所以 $\quad -\delta<x-x_0<\delta$，

即 $\quad x_0-\delta<x<x_0+\delta$

在数轴上表示为以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，如图 1-3 所示。

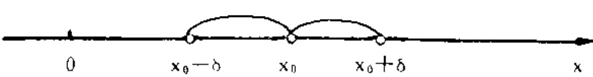

图 1—3

例如 $|x-1|<0.2$，表示以 $x_0=1$ 为中心，$\delta=0.2$ 为半径，长度为 0.4 的开区间 $(0.8, 1.2)$

不等式

$$0<|x-x_0|<\delta$$

表示在点 x_0 的 δ 邻域内去掉中心点 x_0 后，其余的点所组成的集合，即 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$，称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域，如图 1-4 所示。

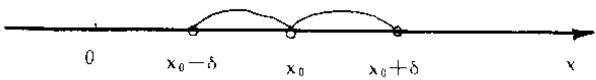

图 1—4

例如 $0<|x+1|<2$，表示以 $x_0=-1$ 为中心，$\delta=2$ 为半径的空心邻域。

§1·2 函数的概念

一、常量和变量

在自然科学和经济科学的研究中，常常会遇到各种各样的量，例如重量、长度、时间、成本、资金、利息等等。这些量尽管多种多样，但有一个共同点，就是可通过数值表示出来，所以称之为数量。进一步分析，这些量又可分为两类，即常量和变量。

在讨论问题的过程中，其数值始终保持不变的量，称为常量。例如，圆周率 $\pi=3.1416$、$\sqrt{2}$、5、3/4 等等。

在讨论问题的过程中，可以取不同数值的量，称为变量。例如，运动着的物体所移动的路程，银行营业所每天现金收支额，每天贷款发放数，商店每天的营业额，粮食收购站每天收购粮食的数量等等，都是变量。

常量和变量是相对的。同一个量，在这种情况下是常量，在另一种情况下，可能是变量。例如，储蓄存款的利率，在一个时

期内是不变的，所以是常量。但在较长时间内，它是变量，因当国民经济情况发生变化时，要对银行利率进行调整。

习惯上用字母 a、b、c、……表示常量，用 x、y、z、……表示变量，在数轴上，常量一般是定点，变量一般是动点。

在经济数量分析中，常常涉及参量和假变量。所谓参量又叫参变量或参数，从纯数学角度看，它是方程中可以在某一范围内变化的常数。例如方程 $x^2+y^2=r^2$ 的 r，在同一过程中，在一定范围内 r 可以取不同的值，从而得到大小不同的圆。在经济分析中，例如国民人均收入、生产过程中各种材料的消耗定额等，都可以被视为参数。假变量则是一种只取两个数值的变量，例如，银行信贷员在研究是否给客户贷款时，为了使问题数量化而定义

$$x=\begin{cases}0 & \text{不给贷款}\\ 1 & \text{给予贷款}\end{cases}$$

这个 x 便是假变量。

二、函数

在自然现象和社会经济现象中，往往同时有几个量变化着，且它们总是相互联系、相互依存，遵循着一定规律。即当其中一些量变化时，必然会引起另一些量按某种规律变化。我们先考察两个变量之间的关系。

例 1 在真空中的自由下落的物体，经过的路程 S 随时间 t 变化而变化，它们之间有如下的依赖关系

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度。假设运动从 $t=0$ 开始，到 $t=T$ 结束，那么对于区间〔0，T〕上的任何一个值 t_0，就有相应的路程

$$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

与之对应。

例 2　农业银行某年 1-6 月份各项存款余额分别为：1638、1675、1647、1659、1690、1721 亿元，将其列成表格如下所示

表 1・1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　单位：亿元

月　份 (t)	1	2	3	4	5	6
存款余额 (q)	1638	1675	1647	1659	1690	1721

由这个表格可以看到，当 t 取定 1 到 6 这 6 个整数中的任一个时，q 都有一个确定的值与之对应。

例 3　某县化肥厂每月最多生产化肥 120 吨，固定成本为 2 万元，每生产一吨化肥，成本增加 0.1 万元，化肥厂每月总成本 C 与总产量 q 有如下的关系

$$C=0.1q+2 \qquad q\in [0, 120]$$

当 q 在生产能力的容许范围 $[0, 120]$ 内取定某一数值时，总成本 C 相应地有一个确定的数值与之对应。例如当 $q=10$(吨)时，相应

$$C=0.1\times10+2=3 \text{ (万元)}。$$

如上所述，变量间的这种依存关系，称为函数关系。一般地，有以下定义。

定义 1・2　在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在某范围 D 中任取一个值时，按照某种对应法则，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围称为定义域，y 的对应值称为函数值，全体函数值的集合称为函数的值域。当自变量 x 在定义域内取某一值 x_0 时，函数 y 的对应值记作

$f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$。

函数 $y=f(x)$中的“f”反映自变量与因变量的对应法则，也可用 Φ（或 φ）、g、F 等字母来表示，相应地函数就记作 $\Phi(x)$、$g(x)$、$F(x)$. 函数关系有时也记作 $y=y(x)$，此时，等号左边的 y 表示函数值，右边的 y 表示对应法则。在函数的定义中，对应法则“f”是抽象的，只有在具体的函数中，对应法则“f”才是具体的。例如 $y=sinx$，可记作

$$y=f(x)=sinx$$

函数的定义中，涉及到定义域、对应法则、和值域。显而易见，只要定义域和对应法则确定了，值域也随之确定，因此，定义域和对应法则是确定函数的二个要素，由此可知，确定函数的是定义域和对应法则，与自变量和因变量采用什么字母无关，所以，$y=\pi x^2$、$s=\pi r^2$ 和 $u=\pi v^2$ 是表示同一函数。

如果对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 只有唯一的一个值和它相对应，这样的函数称为单值函数。如果对应的 y 值不止一个，称为多值函数。在以后的讨论中如不加以特别说明，指的都是单值函数

三、函数定义域的确定和函数值的计算

在函数的定义中，自变量的取值范围是有一定限制的，函数的定义域正是体现这一点。如何确定函数的定义域呢，可分两种情况进行讨论。

1. 对于由实际问题得到的函数，其定义域可根据其具体条件来确定。

例 4　圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数

$$S=\pi r^2$$

求函数的定义域。

解　根据问题的实际意义，圆的半径不可能为负值，因此

$r \geqslant 0$，所以它的定义域为 $[0, +\infty)$．

2. 如果函数以数学公式给出而没有明确指出它的定义域，则函数的定义域是使这个公式有意义的一切自变量 x 值。

例 5 求 $y=\sqrt{x+1}+ln(x-2)$的定义域

解 要使 $y=\sqrt{x+1}+ln(x-2)$有意义，x 必须满足不等式组$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ x-2>0 \end{cases}$

由这个不等式组解得$\begin{cases} x\geqslant -1 \\ x>2 \end{cases}$

即 $$x>2$$

故函数的定义域为 $x>2$ 或 $(2, +\infty)$．

下面我们举例说明函数值的计算法。

例 6 设函数 $y=f(x)=3x^2+2x+4$，

求 $f(0)$， $f(-1)$和 $f(x_0+\Delta x)$.

解 $f(0)=y|_{x=0}=3\cdot 0+2\cdot 0+4=4$

$f(-1)=y|_{x=-1}=3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+4=5$

$f(x_0+\Delta x)=y|_{x=x_0+\Delta x}$

$=3\cdot(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)+4$

由此可见，求函数 $y=f(x)$在定义域内某点 x_0 处的函数值，只要将 x_0 代替 $f(x)$中的 x，再进行计算求值即可。

四、函数表示法

1. 公式法(解析法)

函数的对应法则是用数学式给出的，这种表示函数的方法称为公式法。如本节例 1 和例 2 所介绍的函数，以后讨论中涉及的函数，大多用公式法给出。

2. 表格法

把一系列自变量的值和对应的函数值列成表格，表示两个变