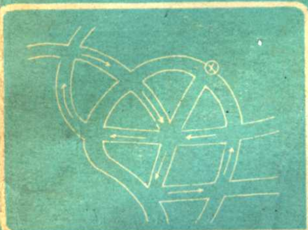

图论导引

〔匈〕B. Andrásfai 著

郭熙人 译

高等教育出版社

图 论 导 引

〔匈〕B. Andrásfai 著

郭 照 人 译

高等教育出版社

本书是根据匈牙利数学家 B. Andrásfai 所著《Introductory GraPh Theory》(1977)的英文本译出。全书把图论的概念与理论穿插于练习与问题之中，并且几乎对每个命题都作出了详尽的解答，便于初学和自学。

全书共分为七章，分别介绍了图论的基本概念，树和林，闭欧拉线，独立与覆盖以及极图理论等五个方面，最后一章给出了习题与问题的解答。

本书可供大专师生、研究生作教学参考用书；其中的具体问题和例子也可供数学工作者及有关科学技术人员作参考。

本书曾由清华大学林翠琴同志校阅。

图 论 导 引

〔匈〕B. Andrásfai

郭照人 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 216,000

1985 年 8 月第 1 版 1985 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—7,350

书号 13010·01017 定价 2.00 元

前 言

在关于数学题材的介绍性的讲演中，开头的习惯用语往往是："希腊文明创立了……原理"．几乎所有的经典题材也都采用这种表达方式，甚至由经典的核心内容通过不断提高抽象程度而形成的多数"现代"题材，也难免于此．尽管，首篇奠基性的图论的论文是欧拉(Euler)早于1736年写就的，但是，图论以现代面貌出现，为数学界所正视，那还是近百年来有了基尔霍夫(Kirchhoff)关于电网络的成果以后的事．近二十年，由于图论的迅速发展，一跃成为数学的一个独立分支．当然，图论还不能说已是现代化了的，它仍旧接近于原始的思想，仍然充满着未开发的领域，其"魅力"不亚于当年的希腊文明．图论是组合数学的一支，可应用于各种普通的问题．它不要求高深的数学工具，而有时需要深入的思考．因此对于年轻的数学爱好者来说，图论是极好的研究园地．本书列举的一些问题与图论中的某些结果已成为现代学校课程的一部分．广泛的讲演使我注意到各类水平人士的兴趣．鉴于当时还未有匈牙利文的图论书籍，我于1969年写成了本书的匈牙利文本．(诚然，图论方面第一本科学专著恰恰是匈牙利人、丹尼斯·哥尼希(DénesKönig)教授于1936年就写成的，但是他用的偏偏是德文.)近十五年，关于图论的大量的著作已经出版(参看文献目录部分).

我试图对书中几乎全部的命题，不管是简易的还是繁难的，都给出严谨的证明．各项结果以原始形态给出：仿效发现的过程，解辅助命题，定义一批已证实为有用的新概念，并确定其在实际问题中是否可推广．练习题、问题及其解答贯穿始终的是：用新问题给出提示，简化复杂的命题，并且首要的是给读者以激励．

练习题并不难，读者只需画画图、略加计算便可获解决．每章末，星号(*)后的练习与问题为的是提高读者的能力，以解决与该章内容有关的问题．它们的解答见于第七章，但恳切地期望读者独立地去解题．建议读者随时随地以画图阐明书中的命题．尽管书中图例丰富，但这决代替不了读者亲自动手画图，只有自己动手才能更好地弄清图形的演化．借此使读者熟悉书中的内容，导致读者自己去发现结果．

为避免混淆，一律不在正文内注明命题的出处，而仅于书末列出引文索引．每章内，未作正式的分节．各组练习与问题正是划分节段的标志．各节的内容概括在目录中．特别，为了强调图论中一些重要的方法，除了在内容索引中列出外，也在正文中以粗体字标出．每章内，练习、问题与命题包括列于章末的练习、问题与命题均作统一的编号．在每一章中，编号是从头开始的．

第一章阐述基本概念；其后的五章，分述图论的五个方面，其中收进了一些新的结果．还有一些有趣的问题未能在此讨论．比如，图与曲面、矩阵以及概率论的关系；地图的着色问题，电网络详细的拓扑描述，以及某些运输问题的解等．上述的大多数问题拟收入正在筹备中的本书的下一卷．书末的文献目录包含了作为进一步阅读的建议．

从适应数学的任何一级水平来说，可以发现本书将是十分有用的；事实上，对于那些有问题需要解决的人们，情形更是如此．因为，借助于图论的思想以提高解决问题的能力，这对于任何一个领域来说，都是有益的．

Béla Andrásfai

目　录

第一章 绪 论

我们先来考虑一项在若干个运动队间的比赛. 设想已赛完了几局, 需要一个清楚的图形来表示它们. 不妨采用这样的图形: 使每个队对应于其中的一个点; 由于赛局总是在两个队间进行的, 任一赛局可由联结两对应点的一条线来表示. 我们用如下的方式标出全部已完成的赛局: 在每个点旁须标以对应队的专门的记号, 不然, 由于对应着赛局的线可能相交, 同时, 交点看起来好像也表示运动队, 这就容易产生误解. 因此, 常用小圆圈而不是用点来标记运动队. 图 1 指明下列局面: 有 a, b, c, d, e 5 个队, 且下列赛局已完成:

$$a—d, \quad a—e, \quad b—c,$$
$$b—d, \quad c—d, \quad c—e,$$

图 1 叫做此局面的**图**.(用图这个词是因为可以借助图解来论证.) 其中的小圆圈与线分别叫做图的**顶点**与**边**.

点、**结点**、**接点**等词也用以代替顶点这个词. 对应于赛局$a—d$的边有时记为$\{a, d\}$. 显然, $\{a, d\}$ 与 $\{d, a\}$表示同一条边. 类似地, $\{a, e\}$与$\{e, a\}$相同, 等等. 顶点 a 与 d 都叫做边$\{a, d\}$的**端点**; 边$\{a, d\}$**联结**顶点 a 与 d, 或说它**关联**于 a 与 d, a 是 d 的一个**邻点**, a **邻接**于 d, 或说 a 与 d 是**邻接顶点**. 图 1 是这样的图 G_1, 它含有顶点 a, b, c, d 与 e, 以及边 $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$及$\{c, e\}$.

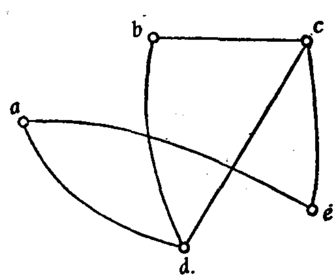

图 1

有可能一个给定的队还没参加过比赛;而在有的比赛中,相同的两个队之间进行了不止一局的比赛. 图 2 中的图 G_2 表示包括上述两种情况的局面. 不与边关联的顶点叫做**孤立顶点**. 如果两条或两条以上的边关联于同一对顶点,这时,就说图含有**多重边**. 由此知道,b 与 e 是 G_2 的孤立顶点. 联结 c 与 f 的各条边可以由下标加以区别,例如 $\{c, f\}_1$、$\{c, f\}_2$、$\{c, f\}_3$. 类似地,对应于 a 与 d 间的赛局是 $\{a, d\}_1$ 及 $\{a, d\}_2$.

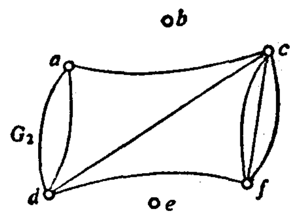

图 2

图 3

某些人之间的认识关系可以用类似的图形来表示,这里,假定认识是相互的. 每个人对应于一个顶点,如果两个人互相认识,就用一条边联结对应的两个顶点. 一个人 a 认识自己这一事实可以用一条只关联于顶点 a 的边来表示(参看图 3). 象这样的边常叫做**环**.

如果,一个图形含有点和线(顶点和边),且每条线联结着两个顶点(不必要求是不同的),以下就称这样的图形为**图**. 关联于顶点 p 的边的端点数叫做 p 的**次数**或**价**,记为 $\varphi(p)$. 次数为 n 的顶点有时叫做 **n-价的**.

图 3 只包含一个顶点、一条边,$\varphi(a)=2$. 图 4 中的 G_3 包含 8 个顶点和 10 条边,其中有两条边是环;在该图中,$\varphi(a_8)=0$, $\varphi(a_4)=\varphi(a_5)=1$, $\varphi(a_6)=2$, $\varphi(a_7)=3$, $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=4$, 以及 $\varphi(a_3)=5$.

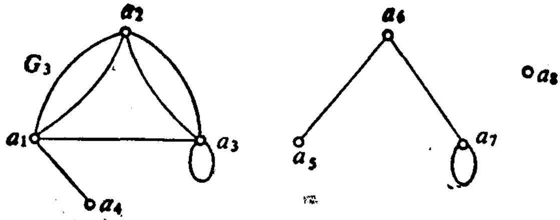

图 4

练　　习

1. 找出图 1 与图 2 中各图的顶点数与边数以及每个顶点的次数.

2. 画出几个具有 5 个顶点的图，使其中含有次数为 3 的顶点是两个，而次数为 4 的顶点是 3 个. 问在这些图中各有多少条边?

3. 画出具有 6 个顶点的图，使其中各顶点的次数是 1, 2, 2, 3, 5 与 5. 在这样的图中有多少条边?

问　　题

4. 确定具有 5 个顶点，且次数为 1, 2, 2, 3, 3 的图的数目.

5. 某次聚会的成员到会后握了手. 试证与奇数个人握过手的人数是一个偶数.

6. 在一次象棋比赛中，任意的两名选手间至多只下一盘. 试证总能找到两名选手，他们下过的盘数恰好相同.

7. 在问题 6 所指的比赛中，如果每名选手与其余所有的选手都比赛过，且选手的人数是 n，求总盘数.

为解练习 2 可以用多种方式画出图来. 图 5 与图 6，每个都

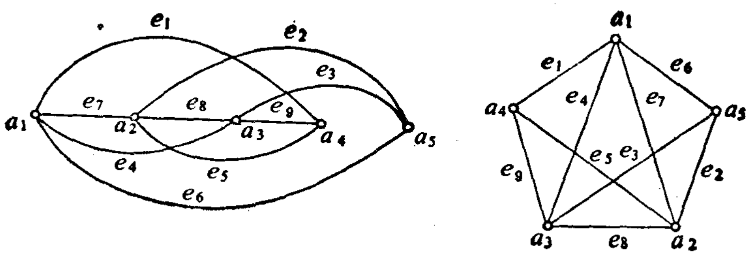

图 5

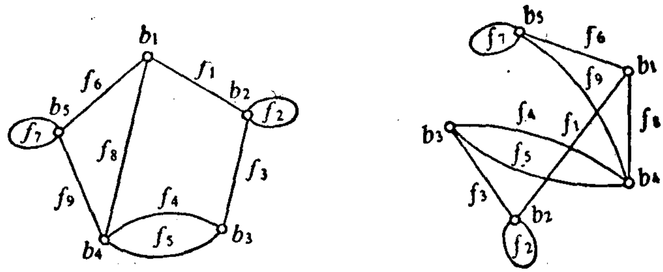

图 6

表示两个图．图 5 中的两个图都包含顶点 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ 以及边 $e_1, e_2, \cdots, e_9$，两个图看起来不一样，但是它们的顶点与边都可以标记为 $e_1=\{a_1, a_4\}, e_2=\{a_2, a_5\}, \cdots, e_9=\{a_3, a_4\}$．由于它们表示了相同的关系，在这些图之间不存在本质的差别．

如果图 G_1 的每个顶点与边能以唯一的方式对应于图 G_2 的顶点与边，使图 G_2的顶点与边也以唯一的方式对应于图 G_1的顶点与边，并且对应的边关联于对应的顶点，则称图 G_1 与 G_2 是**同构的**．简短地说，若两个图的各顶点之间有保持邻接性的1—1对应关系，则它们是同构的．为要表示一个图，可以把它的顶点想象成小圆环，它的边是系于环上能拉伸的橡皮筋．在移动、拉伸、压缩的过程中，我们的图形都保持图的**同构性**．通常，如果把同构的图认为是**相同的**，不会引起误解．例如，可以说图 5 中的两个图是相同

的．图 6 的两个图也是同构的，其间的对应关系由对应的字母表出．但从图 5 与图 6 中各取出一个的图是不同构的，因为图 5 不含任何环而图 6 中的图都含有环，而如果对应关系是同构的，那么环就必须与环对应．

图 5 与图 6 中四个图的每一个都具有 9 条边．要是再画出满足所要求的图来，它们的边数仍会是 9．其实，具有练习 **3** 所指定的性质的每个图都有 9 条边．这是碰巧的呢还是有着某一规律的结果？在这样的一些图中有些什么共性？把顶点的次数加起来，在练习 **2** 与 **3** 中分别有

$$3+3+4+4+4=18$$

以及

$$1+2+2+3+5+5=18.$$

在每一情况下，这结果都等于边数和的两倍．一般地，一个任意图的顶点的次数和等于边的端点数的和．每条边对这和数的贡献为 2，即每个端点贡献为 1；因此，和是边数的两倍．这证明了下述的一般规律：

8. 一个任意图各顶点的次数和等于边数和的两倍．

因此对于每个图，次数和是偶数．这样，问题 **4** 有了一个直接的解答：由于 5 个顶点的次数各是 1, 2, 2, 3 与 3，它们的和是奇数，所以这样的图不存在．

适合问题 **5** 的图是容易构造出来的．使图的顶点表示到会的成员，一条边表示对应于其端点的两个人互相握过手．这样，与某个人握过手的人数就是关联于其对应顶点的边数．现在只须证明图包含偶数个奇次的顶点．一个图的顶点的次数和已经证明是偶数．让我们把这个数看成是两部分的和：其中之一是偶次数的和，另一是奇次数的和．前者显然是偶数；后者也必为偶数，因为它们的和是偶数．但要使几个奇数的和是偶数，只有当奇数的个数是偶数时才行．到此为止，似乎已证明了一般的命题：

9. 每个图含有偶数个奇次顶点.

但是，问题 5′的解果真是对每个图证明了这一命题了吗？如果我们考虑的图都像是问题 5 所指的那样，那确是证完了. 在这里，这个问题的图，由于每一对顶点只联结着至多一条边，它不含重边. 无论如何，有可能是两个人互相多次地握手：在见面时，说再见时，表示祝贺或者有别的什么原因时. 如果要求我们的图表示出每一次握手，那么要求一条边不允许代表多于一次的握手. 因此，在证明我们的问题时，可以考虑多重边. 我们还未提到环，这或许可以想象为有人自己与自己握手，他的左手握右手和他的右手握左手. 一个环就表示这种情形. 所以求证的命题应作必要的改变：我们必须证明伸过奇数次手的人数是一个偶数. 每个环对与之关联的顶点的次数贡献为 2. 这表示自己与自己握手时伸了两次手. 确实是的，他伸了一次左手，又伸了一次右手. 只有这修改了的问题的解才能确实证明每个图含有偶数个奇次顶点. 这表明要把结果加以推广，谨慎是必需的.

作为命题 9 的一个应用，下列有趣的命题是容易得证的：每个碳氢化合物的分子所含的氢原子是偶数个. 事实上，每个碳氢化合物的分子含有氢与碳原子，其原子价分别为 1 价与 4 价. 设每个原子对应于图的一个顶点，如果两个原子是联结着的，那么对应的顶点就邻接. 这个图的顶点中，对应于碳与氢原子的顶点分别有次数 4 与 1. 所以，氢原子的个数是偶数.

问题 6 说的是：如果一个图至少含有两个顶点，且无环、无多重边，就含有两个次数相同的顶点. 无环、无多重边的图叫做**简单图**. 我们来证下列命题：

10. 一个至少含两个顶点的简单图中有两个同次数的顶点.

值得注意的是：不含同次数的两顶点的图是有的，但它们不是简单图. 图 7 中的图有这一性质，即便是把它看成单一的图也如

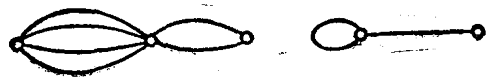

图 7

此.

为了证明命题 10，设图 G 是简单的. 把它的顶点数记为 $n(n \geq 2)$. 因为一个顶点至多只能与另外 $n-1$ 个顶点邻接，所以每个顶点的次数小于或等于 $n-1$. 于是，对于图 G，只有下列的次数是可能的：

$$0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

又这 n 个数不能都作为图 G 的顶点的次数. 因为，一个次数为 0 的顶点是孤立顶点，而次数为 $n-1$ 的顶点邻接于其它的每一个顶点；但是，孤立顶点不能与其它任一顶点邻接. 因此，对于图 G，只有下列的次数才是可能的：

$$0, 1, 2, \cdots, n-2$$

或 $$1, 2, 3, \cdots, n-1.$$

不论在哪种情况下，至多有 $n-1$ 种不同的次数. 在第一种情况，可以设想标有数 $0, 1, 2, \cdots, n-2$ 的 $n-1$ 个箱子，把图 G 的顶点投入箱子，使每个顶点的次数与箱子的号数相同. 由于图 G 的顶点个数是 n，而箱的号数只有 $n-1$ 个. 总能找到一个箱子至少装有两个顶点. 这些顶点当然有相同的次数. 同样的推理，适合于第二种情况.

问题 6 的解中，应用了所谓**鸽笼原理**：如果把多于 n 个的对象分划成 n 类（鸽笼），则至少有一类，其中含有不止一个的对象.

问题 7 也可以按照下列方式来叙述：在一个具有 n 个顶点的简单图中，如果每一对点都是邻接的，那么，共有多少条边？这种图叫做具有 n 个顶点的**完全图**. 具有 3 个顶点的完全图也叫**三角形**（包括它的边不是直线段的情形）. 图 8 所示为 $n=1, 2, 3, 4, 5,$

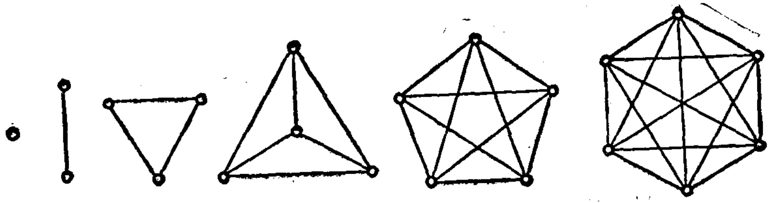

图 8

6 时，具有 n 个顶点的完全图. 具有 n 个顶点的完全图的每个顶点的次数是 $n-1$, 次数和是 $n(n-1)$. 按照命题 8, 一个任意图的边数是次数和的一半. 于是, 问题 7 得以解决.

11. 具有 n 个顶点的完全图共有 $n(n-1)/2$ 条边.

练　　习

12. 画出全部具有 5 个顶点, 3 或 7 条边的简单图.

13. 求出具有 5 个顶点，各顶点的次数都不小于 3 的简单图的个数.

全凭试验来解练习 12 会化费很长的时间；甚至还会罗列不全. 为了引出某些概念, 我们先考虑只有 3 条边的图; 任何一个这种图的次数和是 6. 我们先肯定, 没有次数大于 3 的顶点，并且只有一个图含有一个次数是 3 的顶点. 这个图的次数是 3, 1, 1, 1, 0. 若一个图不含次数大于 2 的顶点, 则只有如下的次数列是可能的: 2, 2, 2, 0, 0；或 2, 2, 1, 1, 0；或 2, 1, 1, 1, 1. 容易看出，每种情况唯一地决定着一个图. 于是, 存在四个本质上不同的, 具有 5 个顶点与 3 条边的简单图；图 9 的第一行表示的就是这四个图. 这图的第二行表示具有 5 个顶点与 7 条边的简单图.

怎样才能简易地找出这些图呢？让我们考虑在同一列中的两