

发 散 思 维

大课堂

- 同步最新教材
- 导引思维发散
- 点燃智慧火花
- 培养创新能力

丛书主编 希扬

第三次修订版

初二数学

本书主编 源 流



龍門書局



发散思维大课堂

第三次修订版

初二数学

源 流 主 编

源 流 于建东 齐 健 郭莉君 编 著
叶畋田 陈明铸 陈民胜

龍 門 書 局

2002

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64034160, 13501151303(打假办)

发散思维大课堂(第三次修订版)

初二数学

主 编 源 流

责任编辑 张启男 张明学

龙 门 书 局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市东华印刷厂 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

1999 年 6 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

2002 年 6 月第三次修订版 印张: 12 1/2

2002 年 6 月第 16 次印刷 字数: 388 000

印数: 397 001—557 000

ISBN 7-80111-669-0/G·584

定 价: 14.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



品牌越世纪 书香二百年

在铺天盖地的教辅书世界里，最难作假，最逃不过读者明眼的应该是书的质量。

《发散思维大课堂》以它特有的风采，风风火火地走过了四个春秋，其销售量已达40余万套。可谓山花如海，好评如潮。它响亮的名字给人以鼓舞；它厚重的内容给人以自信；它所激发的灵感给人以无穷的智慧。无数莘莘学子因为有了它，学习变得更轻松，不少考生步入了理想的殿堂——圆梦重点高中、重点大学。

2002年修订出版的《发散思维大课堂》将以崭新的面貌展现在读者面前，请接受它的爱吧！您的学习将因为有了它而变得更加精彩！

希 扬

2002.6

《发散思维大课堂》丛书

主 编：希 扬

副主编：源 流

编 委：孙济占 张功俭

王兴桃 陆仁章

丁贲禧 宋 力

贾振辛 张启男

编
委
会

启动发散思维 挖掘深层智能

——《发散思维大课堂》序

《发散思维大课堂》是我们奉献给广大读者的涵盖中学主要课程且与现行教材同步的素质教育辅导丛书。培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、能创新的人才，是我们教育和出版工作者的神圣使命；而引导中学生学会科学思维的方法，借以挖掘自身潜能，提高学习质量、效率和整体素质，是我们研究的重大课题。

思维是人类特有的一种脑力活动。孔子说“学而不思则罔”。“罔”即迷惑而无所所得。意思是说，只读书而不思考，就等于没有读书。哲学家哥德也曾风趣地说：“经验丰富的人读书用两只眼睛。一只眼睛看到纸面上的话，另一只眼睛看到纸背面的话。”“纸背面的话”就是指思维，指要思要想，要多思多想。这些至理名言深刻地揭示了思维与学习的辩证关系。

发散思维，即求异思维。它包括横向思维、逆向思维及多向思维。它要求你放开眼界，对已知信息进行分析、综合，并科学加工，从而收到“一个信息输入，多个信息产出”的功效。它的特色，表现在思维活动的多向性；它的功能，表现为可以开启心扉，震撼心灵，挖掘深层信息，架设起由已知、经可知、达未知的桥梁，创造出新的思路和解法；它的操作，要求从一点出发，向四周辐射，“心骛八极，思接千载”，从而编织起信息网络，达到思维的预想目标。

近年来，笔者发现一些具有远见卓识的学者、教师、出版家，已将“发散思维”引入中学课堂，取得可喜成果。师生们称赞说，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使我们深深体味到了“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛；不仅开阔了视野，而且取得了举一反三、触类旁通的效果。

鉴于发散思维的良好效应,我们特邀了对这方面有建树的老师,将这种创新思维运用到语文、英语、数学、物理、化学等教学之中,并精心设计出学生易于接受且独具特色的这套素质教育丛书。

这套丛书具有显著的四大特点,每一个特点都体现创新意识。

1. 高标准 指在如林的教辅读物中,它博采众家之长,自成体系。它不仅传播知识信息,更着意进行科学思维与方法的点拨,能促使学生学会思考、学会分析、学会应用。

2. 新角度 指它在中学主要课程中对教材的处理和试题的设计运用了发散思维,对重点难点的点拨与导练,呈现出新的模式和跨越,蕴涵着对学生智能的深层开发。

3. 大视野 指丛书眼界开阔,立足课内,向课外拓展,知识面宽,信息量大,涵盖率高;且以人才开发为动力,坚持“一切为了学生,为了一切学生”的原则;体现了智力开发的针对性与具体操作的实用性。

4. 广思路 指引导学生从多角度思考和切入问题,并向纵深发展。它不仅探索了多种信息的深邃内涵,也着力探索了信息的广阔外延;力图培养与规范学生驾驭信息的能力,激发他们去寻找自己新的增长点。

好书凭借力,送君上青云。古人说:“君子爱人,必教之以其方。”这套丛书会教你:“博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃学之。”尤其能助你学会思考!

寸有所长,尺有所短。发散思维教学毕竟是近年来在教学百花园中出现的新事物,目前尚难尽善尽美。万望朋友们不吝赐教。

希 扬

2000年1月

前言

发散思维即求异思维,它从一点出发沿着多方向达到思维目标。用图表示,它就是从一点出发向知识网络空间发出的一束射线,使之与两个或多个知识点之间形成联系。它包含横向思维、逆向思维及多向思维。发散思维具有多向性、变通性、流畅性、独特性的特点,即思考问题时注重多思路、多方案,解决问题时注重多途径、多方式。它对同一个问题,从不同的方向、不同的侧面、不同的层次,横向拓展,逆向深入,采用探索、转化、变换、迁移、构造、变形、组合、分解等手法,开启学生心扉,激发学生潜能,提高学生素质,这对造就创造性人才至关重要。

本套丛书力求贴近整个教学环节,立足于培养学生的创造思维能力,增强学生思维的灵活性、拓展性,以便提高学生解决实际问题的能力。为此,我们紧密联系学生学习实际,全面深入反映近年来的全国高考、各省市中考的试题。紧扣教学大纲和现行教材,从初一到高二,按现行教材同步到每个章节或单元。

基本目标要求 使学生会运用目标管理的方法,掌握学习重点和方向,做到有的放矢,学习每章(或每单元)可达到预期的学习目的和效果。

基础知识导引 高度概括每章(或每单元)的内在知识体系,精辟分析中、高考的知识点。

重点难点点拨 以画龙点睛之笔突出重点、难点,以此作为展开发散思维的主线。

发散思维导练 是本套丛书的主体结构,它分为以下两部分:

发散思维分析 从知识点、重点、难点出发,分析本章(或本单元)的知识内容、相互关系,并运用发散思维方法揭示思维规律,突出解题规律,以达到融会贯通的目的。

发散思维应用 精选典型例题,通过重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维,透析、培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、书写表达、多解多变的全方位能力。

巩固基础训练 提高能力测试 可以帮助学生借此检验课堂学习效果;同时家长可借此考查学生对课本各章节知识的掌握程度。

为了紧扣高考,配合普通高考向 3+X 综合高考过渡,在每册书后附有三套“发散思维综合能力测试题”,并在正文中增设了题组评论、高考样题分析、创造巧解等栏目内容,以供学生针对中、高考题型进行综合训练。为配合试验修订版教材在全国的推广使用,本套丛书根据教材改革精神及时调整、增编了高一、高二数学、物理、化学、英语、语文(通用)等学科试验修订版本。

本书用到如下各种发散思维:

题型发散 是将典型问题,变换其题型的一种发散思维。

解法发散 是通过一题多法、多题一法进行变通训练的发散思维。

纵横发散 是通过两个或多个发散点间的联系以及发散点与其它知识点间的联系,借助例题形成发散思维。

转化发散 是通过保持原命题的实质而变换其形式的发散思维。

组合发散 将多个发散点组合起来形成的一种发散思维。

迁移发散 是用信息迁移或方法迁移解决新情景问题的一种发散思维。

分解发散 是把一个复杂命题分解成一些单纯命题,并逐个加以分析和解决的发散思维。

逆向发散 是由目标至条件的定向思考的一种发散思维。

创造发散 是克服思维定势,不按常规思维解决问题的一种发散思维。

综合发散 是通过教材各章发散点之间的联系,一个学科与其它学科之间的联系综合思考的一种发散思维。

总之,本套丛书由浅入深,精析多练,学练结合,阶梯训练,逐步提高,并揭示中、高考的测试规律,使学生的复习与应试实际更贴近,从而提高学生灵活运用知识、增强迁移应变能力和创造性思维能力。

由于本套丛书编写时间紧迫和编者水平所限,不妥之处,祈望读者不吝赐教。

源 流

2000 年 3 月

目 录

★ 第一部分 代数篇

第八章 因式分解	1
基本目标要求	1
基础知识导引	1
重点难点点拨	2
发散思维导练	4
★ 发散思维分析	4
★ 发散思维应用	5
多项式因式分解的方法	5
巩固基础训练	19
提高能力测试	22
第九章 分式	26
基本目标要求	26
基础知识导引	26
重点难点点拨	29
发散思维导练	31
★ 发散思维分析	31
★ 发散思维应用	32
(一) 分式的概念、性质及其运算	32
(二) 分式运算的应用	51

巩固基础训练	62
提高能力测试	66
第十章 数的开方	71
基本目标要求	71
基础知识导引	71
重点难点点拨	73
发散思维导练	74
★ 发散思维分析	74
★ 发散思维应用	75
平方根和立方根的概念	75
巩固基础训练	90
提高能力测试	93
第十一章 二次根式	96
基本目标要求	96
基础知识导引	96
重点难点点拨	97
发散思维导练	98
★ 发散思维分析	98
★ 发散思维应用	99
(一) 二次根式的概念及性质	99
(二) 二次根式的运算	107
巩固基础训练	120
提高能力测试	123

★ 第二部分 几何篇

第三章 三角形	128
基本目标要求	128
基础知识导引	128
重点难点点拨	132
发散思维导练	134
★ 发散思维分析	134
★ 发散思维应用	135

(一) 全等三角形的判定及性质	135
(二) 直角三角形、等腰三角形的判定和性质	150
巩固基础训练	172
提高能力测试	178
第四章 四边形	185
基本目标要求	185
基础知识导引	185
重点难点点拨	188
发散思维导练	191
★ 发散思维分析	191
★ 发散思维应用	192
(一) 平行四边形及几种特殊平行四边形的概念、性质及判定	192
(二) 梯形及有关定理的应用	212
巩固基础训练	231
提高能力测试	238
第五章 相似形	247
基本目标要求	247
基础知识导引	247
重点难点点拨	249
发散思维导练	251
★ 发散思维分析	251
★ 发散思维应用	252
(一) 比例线段的性质、平行线分线段成比例定理	252
(二) 相似三角形的判定和性质	263
巩固基础训练	275
提高能力测试	282
综合能力测试题(一)	291
综合能力测试题(二)	294
综合能力测试题(三)	297
参考答案	300



第一部分 代数篇



第八章 因式分解

基本目标要求

- 一、了解因式分解的意义及其与整式乘法的区别和联系.
- 二、掌握提公因式法、公式法、分组分解法这三种分解因式的基本方法,并能灵活运用它们进行分解因式.
- 三、了解因式分解的一般步骤.

基础知识导引

一、因式分解的有关概念

1. 因式

几个整式相乘,每个整式叫做它们的积的因式.例如 $(a-3)(a+1)=a^2-2a-3$, $a-3$ 和 $a+1$ 都是 a^2-2a-3 的因式.

2. 公因式

几个整式公有的因式,叫做这几个整式的公因式.或者说,如果一个整式能同时整除几个整式,那么这个整式叫做这几个整式的公因式.

3. 因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做因式分解.

二、多项式分解的几种常用方法

1. 提公因式法

一般地,如果多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提到括号外面,将多项式写成因式乘积的形式,这种分解因式的方法叫做提公因式法.

2. 公式法

如果把乘法公式反过来,就可用来把某些多项式分解因式.要求熟练运用于因式分解的方法是:

(1)平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(2)完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

有时也用到公式:

(3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

(4) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

3. 分组分解法

如果把一个多项式的项分成几组并将各组分别分解因式后,各组间又有公因式,那么就可提取出各组的公因式,从而把这个多项式分解因式,这种方法叫做分组分解法.分组分解法有如下几种情况:

(1)分组后能直接提公因式;

(2)分组后能直接运用公式;

(3)运用添项或拆项分组分解;

(4) $x^2 + (p + q)x + pq$ 型的二次三项式的因式分解.

这类二次三项式的特点是:二次项的系数为 1;常数项是两个数之积;一次项系数是常数项的两个因数之和.

此类二次三项式因式分解,其常数项的两个因数的正负符号有以下规律:常数项是正数时,两个因数符号相同,并且与一次项系数的符号相同;常数项是负数时,两个因数符号相异,其中绝对值较大的因数与一次项系数相同.

此类二次三项式的因式分解法为

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q).$$

4. 用配方法分解二次三项式

用到完全平方公式、平方差公式以及添项、拆项的技巧,是配方法的关键.添项是指先加上一个适当的项,再减去此项.

二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 在有理数范围内分解因式的前提是 $b^2 - 4ac$ 为一个有理数的平方或零.

重点难点点拨

本章重点是因式分解的四种方法,即提公因式法、公式法、分组分解法.

本章的难点是分组分解法. 分组分解法难在分组时, 要先预见到分组之后各组是否有公因式, 是否能用公式, 否则分组后未必能完成因式分解. 要掌握重点、难点, 必须注意以下问题.

一、因式分解的注意事项

1. 因式分解与整式乘法互为逆运算

$$(a+b)(a-b) \xrightleftharpoons[\text{因式分解}]{\text{整式乘法}} a^2 - b^2.$$

2. 在提公因式时, 若各项系数都是整数, 所提的公因式是各项系数的最大公约数与各项都含有的字母的最低次幂的积.

3. 如果多项式的第一项系数是负数, 一般要提出“-”号, 使括号内的第一项系数是正数, 在提出“-”号时, 多项式的各项都要变号.

4. 有时将因式经过符号变换或将字母重新排列后可化为公因式, 例如: $-a-b+c = -(a+b-c)$; 又如: 当 n 为正整数时, $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$; $(a-b)^{2n-1} = -(b-a)^{2n-1}$, 都是在因式分解过程中常用到的因式变换.

5. 能运用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 分解的多项式, 必须是二项式或视作二项式的多项式, 且这二项的符号相反, a, b 可表示数, 亦可表示字母或代数式, 每项都能写成数(或式)的完全平方的形式.

6. 能运用完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 分解的多项式, 必须是三项式或视作三项式的多项式, 且其中两项符号相同并都能写成数(或式)的完全平方形式, 而余下的一项是这两个数(或式)的乘积的 2 倍. 如果三项中的两个完全平方项都带有负号, 则应先提出负号, 再运用完全平方公式分解因式.

二、因式分解的思路与解题步骤

1. 先看各项有没有公因式, 若有公因式, 则先提取公因式.

2. 再看能否使用公式法.

3. 用分组分解法, 即通过分组后提取各组公因式或运用公式法来达到分解的目的. 如果运用以上方法难以解决, 就考虑用拆、添项方法, 再利用分组分解法来分解.

4. 因式分解的最后结果, 必须是几个整式的乘积. 如: $mx + nx + p = x(m+n) + p$. 其右端不是积的形式, 故不是因式分解.

又如: $a + \frac{b}{a} = \frac{1}{a}(a^2 + b)$ ($a \neq 0$), 虽说右端是乘积形式, 因为 $\frac{1}{a}$ 不是整式, 故其结果也不是因式分解.

5. 因式分解的结果必须进行到每个因式在有理数范围内不能再分解为止. 如: $a^4 - ab^3 = a(a^3 - b^3)$, 虽说其右端已符合两个整式 a 、 $(a^3 - b^3)$ 连乘积的形式, 但因为 $a^3 - b^3$ 还能继续分解, 故以上结果不是因式分解.

6. 以上方法均感困难, 可考虑用配方法、待定系数法、换元法、试除法因式分解.

因为需要分解因式的多项式是多种多样的, 所以必须根据题目的特点, 对具体问题作具体分析, 灵活应用有关方法和技巧, 才能正确迅速地解题.

发散思维导练

★ 发散思维分析

本章的主要内容是多项式的四种因式分解的方法. 多项式的因式分解是整式乘法的逆运算, 在解题中何时用整式乘法, 何时用因式分解, 需视解题的要求而定. 如: 把 $(x+1)(x-3) - 12$ 分解因式, 必须先做整式乘法, 得:

$$(x+1)(x-3) - 12 = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3).$$

又如: 计算 $(x^3 - y^3)^2 - (x^3 + y^3)^2$, 这里没有按照运算顺序先做整式乘法, 而是运用平方差公式进行因式分解, 得

$$\begin{aligned} (x^3 - y^3)^2 - (x^3 + y^3)^2 &= (x^3 - y^3 + x^3 + y^3)(x^3 - y^3 - x^3 - y^3) \\ &= 2x^3 \cdot (-2y^3) = -4x^3y^3 \end{aligned}$$

多项式因式分解是数学中重要的恒等变形, 它是继续学习分式、方程的基础. 熟练地掌握和灵活运用因式分解的各种方法是进一步学好数学的前提.

本章安排了一定数量的逆向发散、转化发散和其他类型的发散思维题. 逆向发散可以化异为同, 化生为熟, 化多(元、次)为少(元、次), 变繁为简, 化难为易. 转化发散通过把任何整式或任何多项式看成是公式中的字母 a 或 b , 从而利用乘法公式实现由繁到简、由难到易的转化. 转化发散还可以促进数形结合解题, 可发挥“形”的直观作用和“数”的思路规范优势, 由数思形, 由形定数, 数形渗透, 互相作用, 达到化未知为已知直到问题解决的目的.

★ 发散思维应用

多项式因式分解的方法

典型例题 1

把下列各式分解因式:

$$(1) (a+b)^{n+2} - 2(a+b)^{n+1} + (a+b)^n.$$

$$(2) 2(m^2 + n^2)(m+n)^2 - (m^2 - n^2)^2.$$

$$(3) 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c - 6abc.$$

分析 (1) 本题先提取公因式, 然后运用完全平方公式分解.

(2) 本题先运用平方差公式, 然后提取公因式, 最后运用完全平方公式因式分解.

(3) 本题先提取公因式, 然后采用分组分解法分解因式.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad & (a+b)^{n+2} - 2(a+b)^{n+1} + (a+b)^n \\ &= (a+b)^n [(a+b)^2 - 2(a+b) + 1] \\ &= (a+b)^n (a+b-1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2(m^2 + n^2)(m+n)^2 - (m^2 - n^2)^2 \\ &= 2(m^2 + n^2)(m+n)^2 - (m+n)^2(m-n)^2 \\ &= (m+n)^2 [2(m^2 + n^2) - (m-n)^2] \\ &= (m+n)^2 (m^2 + 2mn + n^2) = (m+n)^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{解法 } 1 \quad & 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c - 6abc = 3a(a^2 + 2ab - ac - 2bc) \\ &= 3a[(a^2 + 2ab) - (ac + 2bc)] \\ &= 3a[a(a+2b) - c(a+2b)] \\ &= 3a(a+2b)(a-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 } 2 \quad & 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c - 6abc = 3a(a^2 + 2ab - ac - 2bc) \\ &= 3a[(a^2 - ac) + (2ab - 2bc)] \\ &= 3a[(a-c)a + (a-c) \cdot 2b] \\ &= 3a(a-c)(a+2b) \end{aligned}$$

【题型发散】

例题 1-1 选择题 把正确答案的代号填入题中的括号内.

(1) 分解因式 $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ 的结果是 ()

- (A) $(a+b)^2 - c^2$ (B) $(a+c)(a-c) + b(2a+b)$
(C) $(a+b+c)(a+b-c)$ (D) $(a+b-c)(a-b+c)$

(2001 年深圳市中考题)