国家自然科学基金项目　博士点基金项目

模型论导引

沈复兴　著

北京师范大学出版社

国家自然科学基金项目　博士点基金项目

模型论导引

沈复兴　著

北京师范大学出版社

责任编辑　潘淑琴

图书在版编目（CIP）数据

模型论导引/沈复兴著．－北京：北京师范大学出版社，1995.6
ISBN 7-303-03941-4

Ⅰ．模…　Ⅱ．沈…　Ⅲ．模型论　Ⅳ．O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 08671 号

北京师范大学出版社出版发行
（100875　北京新街口外大街 19 号）
北京怀柔桥中印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：850×1168　1/32　印张：9.25　字数：225 千
1995 年 10 月北京第 1 版　1995 年 10 月北京第 1 次印刷
印数：1—1000 册
定价：9.50 元

序

模型论是数理逻辑的主要分支学科之一，是研究形式语言及其解释（模型）之间的关系的理论。模型论与数理逻辑的其他主要分支学科如证明论、递归论、公理集合论等都有密切联系和相互渗透，并且在经典数学中有着独特的应用。(它为数学论证提供了超出一般常规的新方法，可以用来证明不少难以用常规方法证明的定理，并因而形成了模型论代数、非标准分析等新方向。) 此外，模型论在计算机科学中也正在日益受到重视。

模型论是一个新兴的学科。它从本世纪 50 年代起才开始得到系统的发展，并开始在经典数学中陆续得到种种应用。现在，模型论已发展成为一个根深叶茂的重要学科。在我国，在这方面的研究以及在高等学校中开设模型论课程则是最近十多年才开始的。

沈复兴同志曾在北京大学哲学系及北京师范大学数学系多次为研究生讲授模型论课程。本书是他在自己讲稿的基础上，经过系统的整理及补充而写成的。其内容丰富，取舍恰当。在讲法上，既综合了前人著作中不少优点，又根据我国实际及自己的经验作了具体处理，讲解细致，并配有很多例题及习题。它是一本很好的研究生教材，并且可供数学、逻辑及计算机科学工作者参考。

我国的社会主义建设事业正在发展。在我国科学技术现代化建设的过程中，数理逻辑基础理论及计算机科学技术有着广阔的发展及应用前景，而这些方面专门人材的培养则是关键的一环。我相信，本书的出版将在这方面起到它所应有的促进作用。

王世强

1994 年 12 月 6 日于北京师范大学

前 言

本书是模型论的一本入门书，可以作为数理逻辑、哲学、数学、计算机科学等方面本科生、研究生的教材或参考书。本书第一章和第二章是为初学者容易阅读而加入的引子，最后一章是介绍非古典逻辑模型论的一点补充。本书主要内容是介绍可数语言一阶逻辑模型论的基础知识。模型论研究形式语言及其解释（模型）之间的关系，是形式语言的语法和语义的关系的理论。模型论的主要方法是构造模型，除了紧致性定理、L—S—T 定理、初等链定理、省略型定理等构造模型的重要定理之外，本书着重介绍构造模型的常量方法、图象方法、超积方法、Lindenbaum 方法、Skolem 函数方法、不可辨元集方法、力迫方法，以及无穷长语言中的和谐性质方法。本书第三、四、五、六、七、十、十一章是一阶模型论的基本理论，第八、九、十二章是构造模型的几个方法。

为了适应更多的读者的需要，本书尽量少涉及专门的数学内容，举例也力求简明，本书也不涉及无穷基数的运算，而把语言、理论和模型尽量限制在可数的范围之内，因此读者只要具备命题演算、谓词演算和朴素集合论的一些初步知识就可以顺利阅读本书。

本书是受北京大学王宪钧教授之命，受晏成书教授鼓励，在王世强教授指导下写成的。许多教师、研究生阅读过本书，刘壮虎、王捍贫、周北海、邢滔滔、张玉平、田启家等同志提出过不少修改意见，北大宋文坚同志为本书的出版费了许多心血，刘书斌、宋絜、程艺华同志帮助抄写书稿，作者在此表示衷心的感谢。

本书原为王宪钧先生主编的数理逻辑丛书之一。书未出齐，王

宪钧先生和晏成书先生不幸仙逝，本人也以中年之身，突发脑干梗塞，几乎不起，丛书的出版遇到了困难。所幸北京师范大学出版社大力支持中青年教师出版专著和教材，将本书列为特急出版，本人也经天坛医院医治好转，得以在医院作校对，使本书尽快与读者见面，告慰王宪钧先生和晏成书先生的英灵。作者对北京师范大学出版社，对出版社编辑同志的工作，对天坛医院的医护人员，表示深切的敬意和衷心的感谢。由于本人水平的限制，书中存在不少缺点和错误，请读者批评指正。

作者

目　录

第一章　命题逻辑模型论

§1.1　命题逻辑形式系统

命题逻辑的一个**形式系统**是由命题变元符号，逻辑符号，由这些符号形成公式（也叫良构式，合式公式等）的规则，由若干公式组成的公理，由公理经一定的推演法则得到的定理所组成。以L记我们所选用的命题逻辑形式系统，L的符号有下列三种：

（1）**命题变元符号**：P_1，P_2，P_3，……；

（2）**逻辑连接符号**：$\neg$，$\rightarrow$；

（3）**技术符号**（括号）：)，(。

L的命题变元符号有可数多个，每个命题变元符号代表任意一个可以回答是或非的命题。L的符号组成符号串，满足如下条件的有限符号串称为L的**公式**：

（1）单个命题变元是公式；

（2）如果α，β是公式，则$(\neg\alpha)$，$(\alpha\rightarrow\beta)$也是公式。

公式的这种定义是归纳定义或递归定义，比如，P_1，P_2是公式，因此$(\neg P_1)$，$(P_1\rightarrow P_2)$是公式，进而$((\neg P_1)\rightarrow(P_1\rightarrow P_2))$，$(P_2\rightarrow(((\neg P_1)\rightarrow(P_1\rightarrow P_2))\rightarrow P_1))$等等也是公式。注意$\alpha$，$\beta$不是形式系统$L$中的符号，我们只是用$\alpha$，$\beta$，$\gamma$等来表示$L$中的任意公式。如果称$L$中的符号为$L$的语言，则$L$中形成公式的规则等叫语法。我们用来说明$L$所用的语言叫元语言，比如上述$\alpha$，$\beta$，$\gamma$等是元语言的符号，对熟悉数理逻辑的读者，这些是不会混淆的，而对初学者，则要多加留心。

我们已经规定任何一个公式中所含有的符号最多只能有限多个，我们称公式最多只能有限长。公式中所含的联接符号也叫联

结词，最多也只能有限多个。一个公式中所含的联结词越多，公式就越复杂。我们常把公式中联结词的个数称为公式的复杂程度，简称复杂度或复杂性。

命题演算中常用的联结词$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$，在L中不出现。这是因为$\{\neg, \rightarrow\}$已经构成联结词的完全集，我们可以用$\neg$，$\rightarrow$来定义$\wedge$，$\vee$和$\leftrightarrow$，设α，β是L的公式，则$(\alpha\wedge\beta)$定义为$(\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta))$的简写，$(\alpha\vee\beta)$定义为$((\neg\alpha)\rightarrow\beta)$的简写，$(\alpha\leftrightarrow\beta)$定义为$((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$的简写。

为了使公式的写法稍微简单又不致引起歧义，我们有时省略公式最外层的括号，并约定$\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma$是公式$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))$的简写，$\neg\alpha\rightarrow\beta$是$((\neg\alpha)\rightarrow\beta)$的简写。同时出现所有联结词的命题公式中，我们约定优先顺序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。依这个顺序联结的括号都可以省略，不依这个顺序联结的括号就不能省略。例如：$((\alpha\wedge(\neg\beta))\vee((\neg\alpha)\wedge\beta))$可以简写为$\alpha\wedge\neg\beta\vee\neg\alpha\wedge\beta$.

我们约定形式系统L中只有可数多个命题变元符号P_1，P_2，…，P_n，…，$n<\omega$. 因此，L中至多有可数多个有限长的符号串，这样L中至多只有可数多个公式。由于每个P_i都是L的公式，L的公式至少有可数多个，因此，L中有而且只有可数多个公式。

L中有三种**公理**：

$Ax1$ $\vdash \alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$

$Ax2$ $\vdash(\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma$

$Ax3$ $\vdash(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$

当α，β，γ取任何一个公式时$Ax1$，2，3都是公理。因此L的每种公理都代表无限多条公理，我们称之为L的一个**公理模式**。这样L有三种公理模式。易见L的每个公理都是L的公式，而L的一个公式不一定是一个公理。例如公式$P_1\rightarrow P_2\rightarrow P_1$是公理，但公式$P_1$则不是公理。

L的**推演规则**只有一条称为**分离法则**，记作MP：从公式α，

$\alpha \to \beta$得到 β.

L 的一个**证明**或者**推演**是指有限多个公式组成的一个序列 α_1，α_2，…，α_n. 对每个 $k \leqslant n$，α_k 或是一条公理，或者是由 α_i，α_j，i，$j<k$,经分离法则 MP 得到。

L 的一个公式 α 称为 L 的一个**定理**，如果存在 L 的一个证明 α_1，α_2，…，α_n，使 $\alpha_n=\alpha$，即 α_n 就是公式 α，就称 α 是 L 的一个定理，记作$\vdash \alpha$. 易见 L 的每一条公理都是 L 的定理。

例 1 设 α 是 L 的一个公式，则 $\alpha \to \alpha$ 是 L 的一个定理，即 $\vdash \alpha \to \alpha$. 我们给出证明。

证明 (1) $\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$ $Ax1$

(2) $\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$ $Ax2$

(3) $\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$ (1)，(2) MP

(4) $\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$ $Ax1$

(5) $\vdash \alpha \to \alpha$ (3)，(4) MP ▌

设 α_1，…，α_n 是 L 的一个证明或推演，则对任意 $k \leqslant n$，α_1，…，α_k 也是 L 的一个证明或推演，这样对每个 $k \leqslant n$，α_k 都是 L 的一个定理，因此可以写成$\vdash \alpha_1$，$\vdash \alpha_2$，…，$\vdash \alpha_n$.

例 2 设 α，β 是 L 的任何二个公式，则 $\vdash \neg \alpha \to \alpha \to \beta$

证明 (1) $\vdash \neg \alpha \to \neg \beta \to \neg \alpha$ $Ax1$

(2) $\vdash (\neg \beta \to \neg \alpha) \to \alpha \to \beta$ $Ax2$

(3) $\vdash ((\neg \beta \to \neg \alpha) \to \alpha \to \beta) \to \neg \alpha \to (\neg \beta \to \neg \alpha) \to \alpha \to \beta$ $Ax1$

(4) $\vdash (\neg \alpha \to (\neg \beta \to \neg \alpha) \to \alpha \to \beta$ (2)，(3) MP

(5) $\vdash (\neg \alpha \to (\neg \beta \to \neg \alpha) \to \alpha \to \beta) \to (\neg \alpha \to \neg \beta \to \neg \alpha) \to \neg \alpha \to \alpha \to \beta$ $Ax2$

(6) $\vdash (\neg \alpha \to \neg \beta \to \neg \alpha) \to (\neg \alpha \to \alpha \to \beta)$ (4)，(5) MP

(7) $\vdash \neg \alpha \to \alpha \to \beta$ (1)，(6) MP ▌

设 α_1，α_2，…，α_n 是 L 的有限多个公式的一个序列，如果对每个 $k \leqslant n$，α_k 或是公理，或是定理，或是由 α_i，α_j，i、$j<k$，经

分离法则得到，则 α_n 一定是 L 的一个定理。实际上，只要把是定理的 α_k 的证明补充进这个序列就可以得到适合定义的一个完全的证明。由于公理中的 α，β，γ 可以是 L 中任意公式，我们已经证明的定理中的 α，β，γ 等也可以是 L 中任意公式。

例 3 设 α 是 L 的任何一个公式，则 $\vdash \neg\neg\alpha\to\alpha$

证明 (1) $\vdash \neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha$ 例 2

(2) $\vdash (\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax3$

(3) $\vdash ((\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax1$

(4) $\vdash \neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (2),(3) MP

(5) $\vdash (\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax2$

(6) $\vdash (\neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (4),(5) MP

(7) $\vdash \neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (1)，(6) MP

(8) $\vdash (\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax2$

(9) $\vdash (\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (7)，(8) MP

(10) $\vdash \neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha$ 例 1

(11) $\vdash \neg\neg\alpha\to\alpha$ (10)，(9) MP ▌

设 Γ 是 L 的一个公式集，α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$ 是 L 的有限多个公式的序列，称这个序列是**从 Γ 出发的一个证明**，如果对每个 α_k，$k\leqslant n$，α_k 或是 L 的一个公理，或是 Γ 中的一个公式，或是从 α_i，α_j，i、$j<k$，由 MP 得到，如果 α_1，$\cdots$，α_n 是从 Γ 出发的一个证明，就称 α_n 是 **Γ 的一个推论**，记作 $\Gamma\vdash\alpha_n$.

如果 Γ 是有限公式集 $\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$，$\Gamma\vdash\alpha$ 也可写成 $\beta_1,\cdots,\beta_k\vdash\alpha$. 公式集 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$，也常简写为 $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ 等等。

例 4 α，$\beta\to\alpha\to\gamma\vdash\beta\to\gamma$

证明 (1) $\alpha\to\beta\to\alpha$ $Ax1$

(2) α Γ

(3) $\beta\to\alpha$ (1),(2) MP

(4) $(\beta\to\alpha\to\gamma)\to(\beta\to\alpha)\to\beta\to\gamma$ $Ax2$

(5) $\beta\to\alpha\to\gamma$ Γ

(6) $(\beta\to\alpha)\to\beta\to\gamma$ (4),(5) MP

(7) $\beta\to\gamma$ (3),(6) MP ▌

注意，在例 4 的证明中，公式 (1) 到 (7) 的前面，我们都没有加上符号“$\vdash$”，这是因为这个公式序列中的公式并不都是 L 的定理。例如公式 (3) 和公式 (5) 是 Γ 中的公式，而 Γ 中的公式不一定是 L 的定理。这样 Γ 的推论也不一定是 L 的定理。这是由 Γ 出发的证明与由公理出发的证明的区别。当然，Γ 是空集时，Γ 的推论也就成了 L 的定理了。

命题 1.1.1 设 Γ 是 L 的一个公式集，α,β 是 L 的两个公式。

(1) 如果 $\alpha\in\Gamma$，则 $\Gamma\vdash\alpha$；

(2) 如果 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$，则 $\Gamma\vdash\beta$。

证明 (1) 由从 Γ 出发的证明的定义，α 自身就是一个证明，所以有 $\Gamma\vdash\alpha$。

(2) 由定义及 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ 知存在从 Γ 出发的两个证明：

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m=\alpha$

$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n=\alpha\to\beta$

把这两个序列合到一起，再对 α，$\alpha\to\beta$ 用分离法则得到 β，易见序列

$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n,\ \beta$

是从 Γ 出发的一个证明。因此有 $\Gamma\vdash\beta$. ▌

这里“命题 1.1.1”是形式系统 L 之外的一个定理，它说明 L 的性质，而不是 L 内部的形式定理，我们称之为元命题、元定理。一般说来它们不会和 L 内的命题、定理等概念混淆，但读者必须

注意它们之间的区别。

从公理出发到 L 的一个定理的证明有时不容易构造。例 2、例 3 就已经相当“冗长”。下面的“演绎定理”可以使这种得到 L 的一个定理的过程大大简化。

定理 1.1.2 （**演绎定理**）设 Γ 是 L 的一个公式集，α，β 是 L 的公式，若 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$，则 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$。

证明 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n = \beta$ 是从 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 出发到 β 的一个证明，则对任何 $k \leqslant n$，α_k 或是某一公理，或是 Γ 中一个公式，或是公式 α，或是由 α_i，α_j，i、$j < k$，经 MP 得到。现在对 $k = 1, \cdots, n$ 归纳证明可以构造从 Γ 出发到 $\alpha \to \alpha_k$ 的证明。

当 $k=1$ 时，证 $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha_1$

1.1 若 α_1 是某一公理，可以如下填补：

(1) α_1 Ax

(2) $\alpha_1 \to \alpha \to \alpha_1$ $Ax1$

(3) $\alpha \to \alpha_1$ (1)，(2) MP

1.2 若 α_1 是 Γ 中某一公式，仿 1. 1 填补，只要把 (1) 的理由 Ax 换成 Γ。

1.3 若 α_1 是公式 α，依例 1 的证明填补可得。

归纳假设对 $\alpha \to \alpha_1$，$\alpha \to \alpha_2$，$\cdots$，$\alpha \to \alpha_{k-1}$ 都已进行适当填补使之成为从 Γ 推出的证明。

现在证明可以对 $\alpha \to \alpha_k$ 填补，使 $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha_k$

2.1 设 α_k 是某一公理，仿 1. 1 填补。

2.2 设 $\alpha_k \in \Gamma$，仿 1. 2 填补。

2.3 设 α_k 是公式 α，仿 1. 3 填补。

2.4 设 α_k 是由 α_i，α_j，i、$j < k$，经分离法则 MP 得到，这时或 $\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k$，或 $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$。不妨设 $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$，由归纳假设

…

(1′) $\alpha \to \alpha_i$

…

(2′) $\alpha \to (\alpha_i \to \alpha_k)$

均已填补，这里 $\alpha \to (\alpha_i \to \alpha_k)$ 即 $\alpha \to \alpha_j$，我们继续填补

(3′) $(\alpha \to (\alpha_i \to \alpha_k)) \to (\alpha \to \alpha_i) \to \alpha \to \alpha_k$　$Ax2$

(4′) $(\alpha \to \alpha_i) \to \alpha \to \alpha_k$　(2′)，(3′)　MP

(5′) $\alpha \to \alpha_k$　(1′)，(4′) MP

这样就完成了归纳证明。当 $k=n$ 时，就构成了从 Γ 出发到 $\alpha \to \beta$的一个证明，因此 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. ▌

当 $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 L 的有限公式集时，反复应用演绎定理就得到如下推论：

推论 1.1.3　设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha$，则$\vdash \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$.

例 4 中我们已经证明 $\alpha, \beta \to \alpha \to \gamma \vdash \beta \to \gamma$，由演绎定理的推论就得到$\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \to \gamma) \to \beta \to \gamma$。

例 5　$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

证明　由演绎定理，我们只要证明

$\alpha \to \beta$，$\beta \to \gamma$，$\alpha \vdash \gamma$

容易构造如下的证明：

(1) $\alpha \to \beta$　Γ

(2) α　Γ

(3) β　(1)，(2) MP

(4) $\beta \to \gamma$　Γ

(5) γ　(3)，(4) MP

这样我们有 $\alpha \to \beta$，$\beta \to \gamma$，$\alpha \vdash \gamma$，由推论 1.1.2 知有

$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$. ▌

例 5 使我们看到演绎定理大大简化了形式系统 L 中定理的证明过程。请读者试给出例 5 的从公理出发的直接证明，并加以比较。由例 5 我们还可以得到**“假言三段论式”**，这个证明形式常被记作 ***HS***。也可以作为简化形式定理证明的一种补充规则。

定理 1.1.4 （**假言三段论式 *HS***）设 α，β，γ 是 L 的任意公式，若$\vdash \alpha\to\beta$，$\vdash \beta\to\gamma$，则$\vdash \alpha\to\gamma$。

证明 由例 5 已证.

(1) $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$ 例 5

(2) $\vdash \alpha\to\beta$ 题设

(3) $\vdash(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$ (1)，(2) MP

(4) $\vdash \beta\to\gamma$ 题设

(5) $\vdash \alpha\to\gamma$ (3)，(4) MP ▌

应用"假言三段论式" HS，也可以使例 3 的证明过程大大简化，例 3 证明中的（7）可以由（1）、（2）经 HS 得到。下面再给出一例说明演绎定理和 HS 的作用。

例 6 证明 $\vdash(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$.

证明 由演绎定理，我们只要证明$\neg\alpha\to\alpha\vdash\alpha$

(1) $\neg\alpha\to\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ 例 2

(2) $(\neg\alpha\to\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ $Ax2$

(3) $(\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ (1)，(2) MP

(4) $(\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$ $Ax3$

(5) $(\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$ (3)，(4) HS

(6) $\neg\alpha\to\alpha$ Γ

(7) α (6)，(5) 二次 MP ▌

无论是演绎定理，还是假言三段论式，即定理 1.1.2 和 1.1.4 中，细心的读者都会发现这两个定理的证明中都只用到 $Ax1$ 和 $Ax2$，和推理规则 MP. 因此，在命题演算的任何一个形式系统中，只要有 $Ax1$，$Ax2$ 和 MP 成立，而没有其他推演规则，就一定有演绎定理和 HS^-。

读者不难看出演绎定理的逆定理是显然成立的。即若 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$，则 Γ，$\alpha\vdash\beta$. 因此，Γ，$\alpha\vdash\beta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$. 又不难

看出假言三段论式也可以写成$\alpha\to\beta,\beta\to\gamma\vdash\alpha\to\gamma$. 这样 HS 在从 Γ 出发的证明过程中也可以使用。

练习

1.1.1 证明下列各式：

$\vdash(\alpha\to\beta)\to\neg\beta\to\neg\alpha$,

$\vdash(\neg\alpha\to\beta)\to\neg\beta\to\alpha$,

$\vdash\alpha\to\neg\alpha\to\beta$,

$\vdash\alpha\wedge\beta\to\alpha$, $\vdash\alpha\wedge\beta\to\beta$,

$\vdash\alpha\to\alpha\vee\beta$, $\vdash\beta\to\alpha\vee\beta$, $\vdash\alpha\vee\alpha\to\alpha$,

$\vdash\alpha\to\beta\to\alpha\wedge\beta$.

1.1.2 证明：

$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg(\beta\to\gamma)\to\neg\alpha)\to\alpha\to\gamma$

$\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to\beta\to\alpha\to\gamma$

1.1.3 证明：

$\vdash((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha$

$\vdash\neg(\alpha\to\beta)\to\beta\to\alpha$

1.1.4 将命题演算形式系统 L 中的第三条公理模式换为 $Ax3'$ $\vdash(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\neg\alpha\to\beta)\to\alpha$，得到形式系统 L'，记 L 中的定理为$\vdash_L\alpha$，L'中的定理为$\vdash_{L'}\alpha$，证明对任何公式 α，$\vdash_L\alpha$ 当且仅当$\vdash_{L'}\alpha$，即 L 与 L'有完全相同的定理集.

1.1.5 设 $\Gamma,\alpha\vdash\beta$, $\Gamma\vdash\alpha$, 证明 $\Gamma\vdash\beta$; 设 $\Gamma\cup\Sigma\vdash\beta$, 对任意公式 $\alpha\in\Sigma$，都有 $\Gamma\vdash\alpha$，证明 $\Gamma\vdash\beta$.

1.1.6 证明 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\beta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\alpha\wedge\beta$.