GAO DENG SHUXUE

# 高等数学复习指南及例题精解

旋俊雄 弋 玱 编

航空工业出版社

# 高等数学复习指南与例题精解

旋俊雄　弋　玐　编著

航空工业出版社

1994

（京）新登字161号

## 内 容 提 要

本书为高等数学的复习及解题指导书，全书共九章，分别介绍分析了基本概念、一元及二元的微积分学、空间解析几何、矢量代数、微分方程、级数及场论初步。每部分内容均含内容提要、典型题例及剖析、自我检测题及答案四部分。

本书是本、专科生和成人高校生学分考试、自学考试、准备考研的必备读物。也可供高校数学教师和数学爱好者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学复习指南与例题精解/旋俊雄，弋 玢主编. —北京：航空工业出版社，1994.

ISBN 7-80046-465-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 旋… Ⅲ. 高等数学-高等教育-试题
Ⅳ. O13-44

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里14号 100029）
北京医科大学印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷
开本：787×1092 1/32 印张：14.1875 字数：318千字
印数：1-6000 定价：9.80元

# 序　言

这本《高等数学复习指南与例题精解》，是旋俊雄先生和弋玜先生从近十年来全国工科院校的大量研究生考题中，挑选出来的比较典型的题目，并结合他们多年来从事高等数学的教学经验，精心编排和加以解说剖析而写成的书。是为学习《高等数学》与准备报考研究生的大学本科生、专科生、夜大生、函授生及自学《高等数学》的读者而编写的教学参考书。

本书具有以下几个特点：

1. 每章均含有内容提要、典型题例解法及剖析、自我检测题及答案四部分。

2. 题目覆盖面大，其内容涉及现行工科院校高等数学通用教材中的主要内容；题型多，有计算题、概念题、证明题、应用题。题目编排体现了由浅入深、循序渐进的原则。

3. 对所选题例，不只给出解法而且对很多题目在解题之前，还给予了简明的剖析，有的题目给出了几种解法，不少题目还给出了对解法的评注，并适时地指出解题时易犯的某些错误。

本书的主要内容是解题。当代著名数学家、杰出教育家乔治·波利亚(G·Polya，1887—1985)曾说："解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋；因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。……解题是一种本领，就象游泳、滑雪、弹钢琴一样；你只能够靠模仿和实践才能学到它。……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到

指导的作用。一种解题方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那末它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型。”我认为乔治·波利亚这些话是讲得极深刻的，并很赞赏他的这些见解。

阅读这本书有两种态度：一种是消极的阅读，从头到尾读完了事，自我检测题目也不认真去做；一种是读深读透，积极思考。如果你想读深读透，那就应该手边有纸有笔，要用笔来帮助你思考。也就是说，当你看完每一节的内容提要后，对每一个题目先把题意看清楚，不要马上去看本书的解法或证明，而是自己先思考一下：如何下手做此题并动手试解（或试证），如果自己解（证）不出，再去看本书对该题的剖析与解（证）法，看完后你还应该想一想，有没有更简便的解法或更美妙的证法？如果该题是你自己解（证）出来的，则可与本书的解（证）法作一对比，看哪种解（证）法更好？然后认真去做每一章的自我检测题目。如果读者能用这种积极的态度和方法来阅读此书，就不仅能够提高你的解题能力，而且能使你更好的理解、掌握《高等数学》的基本概念、基本理论、基本方法。

**李心灿**

1994 年 1 月　　于北京航空航天大学

（李心灿同志系中国数学学会理事，国家教委数学与力学教学指导委员会成员，北京航空航天大学教授。）

# 前　言

《高等数学》是各类大学的必修基础课。本科生要进一步复习、巩固;各类成人高校中有相当部分的学员期望经过单科复习获得高等数学的资格证书;而本科生报考硕士研究生也首先要通过高等数学的考试;还有众多意欲遨游数学王国的爱好者……。为满足所有这些读者的需要,我们编写了这本《高等数学复习指南与例题精解》。

本书是编者从近些年全国工科院校的大量研究生考题及一些国内外较有影响的刊物上的资料中,选出部分有启发性的典型题例,结合编者多年的高等数学教学经验,经统一编排并加以解说剖析而写成的。

本书内容涉及现行工科院校高等数学通用教材的全部内容,面向工科院校本科生、大专生、各类成人高校、夜大函授生及有意自学深造的读者以及各类大中专学校讲授高等数学的教师。本书有以下几个特点:

1. 选题来源广泛,故所选例题有广度及相当的深度,且具启发性。

2. 每部分内容均含内容提要、典型题例解法及剖析、自我检测题及解答四部分,读者可脱离高等数学教科书直接查阅参考。

3. 对所选题例不只给出剖析及多种解法,还尽可能地给出对解法的评价,并适时地指出学生易犯的错误。

4. 选题的编排,依照由浅入深、循序渐进的原则,以利于

读者智力的自我开发和提高。

本书在成书的过程中一直得到李心灿教授、李德英副总编的热情关注。李心灿教授又抽出宝贵的时间细心地指导并审阅了全部书稿。在此向二位老师致以衷心的感谢。

本书在编写过程中曾参阅过由赵镇西老师等编著的《高等数学复习解题指导》,由李恒沛、徐兵编著的《高等数学方法》及其他一些散见于国内外较有影响的数学刊物上的有关资料。对各位作者,恕不一一回复,仅在此一并致谢。

限于水平,对不足及错误之处,恳请读者批评指正。

**编者**

1994 年 1 月

# 目　录

# 第一章　函数、函数的极限及函数的连续性

## §1-1　函数

### 一、内容提要

（一）函数定义

函数是两个非空实数集合 $X$ 与 $Y$ 之间的一个映射。即当 $x\in X$ 时，按一定法则有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$ · $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量或函数。$X$ 称为函数 $f(x)$的定义域，$f(X)$表函数的值域。

（二）函数的几种特性

1. 有界性　若存在 $M>0$，对任意 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$在 $X$ 上是有界的。

2. 单调性　若对于定义域 $X$ 上的任意两点 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$）称 $f(x)$在 $X$ 上是单调增加（或单调减少）的。

3. 奇偶性　若定义域 $X$ 在 $x$ 轴上关于原点对称，当 $x\in X$ 时，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$为偶函数；当 $x\in X$ 时，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$为奇函数。而偶函数和奇函数的图形特点为：前者的图形对称于 $y$ 轴，后者的图形对称于原点。

4. 周期性　若存在正数 $T$，当 $x\in X$ 时，$f(x+T)=f(x)$，称 $f(x)$为周期函数。$T$ 称为函数 $f(x)$的一个周期。通常把具有上述性质的最小正数 $T$ 称为函数的周期。

（三）复合函数

设函数 $y=f(u)$，$u\in U$，$u=g(x)$，$x\in X$，若 $g(x)\subseteq U$，这时 $y$ 通过变量 $u$ 可表为变量 $x$ 的函数，称为 $x$ 的复合函数，记为 $y=f(g(x))$，$x$ 为自变量，$u$ 为中间变量。

注意，不是任何两个函数所构成的复合函数都有意义。

（四）反函数

设函数 $y=f(x)$，如果对于 $y\in Y$，有唯一确定的 $x\in X$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $Y$ 上确定了一个 $x$ 是 $y$ 的函数，称之为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上以字母 $x$ 表自变量，以字母 $y$ 表函数，所以又常常把 $y=f(x)$的反函数记为：　$y=f^{-1}(x)$.

在同一个坐标平面上，$y=f^{-1}(x)$及 $y=f(x)$的图形，关于 $y=x$ 直线是对称的。

（五）初等函数

称幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数为基本初等函数。由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成的用一个式子表示的函数称为初等函数。

（六）分段函数

在定义域的不同区域上用不同的表达式表出的函数，称为分段函数。

如　　①$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

②迪里赫莱函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}。\end{cases}$

对分段函数在分段点处附近函数的性能，是需要认真研究的。

## 二、典型题例解法及剖析

本节着重于解关于复合函数的有关问题及函数奇偶性、单调性、反函数的一些问题。

关于由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 从而构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$，这之中有如下几方面问题：(1)求复合函数的定义域；(2)已知 $y=f(u)$，及 $u=\varphi(x)$，求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式(可能有多重复合的情形)；(3)已知 $u=\varphi(x)$，及 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式，求 $y=f(u)$ 的表达式；(4)已知 $y=f(u)$，及 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式求 $u=\varphi(x)$ 的表达式。

**例 1.1.1** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(\lg x)$，$f(\sin x)$ 的定义域。

**解** 要使 $f(\lg x)$ 有定义，$x$ 必须满足：$0\leqslant \lg x\leqslant 1$. 得定义域为 $[1,10]$；为使 $f(\sin x)$ 有意义，$x$ 必须满足：$0\leqslant \sin x\leqslant 1$. 得定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n$ 为整数。

**例 1.1.2** 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域。

**解** 由 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f[f(x)]=\dfrac{1}{1+f(x)}$，$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{1+f[f(x)]}$ 知，有下述条件需满足：(1) $x\neq -1$；(2) $f(x)\neq -1$. (3) $f(f(x))\neq -1$. 为此需求下列联立方程组的解：

$$\begin{cases} x \neq -1, \\ \dfrac{1}{1+x} \neq -1, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} \neq -1, \end{cases}$$

解得： $x\neq-1$，$x\neq-2$，$x\neq-\dfrac{3}{2}$.

所以复合函数 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域为：$(-\infty, -2)$，$(-2, -\dfrac{3}{2})$，$(-\dfrac{3}{2}, -1)$，$(-1, +\infty)$.

**例 1.1.3** 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

求 $f_n(x)=\overbrace{f[f[\cdots[f(x)]]\cdots]}^{n\text{个}f}$

**剖析** 本题是求 $n$ 重复合函数的表达式。困难在于 $n$ 重。

先看 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

再看 $f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

由 $f_2(x)$，$f_3(x)$的表达式，我们可以猜想 $f_n(x)$的表达式为 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，为此可用归纳法证之。

**解** $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$， $f_2(x)=f[f_1(x)]=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，设 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$；当 $n=k+1$ 时，$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$，即当 $n=k+1$ 时也成立，所以根据归纳法假定，对一切自然数 $n$，恒有：

$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，此即为所求。

**例 1.1.4** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=e^x$.

求 $f(g(x))$，$g(f(x))$的表达式。

**解** $f(g(x))=f(e^x)=\begin{cases}1, & e^x<1,\\ 0, & e^x=1,\\ -1, & e^x>1.\end{cases}$

$\therefore$ $$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

$$g\ [f(x)]\ =\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

**例 1.1.5** 已知 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$的值域满足关系 $f\leqslant 0$，$f\geqslant 4$，求其定义域。

**剖析** 本题相当于求给定函数的反函数的值域。

**解** 当 $x\neq 3$，由 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$解出 $x$，得 $x=3+\dfrac{1}{y-2}$，由 $y\leqslant 0\Rightarrow \dfrac{5}{2}\leqslant x<3$；由 $y\geqslant 4\Rightarrow 3<x\leqslant \dfrac{7}{2}$.

所以给定函数的定义域为 $[\dfrac{5}{2}, 3)$，$(3, \dfrac{7}{2}]$.

**例 1.1.6** 设 $f(\dfrac{1}{x})=x(1+\sqrt{1+x^2})$，$x>0$，求 $f(x)$.

**剖析** 本题属于已知 $u=\varphi(x)$，及 $f(\varphi(x))$，的表达式，求 $f(u)$的表达式的问题。这只需把 $f(\varphi(x))$的表达式中的 $\varphi(x)$ 全部代以 $u$ 就行了。为此，原则上应该由 $u=\varphi(x)$中解出，$x=$

$\varphi^{-1}(u)$，再把 $x=\varphi^{-1}(u)$代入到 $f(\varphi(x))$的等式两端。

**解** 令 $u=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{u}$，把它代入 $f(\frac{1}{x})$等式的两端，于是得到：$f(u)=\frac{1}{u}\left[1+\sqrt{1+(\frac{1}{u})^2}\right]$.

即
$$f(x)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2},\ x>0.$$

**例 1.1.7** 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

**剖析** 本题与上题同属一类。如还用上题同样的办法，就会遇到麻烦，此时就需解题技巧了。

**解** 因为 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$，

所以
$$f(x)=x^2-2.$$

**例 1.1.8** 若 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)>0$，求 $\varphi(x)$的表达式及其定义域。

**剖析** 本题属于已知 $f(u)$，和 $f(\varphi(x))$的表达式，求 $u=\varphi(x)$的表达式的问题。

**解** 由 $f(x)=e^{x^2}$ 及 $f(\varphi(x))=1-x$，

于是有
$$e^{\varphi^2(x)}=1-x,$$

因此 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，

由于 $\varphi(x)>0$，于是有

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

其定义域由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$. 故 $\varphi(x)$的定义域为 $x\leqslant 0$.

**例 1.1.9** 试证明若函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于直线 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$均对称，则 $f(x)$为周期函数。

**剖析** 由几何分析，易得该函数是周期函数，$2(b-a)$就是它的一个周期。