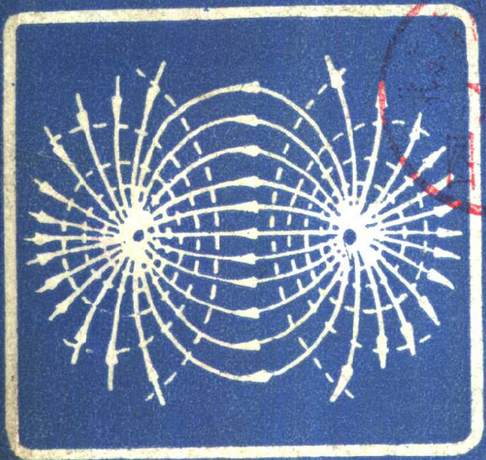
李炳炎 编

电磁学习题分析与解答



山东科学技术出版社

电磁学习题分析与解答

李炳炎 编

山东科学技术出版社

内容提要

本书精选了电磁学典型和难度较大的习题600余道，主要选自编者多年教学过程中积累的题目和国内外近几年出版的教材中的部分习题。内容包括静电场、静电场中的导体和电介质、稳恒电流和直流电路、稳恒磁场、电磁感应和暂态过程、磁介质、交流电路、交变电磁场和电磁波等。每一道习题都有详细的解题过程，而且文字简练，深入浅出，解法多样，能帮助读者开阔思路，加深对电磁学基本概念的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供高等院校理工科各专业、师范院校师生教学参考，也可供电视大学和业余工大以及自学成才的读者参考。

电磁学习题分析与解答

李炳炎 编

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

787×1092毫米 32开本 26.5印张 581千字

1983年8月第1版 1983年8月第1次印刷

印数：1—20,000

书号 15195•132 定价 2.70元

前　　言

电磁学是理工科大学中一门很重要的基础课程。对于正在学习该课程的理工科大学生和自学成才的读者，因初次接触到“路和场”的概念，解题时往往会遇到许多困难。为了帮助读者深入理解电磁学的基本概念和规律，提高分析问题和解决问题的能力，笔者编写了《电磁学习题分析与解答》一书。

本书习题均经归类精选，选题范围广泛。每一道习题都有详细的解题过程，说明了解题的根据、步骤，并力求给出准确的结果。对于当前国内所流行的电磁学教材和某些国外教材中较为典型和难度较大的题目，笔者都作了适当的分析和讨论。部分习题还列举了几种不同的解题方法，有利于读者开阔思路，扩大视野。

本书在编写过程中，山东大学电子系周北屏教授曾给予热情的鼓励和指导，叶荣敬同志作了大量工作，在此一并致谢。

编　者

1982年8月

目　　录

第一章 静 电 场

§1-1 库 仑 定 律

1-1. 氢原子由一个质子（即氢原子核）和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是5.29×10^{-11}米。已知电子带负电，质子带正电，它们的电量相等，都是1.60×10^{-19}库，电子质量$m=9.11\times10^{-31}$千克，质子质量$M=1.67\times10^{-27}$千克，万有引力常数$G=6.67\times10^{-11}$牛·米^2/千克^2，求：

（1）电子所受的库仑力。

（2）库仑力是万有引力的多少倍？

（3）电子的速度。

解：（1）由库仑定律，可求得电子与质子之间的库仑力的大小为

$$F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\times8.85\times10^{-12}}\times\frac{(1.60\times10^{-19})^2}{(5.29\times10^{-11})^2}$$

$$=8.22\times10^{-8}\text{牛}$$

（2）由万有引力公式，可求得电子与质子之间的万有引力为

$$F_m = G\frac{mM}{r^2}$$

$$= 6.67\times10^{-11}\times\frac{9.11\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{(5.29\times10^{-11})^2}$$

$$= 3.63\times10^{-47}\text{ 牛}$$

因此库仑力是万有引力的

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{8.22\times10^{-8}}{3.63\times10^{-47}} = 2.27\times10^{39}\text{ 倍}$$

(3) 因为电子与质子之间的万有引力比库仑力小很多，这里只考虑库仑力，所以由圆周运动公式

$$F_e = \frac{mv^2}{r}$$

可求得电子的速度为

$$v = \sqrt{\frac{F_e r}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{8.22\times10^{-8}\times5.29\times10^{-11}}{9.11\times10^{-31}}}$$

$$= 2.19\times10^6\text{ 米/秒}$$

讨论：本习题说明库仑力远远大于万有引力，因此在原子物理学等领域里不必考虑粒子间的万有引力。

1-2. 铁原子核里两质子间相距 4.0×10^{-15} 米，每个质子的电荷都是 1.6×10^{-19} 库，求：

(1) 两质子间的库仑力。

(2) 库仑力是每个质子所受重力的多少倍？

解：(1) 由库仑定律，可求得两质子间库仑力的大小

为

$$F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\times8.85\times10^{-12}}\times\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{(4.0\times10^{-15})^2}$$

$$=14\text{ 牛}$$

（2）由重力公式，可求得每个质子所受重力为

$$F_g=mg$$

$$=1.67\times10^{-27}\times9.8$$

$$=1.6\times10^{-26}\text{ 牛}$$

因此库仑力是每个质子所受重力的

$$\frac{F_e}{F_g}=\frac{14}{1.6\times10^{-26}}=8.8\times10^{26}\text{ 倍}$$

讨论：本习题说明两质子间具有巨大的库仑斥力，虽然它必定被强大的核吸引力的一部分所抵消，但是它的存在使得原子核不象无此斥力时那么稳定。α 粒子由重核中自发放射和核裂变的现象，就是这种不稳定性的证明。

习题 1-1 和习题 1-2 还说明，原子核的结合力远大于原子的结合力。原子的结合力又远大于相同粒子相隔同样距离时的万有引力。

1-3. 氢原子由一个质子（即氢原子核）和一个电子组成。根据玻尔模型，电子绕核作圆周运动，它的角动量

$$L=mr^2\omega=n\frac{h}{2\pi},\quad n=1,2,3,\cdots。$$

其中 h 为普朗克常数，等于 6.626×10^{-34} 焦·秒。已知质子

带正电，电子带负电，它们的电量都是 1.602×10^{-19} 库，电子质量为 9.11×10^{-31} 千克，求第一玻尔轨道（$n=1$ 时）的半径值。

解： 在氢原子的玻尔模型中，电子和质子间的静电引力（库仑力），是使电子在轨道上运动的向心力。因此，令 v 为轨道速度。则

$$F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

由 $v=r\omega$，可将电子的角动量表示为

$$L=mrv=n\frac{h}{2\pi}$$

从上面两个方程中消去 v，则得

$$r=\frac{\varepsilon_0 n^2h^2}{\pi me^2}$$

再将各量的数值代入，就得到 $n=1$（基态）时的电子轨道半径，即第一玻尔轨道的半径：

$$r=\frac{8.85\times10^{-12}\times1^2\times(6.626\times10^{-34})^2}{\pi\times9.11\times10^{-31}\times(1.602\times10^{-19})^2}$$

$$=5.29\times10^{-11}\text{ 米}$$

1-4. 真空中有一点电荷 Q 固定不动，另一质量为 m、电荷为 $-q$ 的质点，在质点与 Q 之间的库仑力的作用下，绕 Q 作匀速圆周运动，半径为 r，周期为 T。证明：

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{qQ}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$$

证明： 电荷 $-q$ 绕固定电荷 Q 作匀速圆周运动，它们之间的库仑力为向心力。由库仑定律和圆周运动公式可得

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

又由
$$v=r\omega=r\frac{2\pi}{T}$$

所以
$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

即
$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{qQ}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$$

1-5．在图 1-1 中，电量都是Q的两个点电荷，分别位于$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$及$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$两点，点电荷q位于$C(x,\ y,\ z)$点，求电荷q所受的库仑力。

解：由库仑定律，可求得位于A点的电荷对电荷q的库仑力为

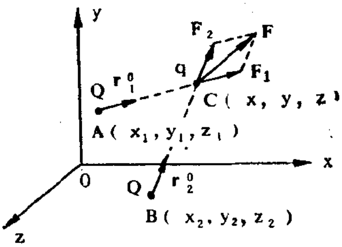


图 1-1

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1&=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}}\boldsymbol{r}_1^{\,0}\\&=F_{x1}\boldsymbol{i}+F_{y1}\boldsymbol{j}+F_{z1}\boldsymbol{k}\\&=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{\,3}}[(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

式中：$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$。

同理，可求得位于B点的电荷对电荷q的库仑力为

$$F_2=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}[(x-x_2)\boldsymbol{i}+(y-y_2)\boldsymbol{j}+(z-z_2)\boldsymbol{k}]$$

式中：$r_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$。

电荷q所受的合力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\\&=(F_{x1}+F_{x2})\boldsymbol{i}+(F_{y1}+F_{y2})\boldsymbol{j}+(F_{z1}+F_{z2})\boldsymbol{k}\\&=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x-x_1}{r_1^3}+\frac{x-x_2}{r_2^3}\right)\boldsymbol{i}\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{y-y_1}{r_1^3}+\frac{y-y_2}{r_2^3}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{z-z_1}{r_1^3}+\frac{z-z_2}{r_2^3}\right)\boldsymbol{k}\right]\end{aligned}$$

1-6．在图1-2(a)中，设$q=1.0\times10^{-7}$库，$a=5.0$厘米，求左下角的电荷所受的库仑力。

解：选坐标如图1-2(b)所示。由库仑定律，可求得$-2q$对$+2q$的库仑力为

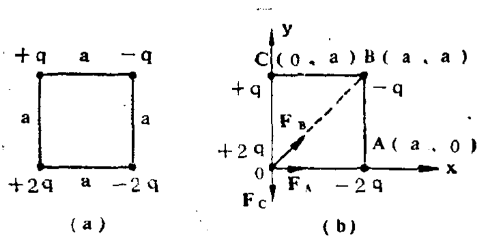


图1-2

$$\boldsymbol{F}_A=\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{i}$$

$-q$ 对 $+2q$ 的库仑力为

$$\boldsymbol{F}_B=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}\,a^2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$+q$ 对 $+2q$ 的库仑力为

$$\boldsymbol{F}_C=\frac{-2q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}$$

所以，$+2q$ 电荷所受的合力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_B+\boldsymbol{F}_C\\&=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)\boldsymbol{j}\right]\\&=\frac{(1.0\times10^{-7})^2}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times(5\times10^{-2})^2}\\&\quad\left[\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)\boldsymbol{j}\right]\\&=0.17\boldsymbol{i}-0.046\boldsymbol{j}\\&=0.176\underline{/-15.0^\circ}\ \text{牛}\end{aligned}$$

也就是说，$+2q$ 电荷所受的库仑力是 0.176 牛，与 x 轴的夹角为 -15.0°。

1-7. 电量都是 Q 的两个点电荷，放置在 y 轴上 $y=+a$ 和 $y=-a$ 处。另一点电荷 q，放在 x 轴上某一点，求：

(1) 如果电荷 q 在坐标原点，作用在它上面的力是多大？

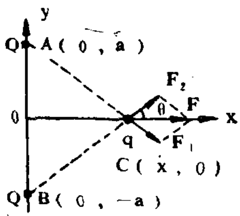
(2) 如果电荷 q 的坐标为 x，求它所受力的大小和方向。

（3） x 为何值时力最大？

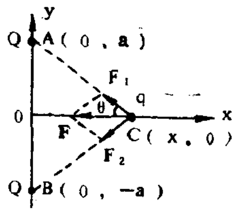
（4）电荷 q 从静止开始将如何运动，分别就 Q 与 q 同号和异号两种情况加以讨论。

解：（1）如果电荷 q 放在原点，受到的合力为零。

（2）如果电荷 q 的坐标为 x（图 1-3），它受到第一和第二电荷的作用力为 F_1 和 F_2。考虑对称性，当 Q 与 q 同号时，合力 F 的方向沿 x 轴正方向；当 Q 与 q 异号时，合力 F 的方向沿 x 轴反方向。F 的大小为



(a) Q与q同号



(b) Q与q异号

图 1-3

$$F = 2F_1 \cos\theta = \frac{qQx}{2\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

（3）由 $\dfrac{dF(x)}{dx} = 0$，可求出极大值的位置：

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{qQx}{2\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^3}$$

$$= 0$$

得 $$a^2-2x^2=0,\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

即当 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 时，$F(x)$为最大。

(4) 如果电荷 q 从静止开始运动，则有以下两种情况：

① Q与q同号：由于开始时静止，初速度为零，故运动方向与合力的方向相同，q 沿 x 轴正方向作变加速直线运动，一直到无穷远。

② Q与q异号：在C点，由于电荷q受力沿x轴反方向，且初速度为零，所以运动方向与力方向相同。当q运动到坐标原点时，受力为零，但由于有速度，故能通过坐标原点继续向x轴反方向运动。过原点后，力的方向与运动方向相反，q的动能克服静电场力做功，速度愈来愈小。到$-x$处速度变为零，在力的作用下，转向沿x轴正方向运动。过原点后，又作减速运动，至C点速度变为零，然后向左运动。如此周而复始，故是以坐标原点为中心沿x轴作周期性的振动。

1-8. 在图1-4中，两个电偶极子的中心相距为R，每个电偶极子都是由在长为 l 的杆端分别置电荷$+q$及$-q$组成的。

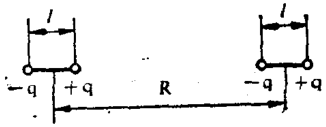


图 1-4

（1）求左边电偶极子所受的力。

（2）试证当 $R \gg l$ 时，该力约为

$$F=\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 R^4}$$

式中：$p=ql$ 为电偶极矩。

解：（1）由图 1-4 可知，左边电偶极子所受的力为右边电偶极子对其作用力的代数和。即

$$F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R-l)^2}-\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(R+l)^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R^2+l^2}{(R^2-l^2)^2}-\frac{1}{R^2}\right]$$

（2）当 $R \gg l$ 时，可略去 $\frac{l^4}{R^4}$ 项，所以上式可写成

$$F=\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[R^{-4}\left(1+\frac{2l^2}{R^2}\right)R^2\left(1+\frac{l^2}{R^2}\right)-\frac{1}{R^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[R^{-2}\left(1+\frac{3l^2}{R^2}\right)-\frac{1}{R^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3l^2}{R^4}\right]$$

$$=\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 R^4}$$

式中：$p=ql$ 为电偶极矩。

1-9. 两个质量为 10 克的小球，各用 1 米长的丝线把它们悬挂在同一点，它们带有相同的电量，静止时两线夹角为 8°（图 1-5）。

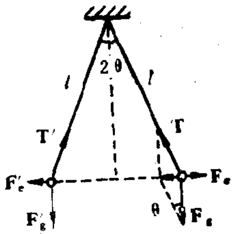


图 1-5

（1）画出每个小球上所受的力。

（2）设小球的半径和丝线的质量都可略去不计，求每个小球上的电量。

解：（1）每个小球受到的力有库仑斥力 $\boldsymbol{F}_e$、重力 $\boldsymbol{F}_g$ 和丝线的拉力 $\boldsymbol{T}$，三力的合力为零。

（2）由静止时三力的合力为零，得

$$F_e = F_g \operatorname{tg}\theta$$

即

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l\sin\theta)^2} = mg\operatorname{tg}\theta$$

所以

$$q = 2l\sin\theta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\theta}$$
$$= 2\times1\times\sin4^\circ\sqrt{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times10\times10^{-3}\times9.8\times\operatorname{tg}4^\circ}$$
$$= 1.2\times10^{-7}\text{库}$$

1-10．有四个正电荷，电量都是 q，分别放在边长为 a 的正方形的四个顶点(图 1-6)，问：

（1）在正方形中心放一个什么样的电荷，可以使每个电荷都达到平衡？

（2）这样的平衡与正方形的边长有无关系？

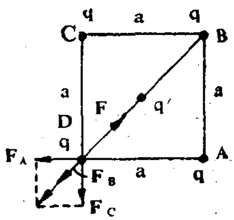


图 1-6

（3）这样的平衡是稳定平衡还是不稳定平衡？

解：（1）为使位于正方形顶点上的每个电荷都处于平衡状态，必须在正方形中心放一个电量为 q' 的负电荷，使作用在每个电荷上的合力等于零。用 $\boldsymbol{F}_A$ 表示 A 点电荷对 D 点电