初三数学

特级教师教学优化设计

与人教版新教材同步

南京师范大学出版社

系列丛书

特级教师教学优化设计

初 三 数 学

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

特级教师教学优化设计：初三数学/《特级教师教学优化设计》编委会组织编著 .—南京：南京师范大学出版社，1999.7

ISBN 7－81047－326－3／G·197

Ⅰ.特…　Ⅱ.特…　Ⅲ.数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 20513 号

书　　名	特级教师教学优化设计：初三数学
编　　著	《特级教师教学优化设计》编委会
责任编辑	杨爱玲
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编：210097)
电　　话	(025)3598077(传真)　3598412(营销部)　3598297(邮购部)
E－mail	nnuniprs@public1.ptt.js.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	南京通达彩印有限公司
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	10
字　　数	250 千
版　　次	2002 年 6 月第 3 版　2002 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7－81047－326－3／G·197
定　　价	11.00 元

《特级教师教学优化设计》丛书编委会

（初中部分）

（初三数学）

主　　编　冯星辰　叶凤梧

编写人员　冯星辰　王文奇　王林贵　朱孝宁

金桂林

出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题。在学科教学中,如何减轻学生的负担,提高教与学的质量,增强学生的全面素质,又是实施素质教育的关键。为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物,让学生用最少的时间获得最大的学习收益,我们在大量调查和深入开展研讨的基础上,组织一批特级教师主持编写了这套"特级教师教学优化设计"系列丛书。

随着教改的不断深入,随着新的高考方案的逐步落实,教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变。本套系列丛书的编写,力图充分吸收当前教改的成果,贯彻现代教育思想,充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用,尤其突出对学生的学法指导。本书对学科知识的辅导,既注意围绕各科的教学大纲,对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解,并安排相应的练习;又注意适应当前教改的要求,注意向新的考试内容靠拢,突出知识学习的迁移和综合。"学习指导"、"讲解设计"、"练习设计"是本系列丛书的基本栏目。"学习指导"梳理本课的知识要点或介绍学习方法,"讲解设计"对本课中的知识重点、难点进行阐释,"练习设计"根据本课的知识点安排相应的练习。练习又按"识记与理解"、"巩固与运用"、"拓展与迁移"三个层级进行设计。在语文中,还设计了"写作与欣赏",题目强调典型性和少而精。

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色。一般的同类书都以单元为编写单位,虽与教材同步,但与课时不同步,操作上的缺陷是显而易见的。本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果,以课时为单位进行编写,并且每课时安排为一页两面,课时与课时之间不转页,这必将会给使用者带来很大的方便。

为了保证编校质量,本系列丛书设立了责任验题人制度。除加强正常的三审三校外,所有的题目都请专人责任验题,以确保题目以及解题过程和答案的准确性。

作为师范大学出版社,我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物。我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的"向45分钟要效益"丛书一样,得到广大读者的青睐;也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见,以便我们进一步修订,使其日臻完善,成为名牌产品。

再版前言

依据中学各科教学大纲，配合现行教材和素质教育的要求，结合当前教学改革的实际需要，我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书。

初三数学分册的编写，力求做到体现和反映以下“优化”的特色：

$\boxed{\text{教学进度与课时安排优化}}$ 将初三数学的教学内容按实际教学的需要拆分为65课时，习题课和阶段小结课也合理安排穿插其中，重要章节及各章节内的重难点内容，进行了合理的分散处理。这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考。

$\boxed{\text{知识内容与教法学法优化}}$ 每课时的知识内容突出重点，对概念和规律的介绍简洁明了，知识体系的梳理纲目清晰，注意前后承接过渡与迁移，覆盖相关的知识点。根据认知规律进行讲解设计，例题讲解循序渐进，先分析引导、详细解答，后提示思路与方法，放手让读者自行分析问题与解决问题。这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例，也可作为学生预习的主要内容。

$\boxed{\text{练习内容与题量梯度优化}}$ 练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高，与社会生产、生活相结合的题较多，逐步向学科之外延伸。题型全面，新题较多，加大了主观题的份量。题量适中，难度梯度合理，有利于分类教学。每一课的“讲解设计”分为两个层次、“练习设计”分为三个层次，教学使用时有了较大的选择余地，因而普适性就大大提高。

$\boxed{\text{栏目设置与编排方式优化}}$ 全书栏目设置精当，一目了然。每课时的讲解与练习各占一页，便于进度的把握与对教学效果的实时反馈；书后的参考答案可供测评时灵活使用；大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯。

我们期望由江苏一线特、高级教师编写的这本初三数学的教学优化设计能为初中数学教学提供有益的参考。

编　者

2002.6

目　录

代数部分

几何部分

01 一元二次方程和解法

【概念与规律】

1. 一元二次方程的一般形式为$ax^2+bx+c=0$,其中 $a\neq0$,另外还有一元二次方程的不完全形式,它们是 $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$, $ax^2=0$,但不论哪种形式都有 $a\neq0$.

2. 一元二次方程有四种解法,其中前两种解法分别是:①直接开平方法;②配方法.

3. 直接开平方法适用于 $ax^2+c=0(a\neq0)$以及 $a(x+k)^2=m(a\neq0, m\geqslant0)$的方程.

4. 配方法解一元二次方程的具体步骤是:①将方程化为 $ax^2+bx=c$ 的形式;②两边都除以二次项系数,把二次项系数化为 1;③两边都加上一次项系数一半的平方;④把左边写成完全平方式,右边算出结果;⑤当右边是非负数时,用直接开平方法解出这个方程.

但配方法解方程较繁,所以,在没有指明用这种方法时,一般不用.

【讲解设计】·重点与难点

例 1 下列是一元二次方程的是(　　).

(A)$mx^2+m^2x=7$

(B)$\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2}{3}$

(C)$(x+4)(x-2)=x^2$

(D)$(m-3)x^2+4x+1=0(m\neq3)$

分析 (A)中未交待 $m\neq0$;(B)不是整式方程;(C)整理后未知数最高次数是 1.

解 应当选(D).

例 2 用配方法解方程:

$$x^2-\frac{1}{2}x-1=0.$$

分析 把常数项移到方程的右边再按配方法解方程的步骤进行.

解 $x^2-\frac{1}{2}x=1$,

$x^2-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{4})^2=1+(\frac{1}{4})^2$,

$(x-\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16}$,

$x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$,

$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}, x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

例 3 用配方法解方程:

$$-3x^2-2x+1=0.$$

分析 通过本例,学习利用配方法和直接开平方法解一元二次方程,注意把二次项系数化为 1.

解 $-3x^2-2x=-1$,

$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$,

$x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2$,

$(x+\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$.

$\therefore x_1=\frac{1}{3}, x_2=-1$.

【讲解设计】·思路与方法

例 4 用配方法解下列方程:

(1)$x^2+2=2\sqrt{3}x$;

(2)$0.4x^2-0.8x=1$.

提示 (1)正确移项后再配方;(2)把二次项系数化为 1(两边都乘以 5).

例 5 用配方法解方程:

$$\frac{x^2-1}{3}-3x=\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{8}.$$

提示 把方程整理成 $ax^2+bx=c$ 的形式后再配方.

例 6 用配方法解方程:

$kx^2+3x-2=kx+x^2$($k>1$, k 是已知数).

提示 把方程整理成 $ax^2+bx=c$ 的形式.用配方法解此方程时,要注意右边必须先化简.

例 7 用配方法解方程:

$x^2-px+q=0$(p,q 是已知数).

提示 用配方法解此方程时,要讨论右边代数式的正负性.

【练习设计】·识记与理解

1. 填空：

(1)关于 x 的方程 $(m+1)x^2+4mx-4=0$ 是一个一元二次方程，则 m 的取值范围是________，一次项系数是________，常数项是________；

(2)关于 x 的一元二次方程 $(3-x)(3+x)-2a(x+1)=5a$，化成一般形式是____________；

(3) $0.8x^2+x+0.3=0.8(x+\_\_)^2+\_\_$；

2. 选择：

(1)以下各方程中，一定是关于 x 的一元二次方程的是(　　).

(A) $3x^2+5x=3x(x-1)$

(B) $ax^2+bx+c=0$

(C) $(m^2+1)x^2-5x=7$

(D) $\frac{1}{x}+5x^2-3=0$

(2)方程 $\frac{1}{3}x^2-x-4=0$ 左边配成一个完全平方式后，得到的方程是(　　).

(A) $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{38}{4}$　(B) $(x-\frac{3}{2})^2=-\frac{38}{4}$

(C) $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{57}{4}$　(D)以上选项都不对

3. 填空：

(1) $x^2+(\quad)x+81=(x+\quad)^2$；

(2) $2x^2-\frac{5}{3}x+(\quad)=2(x-\quad)^2$；

(3) $x^2+px+(\quad)=(x+\quad)^2$；

(4) $(x-3)^2=5$ 的根是__________；

(5)当 a ______时，方程 $(x-1)^2=a$ 在实数范围内有解.

4. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+2x-7=0$；

(2) $2x^2+3=7x$；

(3) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=2$.

5. 若 α 和 β 是方程 $(x+2)^2=9$ 的两个根，求 $|\alpha|+|\beta|$ 的值.

6. 设方程 $(x-1)^2=5$ 的正根为 α，方程 $(x+1)^2=5$ 的负根为 β，求 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的值.

【练习设计】·巩固与掌握

7. 用配方法解方程：

$x^2+(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$.

8. 用配方法解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2+mx+2=mx^2+3x(m\neq 1)$；

(2) $(m-5)^2x^2+2mx=10x-1(m\neq 5)$.

9. 已知：关于 x 的方程 $x^2+ax-4=0$ 的一个根为 -2，求 a 值并求出另一根.

10. 已知方程 $3(x-2)^2=12$ 的解也是方程 $x^2-2x=a-3$ 的解，求代数式 a^2-2a-3 的值.

11. 若 $9a^{m^2-4m+4}$ 与 $5a^9$ 是同类项，求代数式 $\frac{|m-1|}{2}+\frac{m-1}{2}+1$ 的值.

12. 设 $|m-3|+|n-4|=0$，解关于 x 的方程：$x^2-6x+9=m^2+n^2$.

13. 已知：$m^2-2m+1=0$，

(1)求出 m 的值；

(2)在有理数范围内将 $x^2-3x+(1-m)$ 因式分解.

14. 给出四个方程 $x^2+4x-4=0$，$x^2+4x-4=0$，$x^2-4x+4=0$，$x^2-4x-4=0$.

(1)这四个方程中，哪些方程的左边是完全平方式？写出这些方程.

(2)分别求出(1)中所写的各个方程的根.

(3)分别将(2)中所求出的各个方程的根在数轴上表示出来，并求出它们所表示的点之间的距离.

【练习设计】·拓展与迁移

15. 设 $a\neq 0$，a，b，c 是已知数，并且 $b^2-4ac\geqslant 0$，试用配方法解方程：

$ax^2+bx+c=0$.

16. 求证：

(1)对任何实数 x，$6x^2-12x+18$ 永远大于0；

(2)对任何实数 x，代数式 $-12x^2-3x-5$ 的值永远是负值.

02 一元二次方程解法

【概念与规律】

1. 一元二次方程有四种解法：①直接开平方法；②配方法；③公式法；④因式分解法．其中常用的是公式法和因式分解法．

2. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的求根公式是 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．用公式法解一元二次方程时必须注意：

(1)方程一定要整理成一般形式．

(2)一般先计算 b^2-4ac，然后再计算 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，要特别记住代入时不可丢掉各项的符号．

3. 用因式分解法解一元二次方程时，右边必须为0．

4. 当二次项系数为负数时，用“-1”乘方程的各项，使二次项系数化为正数．

5. 若方程有等根，则方程的根通常写成：$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$．

【讲解设计】·重点与难点

例1 方程 $3x^2-2x=5$ 化成一般形式后，a,b,c 的值是(　　)．

(A) $a=3,b=2,c=5$

(B) $a=3,b=-2,c=5$

(C) $a=3,b=-2,c=-5$

(D) $a=3,b=2,c=-5$

分析 (A) b,c 的符号都错；(B) c 的符号错；(D) b 的符号错．

解 应选(C)．

例2 解方程：

$3x^2+5x=4x(x+3)-2$．

分析 将方程化为一般形式后，再将二次项系数化为正．

解 将原方程整理，可得

$$x^2+7x-2=0.$$

这里 $a=1,b=7,c=-2$．

$b^2-4ac=49-4\times1\times(-2)=57$．

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-7\pm\sqrt{57}}{2}$．

$\therefore x_1=\dfrac{-7+\sqrt{57}}{2},x_2=\dfrac{-7-\sqrt{57}}{2}$．

例3 解方程 $(x-2)(x-3)=6$．

分析 该方程右边不是0，不符合因式分解的形式，必须整理成右边为0的形式．

解 将原方程整理，可得

$x^2-5x=0$，

$x(x-5)=0$，

$x=0$ 或 $x-5=0$，

$\therefore x_1=0,x_2=5$．

例4 解方程 $x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}x+\sqrt{6}=0$．

分析 将方程整理成一般形式后，再运用因式分解法．

解 $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，

$x-\sqrt{2}=0$ 或 $x-\sqrt{3}=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{3}$．

例5 解关于 x 的方程：

$x^2-2ax+a^2=0$．

分析 左边可因式分解，但要注意这个方程有等根．

解 $(x-a)^2=0$，

$\therefore x_1=x_2=a$．

【讲解设计】·思路与方法

例6 解方程：

(1) $2x^2=(2+x)\sqrt{3}+4x$；

(2) $(2y-1)^2=3(1-2y)$．

提示 (1)将方程整理成一般形式后，运用公式法；

(2) $1-2y=-(2y-1)$，把 $(2y-1)$ 当作一个整体，移项后运用因式分解法．

例7 已知 $2x^2-5xn-3n^2=0\ (n\neq 0)$，求 $\dfrac{x-n}{6x-5n}$ 的值．

提示 将已知条件看成关于 x 的方程，解出 x，然后代入到 $\dfrac{x-n}{6x-5n}$ 中．

【练习设计】·识记与理解

1．判断题.

(1)在 $3x^2-2x-7=0$ 中，$a=3$，$b=2$，$c=7$．（　　）

(2)解方程：$t^2=t$，得 $t=1$．（　　）

(3)由 $(x+1)(x-3)=3$，可得 $x+1=3$ 或 $x-3=3$．（　　）

(4)方程 $x^2=0$ 的解只有一个，是 $x=0$．（　　）

2．解方程 $2(5x-1)^2=3(5x-1)$ 的最适当的方法是(　　).

(A)直接开平方法　　(B)配方法

(C)公式法　　(D)因式分解法

3．用适当方法解下列方程：

(1)$x^2-x=1$；

(2)$(y+\sqrt{2})^2=4\sqrt{2}y$；

(3)$-3t^2-2t+4=0$；

(4)$\frac{(3x-2)^2}{3}=\frac{2-3x}{4}$；

(5)$(x-5)^2-17(x-5)+30=0$；

(6)$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$(a，b 是已知数，且 $ab\neq 0$).

4．若 m 满足 $(m+1)(m-1)=2\sqrt{2}m$，求关于 x 的方程 $(x+m)^2=0$ 的解.

5．当 x 为何值时，代数式 x^2+6x+5 与 $x-1$ 的值相等？

6．已知 $y=x^2-3x+2$，当 x 为何值时，y 的值等于 0？

【练习设计】·巩固与掌握

7．解方程：$x^2-3|x|-4=0$.

8．解关于 x 的方程：

$x^2-2x+k(x^2-1)=0(k\neq -1)$.

9．已知 x，y 互为相反数，且 $(x+1)^2+(y+1)^2=4$，求 x 和 y 的值.

10．若最简根式 $\sqrt{m^2-7}$ 与 $\sqrt{8m+2}$ 是同类根式，求 m 的值.

11．当 x 为何值时，分式 $\frac{x^2-2x-3}{|x|-3}$ 的值为 0？

12．在 Rt△ABC 中，$AB=7.5$，$\angle ACB=90°$，$BC:AC=3:4$，求 BC 和 AC 的值.

13．已知直角三角形两边的长是方程 $x^2-16x+55=0$ 的两个根，求第三边的长.

14．已知：三角形两边的长分别是 3 和 4，第三边是方程 $x^2-6x+5=0$ 的根.

(1)求出这个三角形的周长；

(2)判别这个三角形的形状；

(3)求出这个三角形的面积.

15．已知 x，y 都是实数，且 $|x^2-3x+2|+y^2-2y+1=0$，求 x，y 的值.

16．△ABC 中，D 在 AC 上，且 $\angle ABD=\angle C$．若 $AB=\sqrt{10}$，$DC=3$．求 AD 和 AC 的长.

17．已知：方程 $x^2-2x+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=0$ 的两根是 a 和 b，方程 $x^2-4=0$ 的正根是 c，试判断以 a，b，c 为边的三角形是否存在？

18．在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，延长 CB 到 D，使 $BD=AB$，连结 AD.

(1)设 $AC=x$，试用 x 的代数式表示 BD 和 BC 的长；

(2)若 $AD=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，求 AC 和 BD 的长.

19．已知：$a>b$，且有 $3a^2+5a-1=0$，$3b^2+5b-1=0$.

(1)问 a，b 是不是方程 $3x^2+5x-1=0$ 的根？

(2)求 a 和 b 的值.

20．已知：关于 x 的方程 $x(x-k)=2-k$ 的一个根为 2.

(1)求 k 的值；

(2)求方程 $2y(2k-y)=1$ 的解.

【练习设计】·拓展与迁移

21．方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根是 2，另一根大于 0，而且是方程 $(x+4)^2=3x+52$ 的解．求 a，b 的值.

22．已知 a 是方程 $x^2-3x-1=0$ 的一个正根，求 $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a}}}$ 的值.

03　一元二次方程的根的判别式(一)

【概念与规律】

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$：

(1)$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不等实数根.

(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等实数根.

(3)$\Delta<0\Leftrightarrow$方程无实数根.

(4)$\Delta\geqslant0\Leftrightarrow$方程有两个实数根.

2. 根的判别式的作用：

(1)不解方程，判别一元二次方程根的情况.

(2)证明方程有无实数根.有无相等的实数根.

(3)已知根的某些条件，确定方程中已知字母的取值或取值范围.

3. 运用根的判别式时的注意点：

(1)方程必须是一般形式，且 $a\neq0$.

(2)有等根时，该方程的两根为 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

【讲解设计】·重点与难点

例 1　不解方程，判别根的情况：

(1)$x^2-x-7=0$；

(2)$5x^2=2(x-10)$；

(3)$(3+2\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1=0$.

分析　(1)直接运用根的判别式；(2)整理成一般形式后再运用根的判别式；(3)直接运用根的判别式时，要注意根式运算的准确性.

解　(1)$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-7)=29>0$.

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

(2)将原方程整理，可得

$5x^2-2x+20=0$，

$\Delta=(-2)^2-4\times5\times20=-396<0$，

$\therefore$原方程无实数根.

(3)$\Delta=[-2(1+\sqrt{2})]^2-4\times(3+2\sqrt{2})\times1$

$\quad=4(3+2\sqrt{2})-4(3+2\sqrt{2})=0$.

$\therefore$原方程有两个相等的实数根.

例 2　当 k 为何值时，方程 $(x-1)(x-2)=k$ 有两个相等的实数根？求出这时方程的根.

分析　将原方程整理为一般形式后，利用 $\Delta=0$，求出 k 值，进而求出方程的根.

解　将原方程整理，得

$x^2-3x+(2-k)=0$.

$\Delta=(-3)^2-4\times1\times(2-k)=1+4k$.

要使原方程有等根，必须 $\Delta=0$，

即 $1+4k=0$，

$\therefore k=-\dfrac{1}{4}$.

此时，$x_1=x_2=\dfrac{3}{2}$.

例 3　关于 x 的一元二次方程 $ax^2-3x+1=0$ 有两个实数根，求 a 的取值范围.

分析　一元二次方程有两个实数根，则 $\Delta\geqslant0$，同时，注意二次项系数不为 0.

解　$\Delta=(-3)^2-4\times1\times a=9-4a$，

$\because$原方程有两个实数根，

$\therefore\Delta\geqslant0$，且 $a\neq0$，即

$9-4a\geqslant0$，且 $a\neq0$.

$\therefore a\leqslant\dfrac{9}{4}$且 $a\neq0$.

【讲解设计】·思路与方法

例 4　已知关于 x 的方程 $(k-2)x^2+k=(2k-1)x$ 有两个不等的实数根，求 k 的范围.

提示　将方程整理成一般形式后，运用 $\Delta>0$，同时注意 $k-2\neq0$.

例 5　若关于 x 的方程 $x^2+2x=m+9$ 无实数根，求证：关于 y 的方程 $y^2+my=2m-5$ 一定有实数根.

提示　由 $x^2+2x=m+9$ 无实根，推出 m 的取值范围，在这个范围下，证明 $y^2+my=2m-5$ 的 $\Delta>0$.

【练习设计】·识记与理解

1. 填空：

(1)若关于 x 的方程 $x^2-mx+4=0$ 有两个相等的实数根，则 $m=$_______；

(2)若 $m+5=0$，则一元二次方程 $x^2-2x-m=0$的根的情况是______；

(3)关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2x+1=0$ 有实数根，则 a 的取值范围是_________；

(4)若 a，c 异号，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是______.

2. 选择：

(1)有方程：①$8x^2=3x-1$；②$3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$；③$6x^2-5x=2$. 其中有两个相等的实数根、没有实数根和有两个不等实数根的方程依次是(　　).

(A)①②③　　(B)②③①

(C)②①③　　(D)③②①

(2)当 $k\geqslant-\frac{1}{4}$时，方程$(k-2)x^2-(2k-1)x+k=0$ 的两根的情况是(　　).

(A)有两个不相等的实数根

(B)有两个实数根

(C)没有实数根

(D)以上说法都不正确

3. 设方程 $ax^2-3x-3=0$ 有两不等实根，求 a 的取值范围.

4. 当 k 取怎样的实数时，才能使方程$(k-4)x^2\ \ (2k-1)x+k=0$ 有两个相等的实根？求出这时方程的根.

5. 求证：关于 x 的方程 $k^2(x^2+1)-2kx+x^2+4=0$ 一定无实数根.

6. 已知：关于 x 的方程$x^2+\sqrt{m}x+n=0$ 的根的判别式的值是 $n(n\neq0)$，求$\frac{m}{n}$的值.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x+n=1$ 有两个不相等的实数根，试化简：$|n-2|+n-3$ 的值.

8. 已知关于 x 的方程$x^2+4x+p+q=0$ 和 $x^2+2x+p=0$ 都有等根.

(1)求 p，q 的值；

(2)求 $2p+q$ 的值.

【练习设计】·巩固与掌握

9. 在 Rt△ABC 中，两直角边 a，b 的值分别为 3 和 4，斜边为 c.

(1)求 c 的值；

(2)求证关于 x 的方程$x^2-(c+1)x+(a+b)=0$ 有两个不相等的实数根.

10. 已知：a，b 为正数，且关于 x 的方程$(a^2+b^2)x^2+2a(a+b)x+b(a+b)=0$有相等的实数根. 求证：$a=b$.

11. 已知：$\sqrt{a+1}+\sqrt{(b-1)^2}=0$，试证明：关于 x 的方程$ax^2+bx=abc^2$ 一定有两个不相等的实数根.

12. 已知：关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个相等的实数根，且关于 x 的方程 $x^2-2x-b=0$ 的一根为 3. 求 a，b 的值.

13. 如图 03-1，数轴上表示的是 m 的取值范围，试判别方程 $mx^2-2mx+(m-1)=0$ 的根的情况.

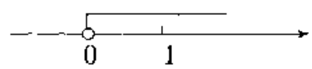

图 03-1

14. 已知：$p>0$，且关于 x 的方程 $x^2+px+1=0$ 有等根.

(1)求 p 的值；

(2)试判别关于 x 的方程 $x^2+x+p+a^2=0$ 的根的情况.

15. 若方程 $x^2+4x+m=0$ 有两个不等实根，方程 $x^2+2x+m=0$ 无实根，求 m 的取值范围.

【练习设计】·拓展与迁移

16. 设 a，b，c 互不相等，求证：关于 x 的方程$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ 没有实数根.

17. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根的判别式 $\Delta=(a-c)^2$，求证：系数 a，b，c 必满足 $b^2=(a+c)^2$.

18. 若关于 x 的方程$x^2+px+q=0$ 有等根，且这两根与关于 x 的方程 $x^2-q^{-1}x+q^{-1}=0$ 的两根互为倒数.

(1)方程 $x^2-q^{-1}x+q^{-1}=0$ 也有等根吗？

(2)求出 q 的值；

(3)求出 p 的值.

04　一元二次方程的根的判别式(二)

【概念与规律】

1. 一元二次方程的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 在初中数学里有着极其广泛的应用:

(1)解决因式分解的有关问题.若一个二次三项式是完全平方式,则它对应的一元二次方程的根的判别式 $\Delta=0$.

(2)解决其他的代数与几何的有关问题.

2. 运用根的判别式时要注意:

关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根和有实数根的区别在于:若有两个实数根,则 $\Delta\geqslant0$,且 $a\neq0$. 若有实数根,则分两种情况:①$a\neq0,\Delta\geqslant0$;②$a=0$.

【讲解设计】·重点与难点

例1　关于 x 的方程 $(1-a)x^2+2x+2=0$ 有实数根,求 a 的取值范围.

分析　由于方程有实数根,因此需要分二次项系数等于0和二次项系数不等于0两种情况讨论.

解　∵原方程有实根,

∴(1)$1-a=0$;

(2)$\begin{cases}1-a\neq0,\\2^2-4\times2\times(1-a)\geqslant0.\end{cases}$

由(1)得 $a=1$,此时,方程有解 $x=-1$;

由(2)得 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$,且 $a\neq1$.

综合(1)和(2),a 的取值范围是 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$.

例2　a,b,c 分别是△ABC 三边的长,且关于 x 的方程 $b(x^2-1)-2ax+c(x^2+1)=0$ 有两个相等的实数根.求证这个三角形是直角三角形.

分析　将一元二次方程整理成一般形式后,根据方程有相等的实数根,得出 $\Delta=0$,然后推出两条较小边的平方和等于最大边的平方,根据勾股定理的逆定理,得出要证的结论.

证明　将原方程整理,得

$(b+c)x^2-2ax+(c-b)=0$.

∵原方程有两个相等的实数根,

∴$\Delta=0$,即 $(-2a)^2-4(b+c)(c-b)=0$.

∴$a^2+b^2=c^2$.

∴△ABC 是直角三角形.

例3　关于 x 的二次三项式 $x^2+mx+m+8$ 是一个完全平方式,求 m 的值.

分析　一个二次三项式是完全平方式,则它对应的一元二次方程的根的判别式 $\Delta=0$. 即 $m^2-4(m+8)=0$. ∴$m_1=8,m_2=-4$.

【讲解设计】·思路与方法

例4　已知:△ABC 中,$AB=AC=m$,$BC=n$,求证:关于 x 的方程 $4x^2-8mx+n^2=0$ 一定有两个不相等的实数根.

提示　先计算出 $\Delta=16(2m+n)(2m-n)$,运用三角形两边之和大于第三边,然后证出 $\Delta>0$.

例5　设 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

求证:根的判别式 $\Delta=(2ax_0+b)^2$.

提示　由已知条件得到 $ax_0^2+bx_0=-c$,而 $(2ax_0+b)^2=4a^2x_0^2+4abx_0+b^2=4a(ax_0^2+bx_0)+b^2=-4ac+b^2=\Delta$.

例6　m 是什么数时,$6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3$ 能在有理数范围内分解成两个一次因式的积?

提示　如果将原式按 x 的降幂排列,那么它成了一个关于 x 的二次三项式,要能在有理数范围内分解成两个一次因式的积,则它对应的一元二次方程的根的判别式一定是完全平方式,当一个二次三项式是完全平方式时,它对应的一元二次方程的根的判别式为0.

例7　已知:a,b,c 是△ABC 的三边长,方程 $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ 有两个相等实根,求证:△ABC 是正三角形.

提示　由已知条件得 $4(a+b+c)^2-4\times3(a^2+b^2+c^2)=0$,整理后可得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

【练习设计】·识记与理解

1．填空题：

(1)关于 x 的二次三项式 $x^2-2mx=-1$ 是一个完全平方式，则 $m=$______.

(2)关于 x 的二次方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 无实数根，则 k 的最小正整数的值是______.

(3)若关于 x 的方程 $kx^2+(2k-3)x+k-4=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是______；若该方程有实数根，则 k 的取值范围是______.

(4)已知 a,b 是△ABC 的两边，且方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 有等根，则 a,b 所对的角之间的大小关系是______.

(5)关于 x 的方程 $x^2-x=x-m$ 有两个相等的实数根，且分式 $\frac{x-4}{x^2-3x+m}$ 有意义，则 $m=$______，x 的取值范围是______.

2．选择题：

(1)关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 无实根，则方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的根的情况是(　　).

(A)有两个不相等的实数根或一个实数根

(B)有两个相等的实数根

(C)无实根

(D)有无实根不能确定

(2)在等腰△ABC 中，$a=b=4$，$c>a$，则关于 x 的方程 $x^2+\frac{a+b}{2}x+c=0$ 的根的情况是(　　).

(A)没有实数根

(B)有两个实数根

(C)有两个不等实数根

(D)有两个相等实数根

3．已知关于 x 的方程 $x^2-2nx+n^2-1=0$，

(1)该方程的根的判别式是一个完全平方式吗？

(2)求出 $n=0$ 时方程的两根.

4．已知斜边为 1 的直角三角形的两直角边分别为 a 和 b.

(1)求 a^2+b^2 的值；

(2)求证：关于 x 的方程 $x^2-2(a-b)x-4ab+\frac{3}{4}=0$ 一定有两个不相等的实数根.

【练习设计】·巩固与掌握

5．已知 a,b,c 是△ABC 的三边.

(1)若关于 x 的方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 有等根，求证：$a=b$；

(2)若关于 x 的方程 $x^2+2ax+(c^2-b^2)=0$ 有等根，求证：该三角形是直角三角形；

(3)若关于 x 的两个方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 和 $x^2+2ax+(c^2-b^2)=0$ 都有等根，试判断△ABC 的形状.

6．设 a,b,c 都是正数，且关于 x 的方程 $(a+b)x^2-4cx+(a+b)=0$ 有等根，求证 c 是 a 与 b 的平均数.

7．已知 a,b,c 是△ABC 的三边，且关于 x 的两个方程 $x^2+2bx+c^2=0$ 和 $x^2+2ax+b^2=0$ 都有等根．试求∠ABC 的度数.

8．关于 x 的方程 $10x^2+6xm-14x=4m-5-m^2$ 有实数解.

(1)求出 m 的值，并解此方程；

(2)求证：以 $|m|$ 及方程的两根为边的三角形一定是等边三角形.

9．已知△ABC 的三边分别为 a,b,c，且 $a=c$．若关于 x 的方程 $x(x-a)-cx+b^2=0$ 有等根，求该三角形三内角的度数.

10．已知在 Rt△ABC 中，斜边 c 与斜边上的高 h 恰为方程 $5x^2-27x+12=0$ 的两个根.

(1)求 c 与 h 的值；

(2)若 a,b 恰为该直角三角形的两直角边，试判断关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ch=0$ 的根的情况.

【练习设计】·拓展与迁移

11．已知关于 x 的方程 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根，$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根，$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 无实根.

(1)用 a 的代数式表示 b；

(2)求 a 的取值范围.

05　一元二次方程根与系数关系(一)

【概念与规律】

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$. 特别地,设 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-p$,$x_1x_2=q$.

2. 根与系数关系的应用大致有七个方面,其中前三个应用是:

(1)已知方程的一根,求另一根及待定系数的值.

(2)已知一个方程,不解它,求有关根的代数式的值,其常用公式是① $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;② $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$;③若 x_1 是 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,则 $ax_1^2+bx_1+c=0$.

(3)已知方程的两根为 x_1,x_2,写出这个一元二次方程(二次项系数为1),其形式为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

3. 运用根与系数关系时要注意:

(1)方程必须是一般形式.

(2)方程的根的判别式 Δ 必须是非负数.

【讲解设计】·重点与难点

例1　已知方程 $x^2-2px+3=0$ 的一根为2,求另一根及 p 的值.

分析　设方程的另一根为 x_2,则由根与系数关系,可求出另一根及 p 的值.

解　设方程的另一根为 x_2,则

$$\begin{cases}2+x_2=2p,\\2x_2=3,\end{cases}\text{解之,得}\begin{cases}x_2=\frac{3}{2},\\p=1\frac{3}{4}.\end{cases}$$

例2　已知方程 $x^2+4x=6$,不解方程,求

(1)两根的平方和;

(2)两根的倒数和;

(3)两根差的绝对值.

分析　根据根与系数关系,可求得两根和与两根积,因而只需把要求的代数式转化为两根和与两根积的形式.但要首先将方程化为一般形式.

解　原方程化为:$x^2+4x-6=0$.

设方程的两根为 x_1,x_2,则

$$\begin{cases}x_1+x_2=-4,\\x_1x_2=-6.\end{cases}$$

(1)两根的平方和 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-4)^2-2\times(-6)=28$.

(2)两根的倒数和 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$.

(3)两根差的绝对值 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-4)^2-4\times(-6)}=2\sqrt{10}$.

例3　已知方程的两根为 $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$,$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$,试写出这个一元二次方程.

分析　根据根与系数关系可立即写出这个方程.

解　所求的方程为 $x^2-(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2})x+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=0$,即 $x^2+x-\frac{1}{2}=0$ 或 $2x^2+2x-1=0$.

【讲解设计】·思路与方法

例4　已知关于 x 的方程 $x^2-x-k=0$ 的两实根为 α、β,其中 k 满足 $(k+1)(k-2)=0$,试求:

(1) $(\alpha-2)(\beta-2)$ 的值;

(2) $\frac{1}{\alpha^2+1}+\frac{1}{\beta^2+1}$ 的值;

(3) $3\alpha^2-2\alpha+\beta+3$ 的值.

提示　先求出 k 的值,但要注意必须使方程 $x^2-x-k=0$ 的根的判别式 $\Delta\geqslant0$. 对于(3)还需运用方程的定义,得到 $\alpha^2=\alpha+k$,然后代入 $3\alpha^2-2\alpha+\beta+3$ 中,化简得 $\alpha+\beta+3+3k$,再运用根与系数关系,便可求得结果.