高等学校教材

新编高等数学基础

（解题导引）

湖北教育出版社

高等学校教材

新编高等数学基础

王大智　雷德秀　徐进明　周新国　主编
赵根榕　胡迪鹤　主审

（解题导引）

湖北教育出版社

新编高等数学基础

（解题导引）

王大智　雷德秀　徐进明　周新国等

*

湖北教育出版社出版　　新华书店湖北发行所发行

江西印刷公司排版　　湖北省新华印刷厂印刷

850×1168毫米32开本　　20印张　　1插页492 000字

1990年6月第1版　　1990年6月第1次印刷

印数：1—4 100

ISBN 7—5351—0470—3/O·15

定价：5.25元

内容提要

《新编高等数学基础》在1989年全国高等工科院校应用数学专业数学分析与高等代数教材审稿会上审定通过，作为高等工科院校各类多学时专业的高等数学及线性代数的教材。全书分上、中、下和“解题导引”四册。上册的内容为一元微积分与常微分方程，中册的内容为线性代数与空间解析几何，下册为多元微积分与无穷级数，“解题导引”是按教材章节编排的习题及解答。本册是配合《新编高等数学基础》上、中、下三册使用的习题集。题目按教材的章节顺序编排，全部习题均有解答。其中还选编了一些近年来硕士研究生的入学试题。

本题集也可单独使用，供读者复习巩固高等数学的基本知识，练习提高基本运算和解决问题的能力用。

编者的话

传统的微积分和线性代数课程分别以连续变量的极限运算和离散变量的代数运算为研究对象，它们虽然各有特点，但其内在联系却十分紧密。例如，极限法则一旦建立，便具有代数运算的特征，多元微积分运用向量和矩阵的方法处理，不但简单易懂，而且便于记忆和运用。我们按照微积分和线性代数内容的内在联系，并将常微分方程、场论结合在一起，编写了这套新体系的教材——《新编高等数学基础》。在一元微积分中，运用微分算符的（代数）运算性质建立积分的（形式）运算法则；在线性空间中，通过内积概念讨论了R^3空间中几何体的位置关系；在多元微分学中，用内积和矩阵微积的方法形式地处理了多元纯量函数及向量函数的微分问题，并用二阶偏导数组成的Hessean矩阵讨论了多元极值问题；在曲线积分与曲面积分中，以向量微分元与积分算符的形式运算给出曲线积分与曲面积分的定义，并解决了有关计算；在付里叶（Fourier）级数中，采用了内积记法，等等。这样以向量、矩阵为主线来处理微积分问题，观点新颖、推证简洁、运算准确，便于记忆和运用。

本书包含了国家教委工科数学教学指导委员会提出的《数学课程教学基本要求》中关于高等数学和线性代数的全部内容。书中标有※号的内容可根据需要取舍。全部内容(包括习题课)可在230学时内授完。

在编写中，我们力求严谨准确、简明精炼、通俗易懂。为便于读者掌握高等数学的基本知识、基本运算和解决问题的基本能力，我们选配了一定数量的习题，专门编写了一本《“新编高等数学基础”解题导引》，书中的全部习题均有解答.习题中还选编了近

年来硕士研究生的部分入学试题解，供读者练习。

本书由西北大学、武汉工学院、福州大学、长沙交通学院联合编写。西北大学赵根榕教授、武汉大学胡迪鹤教授对本书的编写工作给予了极大的支持，对原稿提出了许多宝贵意见。西安交通大学游兆永教授、华中理工大学王能超教授对本书给予了很大的关心和鼓励。编者所在的四所院校对教材编写和教学试验始终给予了热情关怀和支持。显而易见，缺以上任何一方，本书的顺利出版是难以想象的。寥寥数语，实在无法表达编者感激之情于万一。

具体解题分工是第一章至第四章：杨润生，张岳生，童恩恕，周新国；第五章至第七章：王启泰，陈增政，徐进明；第八章至第九章黄守德、雷德秀，第十章王大智。

本书虽经四校反复试教并参考国内外有关教材进行了修改，由于编者水平所限，一定还存在不少缺点和错误。我们殷切希望使用本教材的师生和广大读者批评指正。

1989年10月

目　录

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　不定积分与常微分方程

第四章 定 积 分

第五章 线 性 空 间

第六章 矩 阵

第七章　线性变换与矩阵的特征值

第八章　多元函数微分学

第九章　多元函数积分学

第十章 无穷级数

第一章　极限与连续

习　题　1·1

1. 设A，B，C为集合，证明：

(1) $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$

(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 若$A\cap B=A$，则$A\subset B$.

(5) 若$A\subset B$，则$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

(6) 若$A\cup B=B$，则$A\subset B$.

(7) $A\subset A$，$\phi\subset A$.

证明　(1) $\because \forall x\in A\cap B$，$\therefore x\in A\Longrightarrow A\cap B\subset A$. 又$\because \forall x\in A$，则$x\in A\cup B\Longrightarrow A\subset A\cup B$.

(2) $\because x\in\overline{A\cup B}$，$\therefore x\notin A\cup B$，即$x\notin A$，且$x\notin B$，也就是$x\in\overline{A}$，且$x\in\overline{B}\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.

(3)～(7)证明与(1)、(2)雷同.

2. 判断下列等式的正误.

(1) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$　　(2) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

(3) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$　　(4) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$

(5) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus B$　　(6) $(A\cup B)\setminus B=A$

(7) $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$　　(8) $(A\setminus B)\cup B=A$

解　(1) √　(2) √　(3) ×　(4) √　(5) ×　(6) ×　(7) √　(8) ×

3. 写出点集[0，1]的两个可数子集.

解 如：$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$，$\left\{1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \cdots\right\}$

4．集L为平面上一切经过原点的直线所成之集，试写出L的一个可数子集．

解 令$L_1=\{y=nx \mid n=1, 2, \cdots, k, \cdots\}$，则$L_1$为可数集，且$L_1 \subset L$．

5．**证明**(1) 两个可数集的和集为可数集．

(2) 区间$[a, b]$与$[0, 1]$一一对应．

证明(1) 设$A=\{a_1, a_2, \cdots\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots\}$，则$A\cup B=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$，令$a_k=x_{2k-1}$，$b_k=x_{2k}$ $(k=1,2,\cdots)$，则$A\cup B=\{x_1, x_2, \cdots\}$，$\therefore A\cup B$亦为可数集．

(2) 令$y=a+(b-a)x=f(x)$，法则f使$\forall x\in[0, 1]$与$[a, b]$中的点y一一对应，$\therefore[0, 1]$与$[a, b]$一一对应．

6．$x^2+y^2=1$与$x^2+y^2=r^2$ $(r\neq 1, r\neq 0)$，问这两个圆周上的点是否“一样多”？为什么？

解 作同心圆$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=r^2$，过原点作射线，由**5题(2)**知，两圆周上位于同一射线上的点互相对应．即点是“一样多”

7．写出下述数列的前五项．

(1) $\left\{\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n(n+1)}\right\}$ (2) $\left\{\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n(n+1)}\right\}$

(3) $\left\{(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$ (4) $\{n+(-1)^n n\}$

解 (1) $-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，$-\frac{1}{30}$

(2) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{30}$

(3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$，1，$-\frac{1}{\sqrt{2}}$，0，$\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) 0，4，0，8，0

8．设 $x_n=1-\frac{1}{10^n}$，若要求$n>N_k$时，有$|x_n-1|<\varepsilon_k$．那么，(1) 对$\varepsilon_k=(0.1)^k$，可取$N_k=$? （$k=1, 2, \cdots$），填入下表

ε_k	0.1	0.01	…	$(0.1)^k$	…
N_k					

(2) 即使我们能找到上述每个N_k，是否足以证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$?

解 (1) 当$\varepsilon_k=0.1$时，易知，当$N_k=1$，$x_{N_k}=1-\frac{1}{10^{N_k}}=0.9$，$\therefore n>N_k$时，$|x_{n-1}|<0.1$．故$N_k$依次为1，2，…，$k$，…

(2) 不能．

9．在求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$时，

(1) 下述写法是否妥当? $\forall\varepsilon>0$，$\because|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，$\therefore n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则$n>N$时，$|x_n-1|<\varepsilon$，故$x_n\to1$.

(2) 下述两种找N的方法哪个对哪个不对?

i）$\forall\varepsilon>0$，要$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\varepsilon$，就只要$n>\frac{2}{\varepsilon}$，取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，…．ii）$\forall\varepsilon>0$，要$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$而$\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$，$\therefore$只要$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{2\varepsilon}$，故可取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，….

(3) 下述“证明”错在何处? 设 $x_n=\frac{n+1}{n}$,

i）要$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon-\frac{2}{3}}$，故存在$\left[\frac{1}{\varepsilon-\frac{2}{3}}\right]$

$=N$，当$n>N$时，有$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$成立，$\therefore \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{3}(n\to\infty)$.

ii）对$\varepsilon=1.1$，$N=10$，当$n>N$，有$|x_n-0|<\varepsilon$，$\therefore x_n\to 0$.

解 (1) 不能一开始就说“$\because |x_n-1|<\varepsilon$”.

(2) i）对；ii）不对，$\because$当$n>\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$时只有$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，不一定有$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

(3) i）证明中设$\frac{2}{3}+\frac{1}{n}<\varepsilon$，$\therefore \varepsilon>\frac{2}{3}+\frac{1}{n}>\frac{2}{3}$，这与$\varepsilon$的任意性不符. ii）取$\varepsilon=1.1$，与$\varepsilon$的任意性不符.

10. 按定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2n}{n}=2$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}=0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}=\frac{1}{2}$

证明 (1) 由于$\left|1-\frac{1}{10^n}-1\right|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$，$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)+1\right|<\varepsilon$.

(2) 由于$\left|\frac{(-1)^n+2n}{n}-2\right|=\frac{1}{n}$，$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{(-1)^n+2n}{n}-2\right|<\varepsilon$.

(3) 由于$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|<\varepsilon$.

（4）由于$\left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}$，$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}-0\right|<\varepsilon$.

（5）由于$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\ \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\frac{1}{n}$，

$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

11．用《$\varepsilon-N$》语言，表述$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$.

解　$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall N>0$，$\exists n_0>N$，使得$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$，则称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$.

12．**证明**：若$\{x_n\}$的奇、偶子列均收敛于a，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，由$x_{2n+1}\to a$，$x_{2n}\to a$（$n\to\infty$），$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，$|x_{2n+1}-a|<\varepsilon$；$\exists N_2>0$，当$n>N_2$时$|x_{2n}-a|<\varepsilon$，故取$N=\max\{2N_1+1, 2N_2\}$；当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

13．已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，按定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，由$x_n\to a$，$y_n\to b$，$\exists N_1$，$N_2>0$，当$n>N_1$时$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，当$n>N_2$时，$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，取$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>N$时，恒有

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

14．判别正误

（1）若$\{|x_n|\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

(3) 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists$无穷多个n，使$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(4) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对$\varepsilon=0.5$，必能找到$N>0$，当$n>N$时，$|x_n-a|<0.5$.

(5) 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均发散，则$\{x_n+y_n\}$必发散.

(6) 若$\{x_n\}$收敛而$\{y_n\}$发散，则$\{x_n+y_n\}$发散.

(7) 若$\{x_ny_n\}$收敛，则$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均收敛.

(8) 若$\dfrac{x_n}{y_n}\to a\neq 0$而$x_n\to 0$，则$y_n\to 0$.

解 (1) ×；例如，$x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$，$|x_n|$收敛，但x_n发散.

(2) √；$\because \big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$.

(3) ×；如1，1，2，$\dfrac{1}{2}$，…，n，$\dfrac{1}{n}$，….

(4) √.

(5) ×；例$x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$，而$x_n+y_n=0$.

(6) √；设$\{x_n+y_n\}$收敛，$\because\{x_n\}$收敛，$\therefore y_n=(x_n+y_n)-x_n$收敛，这与$y_n$发散矛盾.

(7) ×.

(8) √；设y_n不趋于0，则$\dfrac{x_n}{y_n}\cdot y_n\to ay_n$不趋于0，与题设矛盾.

15. 求x_n的极限

(1) $x_n=\dfrac{(-8)^n+9^n}{(-8)^{n+1}+9^{n+1}}$　　(2) $x_n=\dfrac{3+(-1)^n}{3+(-1)^{n+1}}$

(3) $x_n=\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}$　($a_0\neq0$，$b_0\neq0$，k，l为正整数)

(4) $x_n=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，　($|x|<1$)，

(5) $x_n=\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

(6) $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

(7) $x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解 (1) 原式$=\frac{\left(-\frac{8}{9}\right)^n+1}{\left(-\frac{8}{9}\right)^n(-8)+9}\to\frac{1}{9}$

(2) 因为$x_{2n}=2$，$x_{2n-1}=\frac{1}{2}$，故x_n极限不存在。

(3) i）$k>l$时，$x_n\to\infty$；ii）$k=l$时；$x_n\to\frac{a_0}{b_0}$；iii）$k<l$时，$x_n\to 0$.

(4) 由$(1-x)x_n=(1-x^{2^{n+1}})$，故$\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}$.

(5) 原式$=\frac{n^{-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{n}}\sin(n!)\to 0$

(6) 因为$x_n-\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\to\frac{3}{2}$，故$x_n\to\frac{3}{2}\times 2=3$.

(7) 原式$=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$$=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}$$

16. 运用夹逼性求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}$