

经济增长模型中的生产函数

[苏] Н·Б·巴尔卡洛夫 著

周德英 译

靳云汇 审校

社会科学文献出版社

经济增长模型中的生产函数

[苏] H·B·巴尔采洛夫 著

周德英 译

靳云汇 审校

社会科学文献出版社

北京·1992年

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА 1981

莫斯科大学出版社 1981 年版

经济增长模型中的生产函数

〔苏〕Н·Б·巴尔卡洛夫 著

周德英 译

靳云汇 审校

社会科学文献出版社出版发行

(北京建国门内大街 5 号 邮政编码: 100732)

国防科工委印刷厂印刷

787×1092 1/32 开本 4.25 印张 95 千字

印数 00001—00500

1992 年 7 月第一版 1992 年 7 月第一次印刷

ISBN 7-80050-424-7/F·45 定价: 3.80 元

版权所有 翻印必究

序

生产函数是描述产出与各种投入之间技术关系的一种分析工具。它的应用相当广泛。随着生产规模的扩大和技术水平的变化，对生产函数的研究越来越复杂化。从国外到国内，研究生产函数的成果颇多。其中，尤以数学家和经济学家合作研究出来的柯布-道格拉斯生产函数的影响为最大。在经济数学模型的发展过程中，研究生产函数的书文也日益增多。然而，对生产函数的研究偏重于微观的、短期的多，而宏观的、长期的较少。这与后两类生产函数的研究难度较大有关。

周德英副教授翻译的前苏联巴尔卡洛夫著的《经济增长模型中的生产函数》一书，不仅对基本的生产函数即两个自变量的生产函数作了详尽的论述，而且还对长期的和宏观的生产函数的研究作了探索，同时讨论了时间为中性的条件下生产函数的估计问题。尽管该书原版出版于十多年前，然而它对我国目前生产函数的研究仍不失其应有的参考价值。

我希望广大读者能从这个译本中获得有关生产函数的知识和吸取研究生产函数的经验。

乌家培（研究员）

一九九二年七月一日

[苏] Н.Б.巴尔卡洛夫

经济增长模型中的生产函数

该书从现代经济数学作为解决国民经济计划和长期预测问题的工具的角度，概括地叙述了生产函数和经济增长数学模型的性质。模型的实证是以苏联国民经济实际统计资料为基础。并特别重视建立长期预测的经济模型。

本书供从事运用数学方法分析社会主义国民经济计划和长期预测问题的专家参考。

目 录

绪 论	(1)
第一章 两个自变量的生产函数	(9)
第一节 定义	(9)
第二节 凹性	(13)
第三节 替代弹性	(15)
第四节 常规生产函数	(16)
第五节 CES 生产函数	(18)
第六节 柯布-道格拉斯函数	(20)
第七节 非常规生产函数	(21)
第八节 萨托函数	(25)
第九节 生产函数的渐近状态	(32)
第二章 时间为中性相关性的生产函数估计	(35)
第一节 时间的中性相关性	(35)
第二节 统计序列	(39)
第三节 柯布-道格拉斯函数的参数估计	(42)
第四节 不变替代弹性(CES)函数的线性化	(46)
第五节 关于参数的相关性	(50)
第六节 苏联国民经济生产函数	(55)
第七节 外推的稳定性	(59)
第八节 “均衡”估计	(62)
第九节 萨托-贝克曼分类法	(65)

第三章 经济增长标准模型中的生产函数	(68)
第一节 模型的设定	(68)
第二节 增长轨迹	(74)
第三节 大道定理	(77)
第四节 向大道逼近	(86)
第四章 宏观经济外推中的生产函数	(91)
第一节 经济增长的离散模型	(91)
第二节 短期生产函数	(94)
第三节 “寿命”函数	(99)
第四节 长期生产函数	(104)
第五节 技术周期	(111)
参考文献	(115)

绪 论

制订社会经济发展长远规划，需要根据反映现代特点的理论原理来不断完善计划和预测的经济数学模型。现实生活提出的任务要求发展理论，发展经济科学，使经济科学接近于经济实践的需要。研究科技进步和劳动的社会经济问题，要求提高数学理论在实际方面的应用效果，其中包括必须集中力量这个重要的方面。^①

经济数学模型中的生产函数，是用来研究生产中的科技进步，研究经济发展的集约化因素，分析国民经济的长期资源利用效果以及分析近期的人口预测的经济计量结构。实际应用生产函数这个工具，能够使长期预测模型更加有充分根据。

尽管在教科书中系统阐述生产函数和经济增长模型的形式特点是不久以前的事（伊万尼洛夫和洛托夫〔1979年，第二章〕），但是生产函数模型中的许多成果，却早已成为应用数学教科书的典型例子：生产函数的解析特性，说明了经济增长模型的最优化问题，说明了凸分析的一般定理，即大道定理，说明了在非线性系统中，应用庞特里雅金最大值原理的一个成功例子。

1966年出版的M.布劳恩^②的著作是这样开始论述的：

①此段译文略有删节。——译者

②布劳恩：俄译本〔1971年〕，大概这本书至今仍然是俄文版中叙述不变替代弹性函数分析和试验特征的最好一本书。（参阅李朝贤译：《技术变动的理论与测定》，台湾中华书局1975年版。——译者）

“当这个领域的一个研究接着一个研究，具有内容丰富和观点新颖的时候，我们建议读者去注意生产函数这本书就未免有些为时过早。”现在已经过去了 15 年，自那以后，作为经济计量模拟工具的生产函数著作的出版有增无减，方兴未艾。

在 70 年代，极小值的有效算法程序（马尔克瓦尔德算法）已不再是独一无二的程序，不仅对 1928 年提出的柯布—道格拉斯简易线性函数的参数估计，而且对很复杂的生产函数参数估计，也都从计算问题变成必要的统计信息问题了。尽管解决这个问题存在着原则性的障碍，但是为了弄清灵活函数的特性，为了弄清许多有效应用试验生产函数的例子，至少在宏观经济学中，动态考察几乎在任何时候都不是那么多样化。增长速度的实验研究、各种要素的投入及体现技术进步的特点的成果，是大量的。

我们找到了各种扩展的增长模型，其中包括自然资源利用、人口和劳动资源内生增长、环境污染以及发展的外部情况等分析模型，取得了精细的分析结果。

但在 70 年代，出现了只进行数值研究的大动态模型，而对索洛—斯旺系列的小模型只作为爱好来研究，这在很大程度上使生产函数的重要意义丧失了。如果具有分析性质的经济计量关系的选择可以用正规的联系方程来有成效地代替，例如在达到几乎有保证的高质量统计检验之前，用标准方程的大量数据的快速测定来代替，那么就值得采用灵活而相当复杂的函数。即使只有一个简单的依赖关系，尽管参数的估计是满意的，动态表现却不好，在对经济模型调试时，可以用类似的依赖关系来代替。模型的外推实现或方案实现的质量未必很高，但模型的构造已经工业化，可以用计算机

调整模型和修正估计。应当注意，即使在传统的国民经济动态模型中，产出对要素的依赖关系最好用柯布-道格拉斯函数来描述，而有时不知为什么也用多项式来描述，后者先验地不具备令人满意的预测性能。

本书希望读者注意下述情况，即灵活的特殊函数的经验有限性，不会使问题变得那么严重，例如象标准关系式中参数的不可避免的误差和不稳定性那样；还要注意一种情况，即抛弃对生产函数这个比较精细而且独特的工具有利的统计检验估计，应当以形式分析要求对统计检验估计加以补充，这种要求应反映相互密切作用的各种要素（自变量）的理论概念。

我们提出了论述以生产函数为基础的宏观经济模型的分析性质和编制可能性问题，指出这种工具在多大程度上受解析性质和原始信息要求的限制，借助于经验（一般地用苏联实际数据）说明经济增长模型中生产函数结构的工作能力。这时生产函数被看成是经济计量方程，其质量，特别是在外推时，参数的稳定性可以从经济计量学的角度来评价。

生产函数是取决于两个要素或更多要素成果的一般经济计量模型，这些要素的相互替代的可能性和制约性对生产函数来说是主要的。

例如，在人口模型中模拟男女性别是相当困难的（所谓“稳定居民理论中的性别矛盾”），如果出生数 $B(t)$ 只与男性居民数 $M(t)$ 相关，或只与女性居民数 $N(t)$ 相关，用 $B(t) = b(t) \cdot N(t)$ 这种形式的相关关系模型将得出大相径庭的结果。由于在动态中 $B = \min [N, M] b(t)$ 的自然联系，因而把出生数说得过小是不正确的。但用叶林和萨缪尔森的简化模型（1974年），则获得了较好的结果：

$$\begin{cases} M = (1 - g) \cdot F(M, N) - \mu_m \cdot M \\ N = gF(M, N) - \mu_n \cdot N \end{cases}$$

式中： $F(\cdot, \cdot)$ 为生产函数； g 为出生女孩所占比重； μ_m, μ_n 为死亡率。生产函数的参数可以解释为人口，特别是解释为替代弹性的变化，这是破坏传统意义所确定的对于生育行为加以限制的证明。相应的历史分析是很有意义的。依此类推，也可以说婚姻函数取决于潜在的未婚男女人数。

在米尔斯的著作〔1978 年〕中，用内部保证金 M_d 和外部保证金 M_f 的 CES 函数，探讨了货币资金的保证率 M_s ，函数形式如下：

$$\frac{M_s}{P_d} = a \left[b \left(\frac{M_d}{P_d} \right)^{-\rho} + (1 - b) \left(\frac{M_f}{P_f} \right)^{-\rho} \right]^{-1/\rho}$$

式中： P_d, P_f 为相应的价格水平。与此相似，克洛特费尔特（1978 年）根据国家和个人的保安费用，探讨了防止犯罪的警卫水平。在因特里利盖托和奥辛诺米的文章〔1979 年〕中，利用工作的预期收入与闲暇时间（leisure time）之间的无差异曲线，描述了劳动的供给。生产函数的等产量线也是无差异曲线，在一般情况下，自变量之间的替代可能性是有限的，通常用经济计量方程组估计容易估计过高。

类似的问题在加总时也会产生。B.C.达达扬〔1979 年〕在苏联经济计量模型中提出了社会总产品 V 决定于工业总产量 VP 和农业产量 VA 。加总的自然说明 $V = a_0 + a_1 VP + a_2 VA$ 很可能忽视在求和过程中相互作用的“韧性”，而夸大相互替代的可能性，也就是说，用个别子模型可以描述总产量对其构成的每个产量的变化的反作用。事

实上：根据 1961—1977 年数据，线性方程可估计如下：①

$$V = 11.7955 + 0.8387VP + 0.0426VA$$

$$(2.8818) (0.0179) (0.0474)$$

$$R^2 = 0.9992; DW = 2.8999$$

根据线性生产函数外推 1979 年的总产量，在工业产品增长 3.4% 的情况下②，农业生产出现减产，社会总产品 V 比 1978 年增长 4%。在这种情况下，CES 生产函数

$$V = \alpha [bVP^{-\rho} + (1-b)VA^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

的估计不那么合理，导致稍差的统计检验；在 $\alpha = 1.1497$ ， $b = 0.8$ ， $\rho = -0.8$ ， $\gamma = 0.9583$ 时， $R^2 = 0.9977$ ， $DW = 1.4998$ ，但根据这一函数，在外推中明显地表现出更真实的情况，1979 年社会总产品 V 增长 2.0%。

没有必要细说生产函数在宏观经济模型中的传统应用。把社会最终产品、国民生产总值、创造的国民收入或总产品（按不变价格计算）作为产出；把按工时或就业人数（按地区比较有时候是全体居民数），以及按不变价格计算的基金（固定资产）或生产性固定资产作为自变量。由生产函数决定的这些变量之间的相互联系，确定了所谓抽象的技术，即表现在生产函数术语中的成套的生产综合特性（如各种要素的替代能力，对生产规模变化的反应，生产资源利用的相对密集度等）。

①变量已标准化，以1970年为100。来源：C.B.卡赞采夫（1976年，第150页）；《1922—1972年苏联国民经济》，莫斯科1972年版，第49、129、220页；《1975年苏联国民经济》，莫斯科1976年版，第53页；《国民经济60年》，莫斯科1977年版，第77、168、275页；《1978年苏联统计数字》，莫斯科1979年版，第21、89、111页。

②1980年1月26日苏联《真理报》。

生产基金（资金）和劳动，在生产过程中起着不同的作用。劳动是生产中唯一的第一性资源（要素）。然而，对直接劳动消耗和物化劳动消耗（基金）分别计算，使我们能够探索它们之间各种相互作用对生产成果的影响。资金装备率和资金产值率对劳动生产率的影响，由生产中资金与劳动的比例关系决定的资金产值率的发展趋向，作为资金产值率和劳动生产率的因素的资金年龄构成的作用，技术与时间相关，特别是按时间长短分为各个不同部分，生产中技术变化的影响和科技进步的不同作用，经济发展的外延因素和内涵因素之间的关系——所有这些都可以在生产函数和在此基础上得出的结构的范围内进行研究，这往往比利用简单关系的分析要精确得多。例如，在估计国民收入中由于劳动资源流入量减少可能产生的损失时，常常采用劳动生产率不变的假设，这会导致硬性的，夸大系统反应的依赖关系（只要回忆一下 50 年代末经济增长对缩短周工作时间的实际反应就足够了）。

宏观经济生产函数不会导致估计过高的反应，即使估计的生产函数很粗糙，常常也能在外部变量发生显著变化时保持参数在时间上的稳定性，保证在不把劳动生产率或资金产值率这些基本变量转向为人为的、有时甚至是随意的与时间明显相关的情况而进行可靠的外推。

规模不大的索洛-斯旺（索洛〔1956〕）的经济增长模型，是生产函数的自然补充：实质上这是保持生产函数经济计量性质的综合生产函数的合拢。这种模型的优点（除需要少量必要的统计信息外），能保持参数在时间上的稳定性，更确切些说，不夸大对外部变量显著变化的灵活反应。详尽的可控模型，几乎总是冒险，好象是对控制变量的变化比实

际系统更易受感应，因为在变化迟缓的变量与变化迅速的变量之间可能存在函数关系。经济增长的总量模型，实质上是一种惯性的趋势模型，适合描述缓慢变化的变量。当参数的稳定时间接近于人口统计过程的特有时间时，这种模型与居民即人口政策模型是协调一致的，尤其是这种模型不歪曲劳动资源对宏观经济变量的影响。

经济增长模型的参数估计不是很复杂的，具体详细问题通常根据理论研究成果来解决，模型的解析性质和经济计量性质基本清楚。因此，经济增长模型是进行外推计算，以及对影响国民经济长期发展的各种因素（首先是人口因素）进行理论分析的很好工具。这种模型也可以同详细制定的计划模型结合起来使用。如上所述，生产函数对于社会主义经济的经济计量模式是特别有效的，因为社会主义经济没有周期性波动，劳动力得到充分利用，增长势头稳定，对需求的凝聚关系的依赖性小。

本书的第一章，撇开自变量和产出的内容说明，对作为一种拟凹性函数的生产函数性质进行了原理分析。我们想再一次说明这样一个事实，即生产函数并不是两个自变量的任何形式的函数，生产函数形式的选择，在很大程度上受一般自然性质的限制。

第二章阐述了中性时间相关生产函数的参数估计，即 $Y(t) = H(t) \cdot F(\dots)$ 型，在这里， $F(\dots)$ 显然与时间无关，实际上在计算中只使用这样的函数，尽管长期的技术变化几乎在任何时候都不可能是中性的。我们举出了估计宏观经济生产函数的实例，建立了苏联国民经济生产函数。

第三章我们考察了经济增长模型的解析性质，特别是大

道定理的性质。我们论证了生产函数参数的稳定性对整个增长模型的原则性作用。

第四章涉及的问题是在外推计算中以及在研究经济增长模型中的控制作用时，如何保证经济计量结构的稳定性。我们探讨了以生产函数为基础的、能够更精确反映经济增长时间变化的各种结构的变形。

由于有关生产函数的许多著作是在国外完成和发表的，因此本书提供的参考文献中相当一部分是英文文献。

作者谨向参加本书成果讨论以及在写稿过程中给予帮助的 Ю.П.伊万尼洛夫、Г.И.卡林曼、А.Я.克瓦莎、А.А.彼得罗夫、А.А.波杜佐夫、Ю.Н.切列姆内赫和 А.Г.施密特表示衷心的感谢。

第一章 两个自变量的生产函数

两个自变量的生产函数是特殊的拟凹函数类。通常我们只讨论（任意阶）齐次函数。根据内容的假设，要求它们有先验的“固有”属性（按自变量单调），这些属性对函数的形式和参数的允许值给予明显的限制。特别是和参数估计比较简单的经常采用的函数（如不变替代弹性(CES)生产函数）有关。或者必须把没有违反先验假设的自变量空间范围扩充为模型估计所研究的区域；或者必须转向更精密更难估计的生产函数；或者必须进一步对参数进行限制。从这些问题出发，我们试图阐述两个自变量生产函数的一般特性。

第一节 定 义

两个自变量 K 和 L 的生产函数是定义在第一象限内的二次可微函数 $Y = F(K, L)$ 。在第一象限直至边界上，函数本身及其偏导数均连续。这时对所有的 $K > 0, L > 0$ ，有

$$F(K, L) > 0; r = \frac{\partial Y}{\partial K} > 0; w = \frac{\partial Y}{\partial L} > 0 \quad (1)$$

这个重要的先验假设的宏观经济解释和以下所引入的假设一样（有时采用“新古典学派特性”的统一术语），在文献（Браун〔1971，第2，3章〕，Столерю〔1974，第11章〕）中明确指出，并多次讨论。通常还假设，对所有的

$K > 0, L > 0$, 生产函数必须满足沿坐标轴严格凹性条件:

$$r_2 = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0; \quad w_2 = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0 \quad (2)$$

而且还要满足严格的拟凹性条件, 也就是满足等产量线的严格凸性条件 (Бектор (1968), Зангвилл (1973, 第 39 页)). 西方宏观经济文献中, 在生产要素替代条件下, 这些假设解释为“收益递减规律”和“费用递增规律”。

我们只讨论固定阶数的 γ 阶 ($\gamma > 0$) 齐次生产函数: 对任意 $\lambda > 0$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L)$$

这种齐次性假设在很大程度上是技术性的: 在更一般的生产函数的分析研究和参数估计中, 就象以它们为基础建立动态模型那样, 确定这种齐次性假设是困难的, 虽然在一些宏观经济著作中, 将齐次性假设甚至线性齐次性假设(规模报酬不变)解释为在建立平行生产时扩大生产能力的重要特性。

不难证明, 齐次性可由关系式

$$\Phi(\lambda) = F(\lambda K, \lambda L) / F(K, L) \quad \text{对任何 } \lambda > 0,$$

不依赖于 K 和 L 的较弱条件导出 (Кац (1970)). 更一般的生产函数类叫做同位相似等产量线生产函数 (HIPF)①, 其形式为 $F(\cdot \cdot) = F_2(F_1(\cdot \cdot))$, 式中 $F_1(\cdot \cdot)$ 为线性齐次函数 ($\gamma=1$), $F_2(\cdot)$ 是单调函数 (С.Клему (1968)). 许多结果几乎都可以自动地转移到 HIPF 函数上来。

生产函数的对数导数 $\alpha = rK/Y$, $\beta = wL/Y$ 称为要素弹性。不难看出, 对于 $K > 0, L > 0$, 有 $0 < \alpha < 1$ 和 0

① Homothetic Isoquant Production Functions.