866

本书由上海发展汽车工业教育基金会资助出版

数学规划与对策论

黄桐城　鲍祥霖　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了数学规划与对策论的基础知识和应用方法，重点阐述了线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划和对策论的基本内容。在阐述有关内容时，强调每种方法的思路、技巧和严格的数学论证，同时通过大量例题阐述了理论如何与实践相结合。

本书结构严谨，内容丰富，应用性强，可作为经济管理类专业研究生的教材，也可供大专院校师生和经济管理人员参考、阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学规划与对策论/黄桐城，鲍祥霖编. —上海：上海交通大学出版社，2002

ISBN 7-313-03034-7

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①黄…②鲍… Ⅲ. ①数学规划 ②对策(数学) Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 018310 号

数学规划与对策论

黄桐城 鲍祥霖 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

常熟市华顺印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：890mm×1240mm 1/32 印张：7.125 字数：201 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—2050

ISBN7-313-03034-7/O·143 定价：11.00 元

目　录

第1章 线性规划的基本概念

1.1 概述

规划问题通常研究对“有限”的资源寻求“最佳”的利用或分配方式。任何资源，如劳动力、原材料、机器或资金等都是有限的，因此必须合理地配置，寻求最佳的利用方式。所谓最佳的利用方式必须有一个标准或目标，这个标准或目标就是使成本达到最小或利润达到最大。

与规划问题有关的数学模型总由两部分组成：一部分是约束条件，反映了有限资源对生产经营活动的种种约束；另一部分是目标函数，反映出生产经营者在有限资源条件下所希望达到的生产或经营目标。

当规划问题的约束条件可用决策变量的若干线性等式或线性不等式来表达，且目标函数为决策变量的线性函数时，这样的问题就称为线性规划问题。线性规划技术在工业、农业、军事、经济计划和管理决策等领域有着广泛的用途，其主要原因是在上述领域中有很多问题都能用线性模式来表达，或者近似地用线性模式来表达，而且线性规划问题有着比其他规划问题更为有效和简便的解题技术，即单纯形法。

单纯形法由美国数学家 G. B. Dantiz 于 1949 年提出，他当时作为美国空军的数学顾问，开发了一种数学规划的工具，用于制订空军部署、飞行训练、后勤保障的方案。由于这项工作他于 1948 年出版了《线性结构的规划》一书，提出了“线性规划”的概念，并于 1949 年进一步提出用于求解线性规划问题的一种有效的方法——单纯形法。单纯形法的提出使线性规划在理论上趋于成熟，在应用上更加广泛与深入。特别是电子计算机的发明，使处理有成百上千个决策变量和约束条件的线性规划问题成为可能，也使线性规划所适用的领域更加广泛了。有人曾对世界上 500 家著名的企业集团或跨国公司进行过调查，发现其

中 85%以上都曾应用过线性规划。

与其他科学领域一样，线性规划的诞生并非一朝一夕的事情。早在 20 世纪 30 年代，就有一些数学工作者开始对线性不等式系统进行过研究，它是线性规划数学理论的核心，其中著名的代表人物有前苏联数学家 L. V. Kantorovich，他在 1939 年曾提出一种求解线性规划的基础算法，可惜 Kantorovich 的工作在前苏联并没有引起人们的足够重视，以至于直到线性规划为 Dantiz 等人确定以后很久，他仍然不为人们所知，但是 Kantorovich 的卓越工作最终还是获得了公众的关注。1979 年瑞典皇家科学院把经济科学的诺贝尔奖授予了他，以奖励他对资源优化分配理论的贡献。

在 Dantiz 提出线性规划的单纯形法以后，线性规划的理论得到了进一步的发展。虽然单纯形法在实际应用中已被证明是极其有效的一种计算方法，但是这种方法对规模很大的线性规划问题的求解却是不现实的，因为单纯形法及其变形要用指数次旋转变换才能达到最优解。这种方法从理论上看具有指数复杂性，因此研究工作一直致力于寻找多项式复杂性的线性规划算法。

1979 年苏联数学家 L. G. Khanchian 提出了第一个多项式算法——椭球法。这种方法与单纯形法根本不同，在理论上它是优于单纯形法的。单纯形法采用指数次迭代寻找最优解，而椭球法则可以在多项式次迭代中找到最优解。但是椭球法在理论上的优越并不能在实际应用中得以实现，至少至今为止它还没有什么实际用途。事实上单纯形法的各种改进型的实际计算性能要比椭球法好得多。

1984 年，AT&T 的贝尔实验室的 N. K. Karmarkar 提出了“投影尺度法”，使线性规划出现了新的突破。这种新算法也是一种多项式时间算法，与椭球法不同的是，这种新算法不仅在理论上优于单纯形法，而且在实际应用中也显示出能与单纯形法竞争的巨大潜力。Karmarkar 法是从可行域的内部逼近最优解的。这种沿着内点寻优的思想成为近几年人们研究的焦点，从而掀起了一个研究 Karmarkar 算法的热潮。

1.2 标准型线性规划

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式,目标函数有的要求极大化,有的要求极小化;约束条件可以是等式,也可以是不等式;决策变量一般是非负约束,但也可以在$(-\infty,+\infty)$范围内取值。但是,不论是何种形式,线性规划问题的数学模型都可以统一变换为标准型。一个具有 m 个约束条件和 n 个变量的线性规划问题的标准形式,可以用以下形式来表示:

$$\max{}^{*} Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n, \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, & (1\text{-}2)\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0, & (1\text{-}3)\end{cases}$$

其中:式(1-1)称为目标函数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是待确定的非负的决策变量,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是与决策变量相对应的价格系数,$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 是被极大化的目标函数。

式(1-2)和式(1-3)称为约束条件,式(1-2)中 m 个线性等式代表 m 个技术约束,其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$是技术系数,$b_1$,$b_2,\cdots,b_m$ 为右端项系数。

一个线性规划问题(标准型)是指寻找每个决策变量的一个特定的非负的值,使这个特定解既能满足所有的技术约束,又能使目标函数达到它的最大值。

利用数学求和符号,标准形式的线性规划可用更紧凑的表示法表示:

---

* 由于一切求最小值的问题都可化成求最大值,所以本书只论述如何求 max,读者可自行导出 min 的结论。

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots,m, \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n。 \end{cases}$$

利用向量符号,上述标准型线性规划可表述为

$$\max \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX},$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ x_j \geqslant 0, \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

其中:$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$称为价值向量,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_j)^{\mathrm{T}}$ 为决策变量向量,$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 为决策变量 $\boldsymbol{x}_j$ 所对应的技术系数向量,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 为资源向量。

如果利用矩阵符号,则标准型线性规划可简单地表述为

$$\max \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX},$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0, \end{cases}$$

其中:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$为一个 $m\times n$ 阶矩阵,称为线性规划的系数矩阵。

解线性规划问题的单纯形法要求将问题用标准形式来表达,但一般的线性规划问题通常不是以标准形式出现的,约束条件往往是线性不等式。以下讨论如何把一般型线性规划转换成标准型。

1. 极大化与极小化

若目标函数是求极大化的线性函数,即 $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,这时只需令 $Z'=-Z$,于是有 $\min Z' =-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,这样就把极大化问题转化

成极小化问题。若有一个解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 能使 Z' 达到最小,则该解必能使 Z 达到最大。

2. 线性不等式和线性等式

线性不等式约束转化成线性等式约束,只需引进新的变量用来表示不等式两端的差额就行了。

如果第 i 个技术约束有形式 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leqslant b_i$,引入非负的松弛变量 x_{n+i}就可转换成线性等式 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$,其中 $x_{n+i}\geqslant 0$。

同样,如果第 k 个技术约束有形式 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j \geqslant b_k$,则可引入非负剩余变量 x_{n+k},使原不等式转换成 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j - x_{n+k} = b_k$,其中 $x_{n+k}\geqslant 0$。

必须指出的是,在引入了松弛变量或剩余变量以后,它们与其他决策变量一样,都是线性规划问题的一部分了,这些变量自始至终保持为非负值,而且在最优解中松弛变量和剩余变量的值对原线性规划的分析是很有用的资料。

3. 非负变量和符号不受限制的变量

在标准型线性规划中要求决策变量是非负的。如果线性规划中某些变量没有非负限制,即它们既可取正值,也可取负值,那么为了要求所有变量都有非负限制,通常可以用两个非负变量的差来表达。例如 x_i 的符号不受限制,则可引进非负变量 x_{i1},x_{i2},并令 $x_i=x_{i1}-x_{i2}$,这样就可以使线性规划里所有的变量都转化为有非负限制的变量。

1.3 线性规划问题举例

下面介绍企业经营管理方面的几类典型的实际问题,这些问题虽然有不同的背景,但是它们的数学模型却有着完全相同的形式。掌握一些典型的模型不仅有助于我们深刻理解线性规划本身的理论和方法,而且会大大有利于我们灵活地处理千差万别的实际问题,提高解决

实际问题的能力。

例 1 产品计划问题

某工厂要用若干种资源(如原材料、劳动力、机器等)生产某几种产品,资源的供应有一定的限制,要求制定一个产品生产计划,使其在一定数量的资源限制条件下能得到最大的收益。如果用 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 种资源生产 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 种产品,单位产品所需资源数、所得利润及可供应的资源总量如表 1-1 所示。

表 1-1

资源 \ 产品	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	可供应资源量
B_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单位产品利润	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

问应如何组织生产才能使利润最大?

本例的目的是要制定一个最佳的生产作业计划,使该计划既不超越资源条件的限制,同时又可使利润达到最大。因此可以定义 x_j 为生产 A_j 种产品的计划数($j=1,2,\cdots,n$),那么本问题可归结为确定每一个 x_j 的值,使总利润

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

极大化,同时生产计划必须服从于每一种资源 B_i($i=1,2,\cdots,m$)的资源量限制:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2,\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m。
\end{aligned}$$

又因为产品计划数不可能是负数,所以每个 x_j 必须服从非负性约

束：

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$$

因此本问题的数学模型为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, & i = 1,2,\cdots,m, \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

例 2 合理配食问题

假如市场上有 n 种不同食物可供购买，第 j 种食物的销售价格为每单位 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$。对人体而言，每天必须有 m 种营养成分摄入，为了健康的原因，第 i 种营养成分每天至少需要 b_i 个单位$(i=1,2,\cdots,m)$。一项研究指出，每单位第 j 种食物中包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位。问应该如何进行合理配食，才能在满足人体基本营养需求的条件下使总费用最少？

本问题是要确定在配食中每种食物的数量。可定义 x_j 为配食中第 j 种食物的单位数量$(j=1,2,\cdots,n)$，那么问题就是确定 x_j，使总费用

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

极小化，同时服从基本营养需要：

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\geqslant b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\geqslant b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\geqslant b_m, \end{aligned}$$

以及非负性约束

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0。$$

这样得出下列形式的数学模型

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, & i = 1,2,\cdots,m, \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

例 3 运输问题

某运输公司和一用户签订了合同,要将一定数量的产品从 m 个发源地运送到 n 个目的地。已知在第 i 个发源地存放有 a_i 个单位产品 $(i=1,2,\cdots,m)$,第 j 个目的地至少需要送到 b_j 个单位产品 $(j=1,2,\cdots,n)$。假设由发源地 i 运送一个单位产品到目的地 j 的所得利润为 c_{ij},问运输公司如何安排调运方案,才能在充分满足约束条件的情况下使总利润最大?

本例可定义双下标变量 x_{ij},以表示由第 i 个发源地到第 j 个目的地运送货物的单位数 $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,这样问题可归结为如下数学问题,求一组非负的变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,使满足发源地的约束

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

和目的地的约束

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \qquad j = 1,2,\cdots,n,$$

同时使总利润函数

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

极大化。当然为了保证这个问题有可行解,条件 $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$ 是必要的。

例 4 下料问题

某工厂接到一组客户的订单,要利用某类钢板为 m 种零件下料。根据既省料又容易操作的原则,假设人们在一块钢板上已经设计出 n 种不同的下料方式,设在第 j 种下料方式中可下得第 i 种零件 a_{ij} 个。根据客户订单要求,第 i 种零件的需要量是 b_i。问应该采用哪些下料方式,在满足需要的条件下,使所用去的钢板总数最少?

定义 x_j 为按第 j 种方式下料的钢板总数($j=1,2,\cdots,n$),则下料问题成为一个整数线性规划问题

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, & i = 1,2,\cdots,m, \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{且为整数}, & j = 1,2,\cdots,n, \end{cases}$$

其中:不等式约束表示用各种下料方式所下的第 i 种零件总数不少于 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$,钢板数目只能是正整数,所以除了非负限制,还必须加上整数限制。如果抛掉 x_j 的整数要求,本例就成为一般的线性规划问题。

1.4 标准型线性规划问题的解

考虑一个标准型的线性规划问题

$$\max \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}, \tag{1-4}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, & (1\text{-}5) \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0, & (1\text{-}6) \end{cases}$$

其中:$\boldsymbol{C}$ 为 n 维行向量,$\boldsymbol{X}$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵。通常可假定 $m\times n$ 阶矩阵满足 $n\geqslant m$,而且 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 m,否则可删去一些多余等式使之满足条件。

下面介绍线性规划问题的各种解的概念。

(1) 可行解　满足约束条件(1-5),(1-6)的解

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

称为线性规划问题的可行解,可行解集 $\mathfrak{D}=\{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 称为线性规划问题的可行域。

(2) 最优解　使目标函数达到最优值的可行解称为最优解。

(3) 基　设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组的 $m\times n$ 阶系数矩阵,满足 $n\geqslant m$,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m。$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵(即 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$),则称 $\boldsymbol{B}$ 是线

性规划问题的一个基。

若 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基，那么 $\boldsymbol{B}$ 一定是由 m 个线性无关的列向量组成。不失一般性，可设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m),$$

称 $\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 相对应的变量 $\boldsymbol{X}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基变量，其他变量称为非基变量。

(4) 基本解　设 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基，若令 $n-m$ 个非基变量都等于零，所得的方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解称为线性规划问题的一个基本解。我们可以看出，有一个基就可以求得一个基本解，因此基本解的个数总是小于等于 C_n^m 的。但是由于基本解中的非零分量可能是负数，所以基本解不一定是可行解。

(5) 基本可行解　满足非负条件的基本解称为基本可行解。显然基本可行解的非零分量个数小于等于 m，并且都是非负的。当基本可行解的非零分量个数小于 m 时，即在基本可行解中有一个或多个基变量取零值时，称此解为退化的基本可行解。与基本可行解对应的基称为可行基。由于基本可行解的数目一般要少于基本解的数目，因此可行基的数目也要少于基的数目。

例 5　研究约束条件

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2=1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0, \end{cases}$$

其中：约束方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 为 2×3 阶矩阵。

所有基或基本解的个数 $\leqslant C_3^2=3$，不难看出三个基分别为：

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

对应三个基的基本解为

$$\boldsymbol{X}_1 = (2, -1, 0),$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)。$$

可见这三个基本解中基本可行解只有 $\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ 两个，它们分别对应于图中的 B 和 C 两点，基本解 $\boldsymbol{X}_1$ 对应 A 点，它位于 x_1Ox_2 平面上直线 $x_1+x_2=1$ 和 $2x_1+3x_2=1$ 的交点，该点恰好在 BC 线段的延长线上。线段 BC 上的一切点均为可行解。

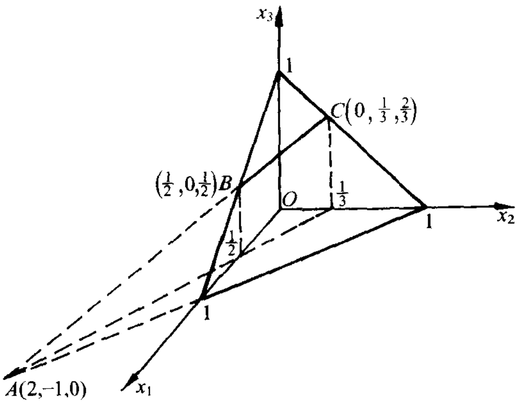

图 1

习 题 一

1. 某工厂能制造 A，B 两种产品，制造 A 产品 1kg 需要煤 9t，劳动力 3 个(以工作日计算)，电力 4kW；制造 B 产品 1kg 需要煤 4t，劳动力 10 个，电力 9kW。并知道制造 A 产品 1kg 能创造经济价值 7 000 元，制造 B 产品 1kg 能创造经济价值 12 000 元，且该工厂由于条件限制，只有煤 360t、电力 200kW、劳动力 300 个可以利用。问在现有资源的条件下应制造 A 和 B 产品各多少公斤才能创造总的价值最大?

试建立此问题的线性规划模型。

2. 某机械加工车间需要加工甲、乙两种零件，这两种零件可以在三种不同的机床（铣床、六角车床、自动机床）上进行加工（如不能生产，则效率为 0）。机床数及生产效率如表 1-2 所示。

问如何合理安排机床的加工任务，使产品数量在满足配套比例的条件下（设甲：乙＝1：1），使得成套产品的数量达到最大？

试建立此问题的线性规划模型。

表 1-2

机床种类	机床数（台）	机床生产效率（件/日台）	
		甲产品	乙产品
铣床	3	15	20
六角机床	3	20	30
自动机床	1	30	55

3. 假设某企业集团有若干家机械厂，都能生产甲、乙两种产品，这些机械工厂由于规模大小、技术条件、设备情况以及管理水平不同，大致可分为五种类型，每种类型企业的数目以及生产甲、乙两种产品的能力如表 1-3 所示。

表 1-3

企业类型	企业数量	各类企业加工能力（件/天）	
		甲产品	乙产品
A	5	200	30
B	3	800	400
C	20	40	5
D	9	400	100
E	2	1 200	500

问如何合理分配生产任务，使得该企业集团生产的产品配套数达到最大？已知每生产两件甲产品要求生产一件乙产品。

试建立此问题的线性规划模型。

4. 某农场有黑土地 260 亩，黄土地 340 亩，丘陵地 100 亩，洼地 100 亩。该农场在本年度计划种植玉米 400 亩，谷子 300 亩，高粱 100 亩。根据过去统计资料，这四种土地种植农作物的亩产量如表 1-4 所示。

表 1-4

土地种类	土地面积(亩)	亩产量(斤/亩)		
		玉米	谷子	高粱
黑土地	260	600	300	400
黄土地	340	560	250	300
丘陵地	100	400	200	250
洼　地	100	300	100	200

问农场如何确定农作物的合理布局，才能使粮食的总产量达到最大?

试建立此问题的线性规划模型。

5. 假设有四件工作分配给四个人，每人能力不同，工作效率也不同，但希望每件工作由最适当的工人担任，以发挥最大的效率。每个工人对每项工作所能发挥的效果如表 1-5 所示。如果规定每项工作由一个人担任，每个工人只分配一项工作，问如何对人员进行合理分配，才能使总效率达到最大?

试建立此问题的线性规划模型。

表 1-5

工作＼工人	A	B	C	D
甲	6	2	3	1
乙	7	4	3	2
丙	8	10	7	3
丁	7	7	5	4