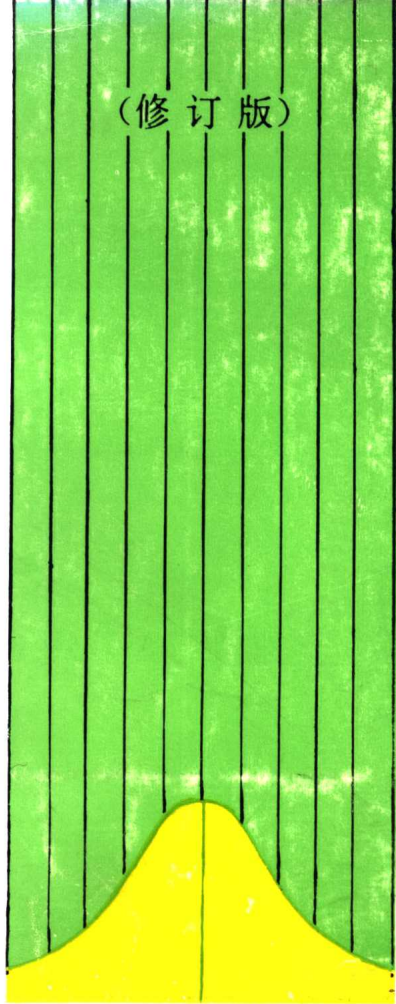


盛骤 谢式千 编

(修订版)



线性代数
与数理统计

浙江大学出版社

线性代数与数理统计

(修订版)

盛 骤 谢式千 编

浙江大学出版社

(浙)新登字10号

内 容 简 介

本书是高等数学后继的数学课程教材。

全书分两部分共七章。前两章为线性代数部分，有矩阵及线性方程组；矩阵的特征值及二次型。后五章为数理统计部分，有概率论的基本知识；随机变量的分布与数字特征；参数估计；假设检验；线性回归和方差分析。

本书深入浅出，有较多的例题，便于自学。每章有一定数量的习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等学校的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

线性代数与数理统计

(修订版)

盛 骤 谢式千 编

责任编辑 贾吉柱

浙江大学出版社出版

浙江良渚印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

850×1168 32开 10.875印张 272千字

1993年6月第2版 1993年6月第1次印刷

印数：13001—16000

ISBN 7-308-00050-8

O·011 定价：4.40元

前 言

本书分两部分。线性代数部分内容有矩阵及其运算、分块矩阵、线性方程组、矩阵的特征值及二次型；数理统计部分内容有概率论的基本知识、随机变量的分布与数字特征、参数估计、假设检验、线性回归分析及单因素方差分析。本书取材适当，便于教学。每章配有习题，书末附有答案。

本书可作为高等学校的线性代数与（或）数理统计课程的教材。使用者也可视学时及教学要求的不同删去其中的某些内容。例如，线性回归分析、方差分析两者内容相对独立，使用者可按要求选用。

本书也可作为工程技术人员的参考书。

书中插图由张礼明同志绘制。

本书承国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会委员周茂清教授审阅，对此，我们表示衷心的感谢。

对于书中的不足之处，恳切地希望读者提出宝贵的意见。

盛 骤 谢式千

1988年2月

目 录

前 言

线性代数部分

第一章 矩阵与线性方程组	(1)
§ 1 矩阵及其运算.....	(1)
§ 2 分块矩阵与矩阵的初等变换.....	(18)
§ 3 矩阵的秩.....	(37)
§ 4 线性方程组.....	(41)
§ 5 向量的线性独立性及齐次线性方程组解的结构	(55)
附录 行列式	(67)
习 题	(86)
第二章 矩阵的特征值与二次型	(93)
§ 1 n 维向量空间.....	(93)
§ 2 特征值与特征向量.....	(112)
§ 3 实对称矩阵的对角化.....	(123)
§ 4 实二次型.....	(130)
* § 5 线性变换.....	(139)
习 题.....	(150)

数理统计部分

第一章 概率论的基本知识	(158)
§ 1 随机事件.....	(158)

§ 2	频率与概率	(162)
§ 3	等可能概型(古典概型)	(167)
§ 4	条件概率	(170)
§ 5	事件的独立性	(174)
	习 题	(176)
第二章	随机变量的分布与数字特征	(179)
§ 1	随机变量	(179)
§ 2	离散型随机变量的概率分布	(180)
§ 3	分布函数, 连续型随机变量	(185)
§ 4	二维随机变量	(195)
§ 5	随机变量的独立性	(201)
§ 6	随机变量的数字特征	(204)
§ 7	贝努利大数定理及中心极限定理	(215)
	习 题	(220)
第三章	参数估计	(226)
§ 1	总体、样本	(226)
§ 2	统计量及其分布	(228)
§ 3	参数的点估计	(235)
§ 4	参数的区间估计	(243)
§ 5	正态总体均值与方差的区间估计	(246)
§ 6	单侧置信限	(252)
	习 题	(255)
第四章	假设检验	(259)
§ 1	假设检验	(259)
§ 2	正态总体均值和方差的假设检验	(266)
§ 3	分布拟合检验	(273)
	习 题	(280)
第五章	线性回归和方差分析	(284)

§ 1	线性回归	(284)
§ 2	线性假设的显著性检验及 b 的置信区间	(292)
§ 3	预测和控制	(294)
§ 4	方差分析	(297)
§ 5	正交试验设计	(306)
	习 题	(313)
附表 1	标准正态分布表	(315)
附表 2	泊松分布表	(316)
附表 3	t 分布表	(318)
附表 4	χ^2 分布表	(319)
附表 5	F 分布表	(321)
附表 6	正交表	(327)
	习题答案	(331)

线性代数部分

第一章 矩阵与线性方程组

§ 1 矩阵及其运算

(一) 矩阵的定义 矩阵产生于线性方程组的求解问题。我们知道,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

它的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

若 $\Delta \neq 0$, 则此方程组有唯一的一组解。若 $\Delta = 0$, 则在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

时, 此方程组是矛盾方程组, 无解。而在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

时, 此方程组有无限多组解。

讨论表明, 上述线性方程组解的情况与系数 a_{ij} 及常数项 $b_i (i, j = 1, 2)$ 有关, 即与数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

的结构有关。这就启发我们,对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

其中方程个数 m 不必等于未知数个数 n , 它的解的情况可归结于对下列数表结构的研究:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

于是产生了一个新的数学工具:矩阵。它的定义如下:

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} , $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ 排成的具有 m 个行、 n 个列的长方表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

称为 m 行、 n 列矩阵或 $m \times n$ 矩阵, 简称为矩阵。 $n \times n$ 矩阵又称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。矩阵中的数, 称为它的元素。

元素 a_{ij} 的两个足标 i, j 表示它处于矩阵的第 i 行与第 j 列交叉点处^①。例如, a_{12} 是处于第一行与第二列交叉点处的数。

矩阵常写成 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}) , 后一写法在毋需指出矩阵的行数和列数时使用。也常用一个大写字母表示一个矩阵。如矩阵 $A_{m \times n}$ 或矩阵 A 等。

^① 以后简称为 (i, j) 处元素为 a_{ij} 。

例1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $(2, 3, 1)$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 分别是 2

$\times 3$, 3×3 , 1×3 及 2×1 矩阵。

只有一个行与一个列的矩阵 $(a)_{1 \times 1}$, 约定它就是数 a :

$$(a)_{1 \times 1} = a$$

若 $(a_{ij}), (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 则称它们是**同型**的。

定义 二同型矩阵 $(a_{ij})_{m \times n}$, $(b_{ij})_{m \times n}$, 当且仅当它们所有对应位置的元素分别相等时, 即当且仅当 mn 个等式

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

成立时, 称这两个矩阵是**相等**的, 并记作

$$(a_{ij}) = (b_{ij})$$

定义(转置矩阵) 将 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行列互换, 得到的 $n \times m$ 矩阵, 称为 A 的**转置矩阵**, 记作 A' 或 A^T 。即若 A 具有(1.3)的形式, 则

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

显然

$$(A')' = A$$

例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, 则 $A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ 。

下面是一些常见的矩阵。

n 维列向量 鉴于 $n \times 1$ 矩阵在应用中的特殊性, 我们常用一小写字母表示它:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

它又称为 **n 维列向量**、 **n 维向量** 或 **n 元列**。它的第 i 行元素，又称为该向量的第 i 个分量^①。我们又常使用矩阵的转置，将 v 写成

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$$

以节省篇幅。显然， $v' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 为 $1 \times n$ 矩阵。 v' 可称为**行向量**。本书中，向量恒指列向量。

零矩阵 若 $m \times n$ 矩阵中的元素都等于零，则称它为 $m \times n$ **零矩阵**，记作 $0_{m \times n}$ 。特别，在行数、列数能自明时，简记为 0 ，简称为**零矩阵**。 $0_{n \times 1}$ 又称为**零向量**，用通常的零（即 0 ）来表示它。

实对称矩阵 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中的元素都是实数，并且

$$A' = A$$

则称 A 为**实对称矩阵**。

易见，实对称矩阵 $(a_{ij})_{n \times n}$ 中的元素，关于 a_{11}, \dots, a_{nn} 所在的**对角线**（称为**主对角线**）是对称的，即

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

例如， $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 分别是 2 阶和 3 阶实

对称矩阵。

三角矩阵 若 $A_{n \times n}$ 的主对角线下方的元素都等于零，就称 A

① 若把 $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 看成普通空间向量 $v_1 i + v_2 j + v_3 k$ (i, j, k 为相互垂直的单位

向量) 的一种表示法，则 n 维列向量就是普通空间向量的推广。

为**上三角矩阵**，若 $A_{n \times n}$ 的主对角线上方的元素都等于零，就称 A 为**下三角矩阵**。

例如 $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 分别是3阶上三角矩阵和

3阶下三角矩阵。

对角矩阵 在 $A_{n \times n}$ 中，若不在主对角线上的元素都等于零，则称 A 为**对角矩阵**。

例如，3阶矩阵 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都是对角矩

阵。一般， n 阶对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

常简记作

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

例如，上述两个3阶对角矩阵，可分别记作 $\text{diag}(-2, 2, 1)$ 和 $\text{diag}(3, 2, 0)$ 。

单位矩阵 主对角线元素都是1的 n 阶对角矩阵 $\text{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ ，称为 **n 阶单位矩阵**，记作 I_n ，或简记作 I 。

另外，我们还会遇到矩阵的行列式。其定义如下，设有方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，由此方阵的元素，且不改变相互位置构成的(n 阶)行列式，称为**矩阵 A 的行列式**，记作 $\det A$ 或 $|A|$ 。例如，设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 10 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 10 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

下面，我们来介绍矩阵的代数运算，这些运算使矩阵获得广泛的应用。

(二) 数乘矩阵，矩阵的加(减)法

定义 设 α 为一数， $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为一矩阵，则称 $m \times n$ 矩阵 (αa_{ij}) 为数 α 与矩阵 $A = (a_{ij})$ 的乘积，记作 αA 或 $A\alpha$ 即

$$\alpha A = \alpha(a_{ij})_{m \times n} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

定义 设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵，则称矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A + B$ ，即

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

对于一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 易知恒存在矩阵 $B = (-a_{ij})_{m \times n}$ ，使 $A + B = 0$ ，我们称 B 为 A 的**负矩阵**，记作 $-A$ ，即

$$-A = -(a_{ij}) = (-a_{ij})$$

有了负矩阵后，我们就把 A 与 $-B$ 之和，称为矩阵 A 与 B 之差，记作 $A - B$ ，即

$$A - B = A + (-B)$$

注意，矩阵的和、差运算只能在同型矩阵中进行。

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 。求 $4A$ ， $-A$ ， $A + B$ ， $B + A$ 及 $A - B$ 。

$$\text{解 } 4A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+(-5) & 4+1 \\ -3+2 & 0+(-1) & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B + A &= \begin{pmatrix} 3+2 & -5+1 & 1+4 \\ 2+(-3) & -1+0 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= A + B, \end{aligned}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-(-5) & 4-1 \\ -3-2 & 0-(-1) & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

零矩阵在矩阵加法中起着数 0 在数的加法中的作用, 即

$$A_{m \times n} + 0_{m \times n} = A_{m \times n}, \quad A_{m \times n} - A_{m \times n} = 0_{m \times n}$$

若用 α, β 表示数, A, B, C 表示同型的矩阵。容易验证, 以下性质成立:

$$A + B = B + A \quad (\text{交换律})$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{结合律})$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\text{分配律})$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\text{分配律})$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad (\text{结合律})$$

$$(\alpha A)' = \alpha A'$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

根据结合律, 遇到三个或三个以上矩阵相加时, 可以不加括弧, 即

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$$

例3 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ 求 $k\mathbf{a}$ (k 为常数) 及 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。

解 因 n 维列向量就是 $n \times 1$ 矩阵, 从而, 按数乘矩阵及矩阵加法的定义, 有

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)'$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)'$$

在 $n = 3$ 时, 上述结果就是通常空间向量关于数乘及加法两种运算的坐标表达式。因此, 这里所定义的矩阵的两种运算, 是通常向量的相应运算的推广。

(三) 矩阵与矩阵的乘积

定义 设 $A = (a_{ij})_{m \times p}$, $B = (b_{jk})_{p \times n}$ 则称矩阵 $C = (c_{ik})_{m \times n}$ 为矩阵 A, B 的乘积, 并记作 $C = AB$ 其中

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{jk} \quad (1.6)$$

$$i = 1, \cdots, m; \quad k = 1, \cdots, n$$

特别, 取 $A = A_{1 \times p} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)$, $B = B_{p \times 1} = (b_1, b_2, \cdots, b_p)'$ 按定义, AB 为 1×1 矩阵, 它是一个数, 按 (1.6) 式即有

$$(a_1, a_2, \cdots, a_p) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p \quad (1.7)$$

从而, 可将上述定义中 C_{ik} 用 (1.7) 写成更便于记忆的形式, 即

$$(a_{ij})_{m \times p} (b_{ij})_{p \times n} = (C_{ik})_{m \times n}$$

其中

$$C_{ik} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ip}) \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{pk} \end{bmatrix} \quad (1.6')$$

$$i = 1, \cdots, m, \quad k = 1, \cdots, n$$

(1.6') 式右方第一个矩阵是由 (a_{ij}) 的第 i 行元素所构成, 第二个矩阵是由 (b_{ij}) 的第 k 列元素所构成。

若将 $C = AB$ 中的元素都写出来就是

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^p a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^p a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^p a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^p a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^p a_{2j}b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^p a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^p a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^p a_{mj}b_{jn} \end{bmatrix}$$

注意，只有在 A 的列数等于 B 的行数时， AB 才有意义。乘积 AB 的运算，称为用 A 左乘 B ，或称用 B 右乘 A 。

例4 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 AB , BA , BC , $B'B$, $(AB)C$ 及 $A(BC)$ 。

解

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(注意 AB 不等于 BA)

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15 \cdot 1 + 15 \cdot (-1) & 15 \cdot 3 + 15 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) & 4 \cdot 3 + 12 \cdot (-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$