

(英) C. A. 布雷拜
S. 沃克 著
陕西科学技术出版社

边界元法的工程应用

15

C.A. Brebbia S.Walker
BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUES
IN ENGINEERING

Butterworth & Co. (Publishers)Ltd., 1980

边界元法的工程应用

[英] C. A. 布雷拜 S. 沃克著

张治强 译 周天孝 陈 瀚 校

责任编辑 胡明韬

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 陕西机械学院印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.875 字数 164,000

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数: 1—5,850

统一书号: 15202·100 定价: 1.90 元

译 者 赘 言

《边界元法的工程应用》是英国南安普敦大学土木工程系高级讲师C. A. 布雷拜和南安普敦建筑动力有限公司顾问工程师S. 沃克1980年的名著。布雷拜是国际上著名的有限元专家同时又是边界元法的首创者之一，他曾在有限元法和边界元法领域内发表了许多论文和专著；他曾出席1982年8月在我国上海召开的国际有限元会议，并在会上提出统一数值计算方法的新观点。

边界元法(BEM)是七十年代刚兴盛起来的一门新的计算方法。边界元法将边界广义位移和广义力作为独立变量，且同时以满足场方程的奇异(源)函数为加权函数，所以它是一种特殊格式的加权余量法。

边界元法比近年来广泛应用的有限元法有更多的优点：首先，它能使问题的维数降低一维，如原为三维空间的问题可降为二维，原为二维平面问题便降为一维。其次，它只需将边界表面离散化，而不象有限元法需将区域离散化，所划分的单元数目远少于有限元，这就可以减少方程组的方程个数和求解问题所需之数据，不但减少了准备工作，而且节约了计算的机时。第三，由于它是直接建立在问题的基本微分方程(Governing differential equation)和边界条件(Boundary Conditions)基础上的，不需事先寻找任何泛函，不象以变分原理为理论基础的有限元法，如果泛函不存

在就难于使用。所以边界元法可以求解经典区域方法所无法解决的有关无限域一类的问题，且经适当地变换还能解决随时间变化的问题。最后，由于边界元法引入算子的基本解，具有解析与离散相结合的特点，因而具有较高的精确度。

鉴于上述优点，边界元法可广泛地运用于解决与各种工程有关的流体力学、弹性力学、断裂力学、塑性力学、土壤力学等方面的实际问题，诸如：飞机的气动力估算问题，弹性体上的高应力梯度问题，轧钢机辊的裂纹问题，港湾反响问题，隧洞周围岩土的滑裂问题，无线电波传播问题，海洋石油钻井平台问题等。

原著中之数学名词及常见数学家都据《英汉数学词汇》译出；该词汇中所无之人名，为便于阅读计，音译出其名并于其右上角加[]，藉与章末所附之原名相对照。此外，原著正文及原版插图中存在的笔误或印误，一经发现均予改正并注于该页下以资查对。

众所周知，我国关于有限元法的研究虽然起步较晚，但近十年来发展迅速，有些方面业已处于世界领先地位。译者也希望我国在边界元法的研究中迎头赶上，故特译此书以飨读者。但是，因国内迄今尚无一册有关边界元法的编著或译本可资参考，本译稿虽先后承有限元法知名学者、全国六届人大代表、航空工业部西安 631 研究所周天孝高级工程师和中国机械设计与传动学会理事、《应用力学学报》编委、西安交通大学陈瀚副教授审校，犹恐难免千虑之一失。译者又水平太低，虽力争避免谬误，仍觉力不从心，错漏之责咎在译者，敬请大方指正。

本译稿在出版过程中蒙陕西省计委电子计算中心王治华

工程师和本学院方济道同志、李建勋同志及赵福印同志帮助，附此致谢！本书将付印时承石油部北京石油设计院傅子智同志提供原著者布雷拜对原著的修正，谨对傅子智同志及原著者致谢！

译 者

1983年5月

于西安工业学院

著 者 原 序

边界元法为南安普敦大学土木工程系所首创。这种新方法是从研究经典积分方程和有限元法开端的，它兼备后两法的优点，也就是说它既可以用作边界积分方程将问题的维数降低一维，又可供复杂的曲面元以确定其区域的外表面。这就意味着边界元法胜过经典有限元法，并能克服有限元法的下述主要缺点，例如：当精确域延拓至无穷时导致定义域的困难；求解大型方程组占用过多的机时问题以及需要组成复杂的数据结构等。

边界元法较理想地适用于求解弹性力学和位势理论中的许多二维与三维问题。然而，对于这类问题，采用当前流行的有限元法并不是行之有效的。著者认为，有限元法适用于诸如壳体、高度地各向异性体、某些非线性问题以及对流问题。但是，要说是有限元法可运用于广阔的领域，这是言过其实的。毋庸置疑，由于有限元工作者的努力以及第一代大功率计算机的发展，边界元这种新方法同时问世了。著者也意识到边界元法或许对现今从事有限元工作的工程师不产生大的魅力。为此，特将此书奉献给青年一代，同时告诫他们决不可把任何著作奉为权威性的。所以，我们不仅希望而且殷切地期待着这本书在适当的时候被新的著作所取代，且当这个愿望实现时，我们将致以由衷的感谢而绝不会卷入无益的争论。

对于想要初步了解边界元法和边界元计算程序编制知识的读者，我们建议他参阅著者的早期著作——《工程师用的边界元法》（伦敦 Pentech 出版社 1978 年）。

目 录

第一章 近似算法

§ 1.1	引 言	(1)
§ 1.2	加权余量法	(3)
§ 1.3	弱方程	(11)
§ 1.4	逆问题	(15)
§ 1.5	边界法	(19)

第二章 位势问题

§ 2.1	引 言	(28)
§ 2.2	基本解及直接表达式	(30)
§ 2.3	间接表达式	(35)
§ 2.4	矩阵表示法	(38)
§ 2.5	泊桑方程	(49)
§ 2.6	正交各向异性情形	(51)
§ 2.7	赫姆霍兹方程	(54)

第三章 高次单元

§ 3.1	引 言	(60)
§ 3.2	二维问题的线性单元	(60)
§ 3.3	二次单元和高次单元	(68)

§ 3.4	三维问题的单元.....	(73)
§ 3.5	三维单元.....	(83)
§ 3.6	插值函数的阶次.....	(85)

第四章 基本解

§ 4.1	引 言.....	(87)
§ 4.2	特征函数及狄拉克 δ 函数.....	(87)
§ 4.3	有限域的基本解.....	(97)
§ 4.4	无限域.....	(100)
§ 4.5	无限空间中的基本解.....	(103)
§ 4.6	数值解 (各向异性体)	(108)
§ 4.7	映象法.....	(112)
§ 4.8	基本解与边界元.....	(120)
§ 4.9	基本解的显式	(124)

第五章 弹性静力学

§ 5.1	引 言.....	(129)
§ 5.2	加权余量法.....	(132)
§ 5.3	基本解.....	(134)
§ 5.4	源 法.....	(136)
§ 5.5	矩阵表示法.....	(137)
§ 5.6	二维弹性力学.....	(151)

第六章 随时间变化的问题和非线性问题

§ 6.1	引 言.....	(163)
§ 6.2	变换法.....	(163)

§ 6.3	付里叶变换.....	(165)
§ 6.4	拉普拉斯变换.....	(168)
§ 6.5	瞬变弹性动力学.....	(172)
§ 6.6	稳态弹性动力学.....	(176)
§ 6.7	粘弹性问题.....	(178)
§ 6.8	运用时间步距的时间积分.....	(180)
§ 6.9	随时间变化问题的基本解.....	(183)
§ 6.10	非线性问题.....	(187)
§ 6.11	塑性力学问题和土壤力学问题.....	(189)

第七章 区域组合

§ 7.1	引 言.....	(197)
§ 7.2	区域划分.....	(198)
§ 7.3	近似边界解.....	(206)
§ 7.4	无限元.....	(215)
§ 7.5	有限元与边界元的组合.....	(219)

附 录

附录 I	数值积分公式.....	(229)
附录 II	插值函数.....	(233)
附录 III	英汉名词对照表.....	(237)

第一章 近似算法

§ 1.1 引言

一经建立了求解问题的数学方程，除了很简单的情形以外，都必须用近似算法求解。所采用近似算法的类型十分重要，因为它影响到结果的精度和求解工作量的大小。不巧的是，不同的近似算法通常总被毫无关联地提出，很难进行比较。以有限元法为例，随着研究中的具体应用或者研究人员的喜好不同，它可被认为是一种虚功法、一种变分法或者是一种加权余量法，边界解曾被当作互换性原理的结果提出过，只是在近些年来它们才被理解为加权余量解。下面我们将根据加权余量法和近似的类型以及所用的加权函数，将不同的近似算法进行合理的分类。

加权余量法比经典变分原理更为普遍，后者仅能应用于类型限定的算子。加权余量法可与全部非共轭算子一起应用，且和共轭算子应用得同样地好。变分法、有限差分法、有限元法、积分型表达式以及其他许多方法，都可理解为加权余量法的特殊情形。但若倒过来说却不见得正确。

近似解的目的在于把附有边界条件的基本方程（或方程组）简化为代数方程组，这通常是将连续体划分为许多网格或单元，并假定在这每一单元上，其近似函数和加权函数有一个已知的变化。为了简明起见，以拉普拉斯方程为例，这

个方程在 Ω 域内可写为:

$$\nabla^2 u_0 = 0 \quad (1.1)$$

其中, u_0 代表精确解, Ω 是所研究的区域。相应的边界条件可以有下两种形式:

$$\begin{aligned} \text{条件 } u_0 &= \bar{u} & (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \\ \text{条件 } q_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial n} = \bar{q} & (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

式中, Γ_1 和 Γ_2 是一类条件及另一类条件所适用的边界部分。其总边界是 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。

精确解 u_0 仅能在少数和简单的情况下求得, 而一般地, 其解必将是近似求得的。这种近似解能用一系列已知的线性无关函数 ϕ_i 和未知系数 α_i 或 u_i 解出 (u_i 是在某些点或节点上的 u 函数值, 而系数 α_i 是广义函数却非节点值)。一般我们乐于使用有明确物理意义的节点值, 但当节点未被确定时, 我们将用 α 值。

让我们将 u 的近似解写为:

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots \quad (1.3)$$

将这个函数代入 (1.1) 和 (1.2) 式, 将产生一个误差 (除非 (1.3) 式是精确解, 即 $u = u_0$ 外), 以致:

$$\nabla^2 u \neq 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}) \quad (1.4)$$

并且在边界上

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &\neq 0 & (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \\ q - \bar{q} &\neq 0 & (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{其中 } q = \frac{\partial u}{\partial n}$$

于是我们可在区域中和边界上定义误差函数如下:

$$\varepsilon = \nabla^2 u \neq 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}) \quad (1.6)$$

以及

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}) \\ \varepsilon_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

我们现在的目的是使区域内和边界上的误差尽可能地小。为达此目的，可将误差适当分配，而实现误差分配的不同途径，就产生了加权余量法的不同类型。

§ 1.2 加权余量法

最简单的加权余量法是从严格地满足边界条件（即 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ）且以加权函数 w 来分配误差开始的。加权函数是这样的，它恒满足齐次边界条件，且可写为：

$$w = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3 + \dots \quad (1.8)$$

ψ_i 是一组已知的线性无关函数的组成部分，而 β_i 是任意系数。当加权函数是任意节点系数时，则记为 w_i 。

误差函数 ε 的分配，可由 ε 乘加权函数 w ，并在全域内积分得出，即

$$\int_{\Omega} \varepsilon w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = 0 \quad (1.9)$$

在这一思路中，误差按照 w 中的诸函数加以分配。必须注意，因为 β_i 系数是任意的，所以(1.9)式也可写为：

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \psi_i d\Omega = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.10)$$

譬如经典的有限差分法可以看作为方程(1.9)的特例，这时加权函数是狄拉克 δ 函数，而 β_i 是节点任意系数(w_i)，

所以

$$w = w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 + w_3 \delta_3 + \dots \quad (1.11)$$

狄拉克 δ 函数是广义函数，它可用这样的正规函数的极限来定义：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin[N(x - x_i)]}{\pi(x - x_i)} = \delta(x - x_i) \quad (1.12)$$

除自变量为零处（即在 $x = x_i$ 处）该极限为无穷大外，在其它各点，此函数的极限值都是零。这样，它描述了在“源点” x_i 这一点上的奇异性。

δ 函数具有以下特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i - a}^{x_i + a} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (1.13)$$

其中 a 为任意正数。

又对于任意函数 $f(x)$ （在点 x_i 处连续），可写出

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx \\ = \int_{x_i - a}^{x_i + a} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i) \end{aligned} \quad (1.14)$$

在分析中这里无需明显地表明函数的自变量，为了简单起见，我们将采用简捷符号，令

$$\delta(x - x_i) = \delta_i \quad (1.15)$$

及 $f(x_i) = f_i$

对于要包含自变量的重要场合，为了解释清楚，我们将用全符号明显地写出 x 和 x_i 。

近似函数由下式给出

$$u = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + u_3 \phi_3 + \dots \quad (1.16)$$

(对于中心差分格式, ϕ_i 是在围绕节点的子域上所取的局部二阶多项式。)

将(1.16)式代入(1.9)式, 在每一节点“ i ”上有如下方程

$$\int_{\Omega} \epsilon \delta_i d\Omega = \epsilon_i = 0 \quad (1.17)$$

上式表明, 对于二次近似函数, 它给出与中心有限差分格式一样的数值结果。然而由于它允许我们同样地应用 ϕ_i 函数的其它型式, 这个程序更为普遍, 而且这个基本思想能够加以推广。采用曲线坐标, 这种推广产生所谓‘单元配置法[1]。’如例 1.1 所示, 这基本上是一种子域配置法。

例 1.1

设有方程

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad x \in [0, 1] \quad (a)$$

式中 x 由 0 到 1 变化, 而边界条件为

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (b)$$

设图 1.1 中每个子域或‘单元’的近似函数如下:

$$u = u_{i-1} \phi_1 + u_i \phi_2 + u_{i+1} \phi_3 \quad (c)$$

其中 $\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$

$$\phi_2 = (1 - \xi)(1 + \xi)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad (d)$$

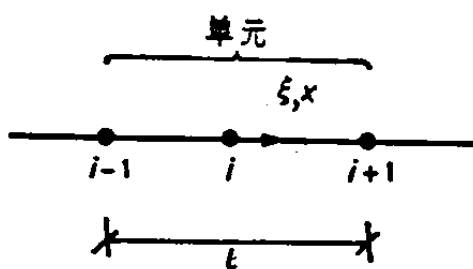


图 1.1 所研究的点

ξ 是无量纲坐标, $\xi = x/\frac{1}{2}l$ 。若注意到式(c)和(d)来求解方程(a), 则将得到以下代数关系式:

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right)_i \\ &= \left(\frac{4}{l^2} u_{i-1} - \frac{8}{l^2} u_i + \frac{4}{l^2} u_{i+1} \right) + u_i + x_i \\ &= \frac{4}{l^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + u_i + x_i\end{aligned}\quad (e)$$

根据方程(1.11)式, 在 i 处使 ϵ_i 等于零, 对于这种特殊情况, 它与中心有限差分法给出同一结果。

矩 法

利用方程式(1.9)式, 可使加权余量法产生多种多样的形式, 譬如矩法、伽辽金法、配置法、子域法等。

矩法的含义是对误差函数取矩。例如对于一维问题这指的是 ϵ 对以下函数取矩:

$$1, x, x^2, \dots \quad (1.18)$$

这些函数都是(1.8)式的 ψ_i 函数, 于是我们可把加权函数写为:

$$\begin{aligned}w &= \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3 + \dots \\ &= \beta_1 1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \dots\end{aligned}\quad (1.19)$$

这个方法可用下例来阐明。

例 1.2

设有和例 1.1 相同的方程及边界条件, 其误差函数是

$$\epsilon = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \quad (a)$$

我们试设一个能满足边界条件的近似函数为

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots \\ &= \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) + \dots \end{aligned} \quad (b)$$

值得注意的是, $\phi_1, \phi_2, \dots$ 等函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处满足齐次边界条件。系数 α_i 是未知的, 而且当全域任意节点未确定时, 它并不与 u 函数的节点值直接发生联系, 于是得到具有两个系数 α_i 的误差函数:

$$\varepsilon = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 \quad (c)$$

这个函数需与 1 和 x 成正交性, 即取如下两矩:

$$\int_0^1 \varepsilon 1 dx = 0; \quad \int_0^1 \varepsilon x dx = 0 \quad (d)$$

积分(d)式, 得到一宗 2×2 的方程组, 从而可求得系数 α_1, α_2 。该方程是:

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} \textcircled{1} & \frac{19}{20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

这组方程的解为:

$$\alpha_1 = \frac{122}{649} \quad \alpha_2 = \frac{110}{649} \quad (f)$$

于是近似解变为

$$u = x(1-x) \left(\frac{122}{649} + \frac{110}{649} x \right) \quad (g)$$

而这个问题的精确解为

① 原著误为 11/22。——译者

$$u_c = \frac{\sin x}{\sin l} - x \quad (h)$$

可见(g)式已相当接近于精确解。

伽辽金法

伽辽金法仍可用方程(1.9)式来表达，这里，我们从一个近似函数着手：

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \dots \quad (1.20)$$

并且选加权函数 w 如下：

$$w = \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 + \beta_3 \phi_3 + \dots \quad (1.21)$$

亦即对于 u 和 w 采用了同一函数。其加权余量式为：

$$\int_{\Omega} \varepsilon w d\Omega = 0 \quad (1.22)$$

又可将其写为

$$\int_{\Omega} \varepsilon \phi_i d\Omega = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.23)$$

在伽辽金法中，通常将 w 函数写为 Δu ，即

$$w = \Delta u$$

$$\text{式中} \quad \Delta u = \Delta \alpha_1 \phi_1 + \Delta \alpha_2 \phi_2 + \Delta \alpha_3 \phi_3 + \dots \quad (1.24)$$

$$\text{而且} \quad \Delta \alpha_i = \beta_i$$

这种表达式有时喜用来显示：加权函数 w 可用变量或虚量（如虚位移或虚速度）来表示。表达式(1.24)还表明，对 Δu 也采用了同样的函数。如将在例 1.3 中见到的那样，这种特性是重要的，它会使表达式具有对称性。

例 1.3

让我们再来看例 1.1 所给定的方程，并试用伽辽金法求解。我们选用与例 1.2 相同的近似函数，即