高等学校教材

线性代数与几何

主编　李忠定　刘响林　王永亮

编者　李忠定　刘响林　王永亮

刘宝友　胡　荣

中国铁道出版社

2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本系列教材为大学理工科专业公共课教材，共 5 册：高等数学(上、下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计、计算方法。编者根据大学高等数学教改精神、多年教改课题研究和试验而编写，书中融入了许多新的教学思想和方法。本书为线性代数与几何，内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性变换、线性方程组、相似矩阵与二次型、空间解析几何等七章。

本书也适合作为大专、函授、夜大、自考教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/李忠定，刘响林，王永亮主编. —北京：中国铁道出版社，2002.8

ISBN 7-113-04782-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①李…②刘…③王… Ⅲ.①线性代数—高等学校教材 ②几何—高等学校—教材 Ⅳ.0151.2②018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060964 号

书　　名：高等学校教材 **线性代数与几何**
作　　者：李忠定　刘响林　王永亮　刘宝友　胡　荣
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：李小军
编辑部电话：市电 (010)63583214　路电 (021)73133
封面设计：马　利
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：12.25　字数：226 千
版　　本：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：0001～4500 册
书　　号：ISBN 7-113-04782-3/O·96
定　　价：15.00 元

前　　言

本书是铁道部部级课题、河北省"九五"教育学科规划重点课题"面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践"的研究成果,通过几年的教学实践,广泛征求意见,反复修改而成的高等数学系列教材的线性代数与几何部分.

本书内容的深度和广度与现行的"线性代数课程教学基本要求"大体一致.编写中力求做到:渗透现代数学思想,其目的在于继承一些优秀的教学传统及体系,围绕现代工科教学所需代数知识,理顺一些数学内容、次序及应用,便于教学和学生学习,以提高学生对代数学习的兴趣,提高学生对空间概念及基底的认识,为将来研究生课程"数学物理方程"及"高等数学"(函数展成幂级数及傅立叶级数)打好理论基础.

本书将《高等数学》中"向量代数与空间解析几何"内容编入其中,以便将几何空间中向量的运算(线性运算及数量积运算)推广到一般 n 维向量中,使学习及讲解更加直观;将空间曲面、曲线及一些特殊的二次曲面的几何图形的研究安排在最后一章(空间解析几何)中写出,主要的目的是如何利用二次型通过正交变换化为标准形来讨论更为一般的二次曲面、曲线等的几何形状,以加强对二次型标准化重要性的认识和理解.

本教材的难易程度适中,包含了考研的全部知识点,既可作为工科院校本科教材,也可作为教学参考书.

书中打"*"号的章节作为选讲内容.

本书由李忠定、刘响林、王永亮主编.参加本书编写的有:胡荣(第一章)、刘响林(第二章)、李忠定(第三、四章)、刘保友(第五、六章)、王永亮(第七章).

在本教材的编写过程中,得到了顾祝全及牟卫华两位教授的热情帮助,在此表示衷心的谢意.

由于编者的能力、水平有限,书中难免存在缺点、错误,恳请读者批评指正.

编　者

2002年5月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式概念的建立源于求解线性方程组的实际需要,它作为一个重要的数学工具,在数学的各个领域和其它众多科学技术领域(如物理学、力学、工程技术等)都有着广泛的应用.

本章主要讨论以下三个问题:

1. 行列式的概念;
2. 行列式的性质和计算方法;
3. 解线性方程组的克莱姆(Gramer)法则.

第一节　行列式的概念

1.1　二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

引例　用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (1.2) \end{cases}.$$

解　先消去 y. 不妨设 $a_{12}\neq 0$,用 $-\dfrac{a_{22}}{a_{12}}$ 乘方程(1.1)再加到方程(1.2)上去,得

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x = a_{12}b_2 - a_{22}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理,消去 x 可得

$$y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆,引入如下记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组的解可以简单地表示成

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}.$$

称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行列式,其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$称为行列式的**元素**,这四个元素排成二行二列,横排称行,竖排称列.元素 a_{ij}的右下角有两个下标 i 和 j,第一个下标 i 称行标,它表示元素所在的行,第二个下标 j 称列标,它表示元素所在的列,如 a_{12}是位于第一行第二列上的元素,而 a_{21}是位于第二行第一列上的元素.从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的**主对角线**,从行列式的右上角到左下角的连线称为行列式的**次对角线**.

二阶行列式是两项的代数和,一项是主对角线上两元素的乘积,取正号;另一项是次对角线上两元素的乘积,取负号.称算式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式的展开式.若 $a_{ij}(i,j=1,2)$是数,则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 的运算结果称为行列式的值.二阶行列式的上述计算方法称为**对角线法则**.

分析解线性方程组所引出的行列式,可以发现,行列式 D 的元素正是方程组中未知量的系数,故称此行列式为方程组的系数行列式.而行列式 D_1 和 D_2 是由常数项 b_1, b_2 排成的列分别取代 D 中第一列和第二列得到的.

可以看出,引入行列式记号使得二元线性方程组的求解变得简单、好记.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}.$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3-(-1)\times1 = 7.$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\times3-(-1)\times2 = -1.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2-(-1)\times1 = 5.$$

所以 $x = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{1}{7}, \quad y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{5}{7}.$

2. 三阶行列式

与二元线性方程组完全类似，利用消元法可得三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

（x_2, x_3 的表达式略）.

显然，要记住这类表达式是很困难的. 为便于方程组的求解和记忆，引入新的记号

$$x_1 = \frac{D_1}{D}.$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这里由 9 个数排成的三行三列的正方形数表代表 6 项的代数和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \\ D_1 &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

我们称这种具有特定含义的三行三列的正方形数表为三阶行列式. 下图给出计算三阶行列式的对角线法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

图中有三条实线和三条虚线，每条实线所连三个元素的乘积取正号；每条虚线所连三个元素的乘积取负号，行列式就等于这六个乘积的代数和.

注意：计算行列式的对角线法则只适用于二阶、三 阶行列式，并不能推广到更高阶的行列式.

例 1.2 用对角线法则计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times0\times4+(-1)\times3\times(-2)+1\times1\times1$$
$$-2\times1\times3-(-1)\times1\times4-1\times0\times(-2)=5.$$

1.2 n 阶行列式

从二、三阶行列式定义可以看出,二阶行列式是 2^2 个元素排成的二行、二列的表,它表示两项的代数和;三阶行列式是 3^2 个元素排成的三行、三列的表,它表示六项的代数和.可以想像,n 阶行列式应由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的表构成,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式表示多少项的代数和?每项的正负号如何确定?当 $n>3$ 时对角线法则并不适用,故为求得上述问题的解决,需对二阶、三阶行列式做进一步研究,以便找出行列式所共有的特性,为此,下面先介绍全排列和逆序数概念.

1. 全排列及其逆序数

在初等数学中,我们已经学过排列的知识.

n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的**全排列**(简称**排列**).n 个不同元素的所有排列种数用 P_n 表示.

例如 $P_2=2!$, $P_3=3!$, $\cdots$, $P_n=n!$.

对于 n 个不同的元素,我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),按标准次序排成的排列称为**标准排列**,在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个**逆序**,一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.显然,标准排列的逆序数为 0.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面介绍求逆序数的方法.

考虑由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列.规定由小到大为标准次序(即排

列 12⋯n 为标准排列）. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

是由 1,2,⋯,n 构成的一个排列，逐个考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 小且排在 p_i 后面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. n 个元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.3 求排列 236154 的逆序数.

解 比 2 小且排在 2 后面的数只有一个（数 1），故 2 的逆序数为 1；
比 3 小且排在 3 后面的数只有一个（数 1），故 3 的逆序数为 1；
比 6 小且排在 6 后面的数有三个（数 1,5,4），故 6 的逆序数为 3；
比 1 小且排在 1 后面的数不存在，故 1 的逆序数为 0；
比 5 小且排在 5 后面的数只有一个（数 4），故 5 的逆序数为 1；
4 在末位，逆序数为 0.

所以，排列的逆序数为

$$t = 1+1+3+0+1+0=6,$$

此排列为偶排列.

2. 对换

对于给定的一个排列，将其中任意两个元素对调，其余元素不动，得一新的排列，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将相邻两个元素对换，称**相邻对换**. 如

$$456231 \xrightarrow[\text{5 与 6 对换}]{\text{一次相邻对换}} 465231,$$

$$456231 \xrightarrow[\text{5 与 3 对换}]{\text{一次对换}} 436251.$$

容易算出

$$t(456231)=11,\ t(465231)=12,\ t(436251)=10.$$

结果表明，经一次对换（无论是相邻对换还是不相邻对换），排列改变了奇偶性. 此结论具有一般性.

定理 1.1 排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设对换排列 $p_1\cdots p_lpqq_1\cdots q_m$ 中的 p 与 q，得到 $p_1\cdots p_lqpq_1\cdots q_m$. 显然，元素 $p_1,\cdots,p_l$ 与 $q_1,\cdots,q_m$ 的逆序数经过对换并不改变，而 p、q 两个元素的逆序数改变为：当 $p<q$ 时，经对换后 p 的逆序数没有改变而 q 的逆序数增加 1；当 $p>q$ 时，经对换后 p 的逆序数减少 1 而 q 的逆序数没有改变. 总之，对换前后

两个排列的逆序数相差 1,所以两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设对换排列 $p_1\cdots p_l p q_1\cdots q_m q r_1\cdots r_k$ 中的 p 与 q,得到

$$p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k.$$

这个对换过程可看作先将元素 p 依次与 $q_1,q_2,\cdots,q_m,q$ 作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $p_1\cdots p_l q_1\cdots q_m q p r_1\cdots r_k$,再用元素 q 依次与 $q_m,\cdots,q_1$ 作 m 次相邻对换,调成 $p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$.总之,排列 $p_1\cdots p_l p q_1\cdots q_m q r_1\cdots r_k$ 经 $2m+1$ 次相邻对换调成排列 $p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$,所以两个排列的奇偶性不同.

注意到标准排列是偶排列(逆序数为 0),不难得到如下推论.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

3. 三阶行列式的结构

三阶行列式的定义式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

容易看出其结构特点:

(1)三阶行列式由 3^2 个元素构成,定义式右端的每一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,这里行标排成标准排列 123,而列标排列成 $p_1p_2p_3$,是自然数 1,2,3 的某个排列.这样的排列共有 6 种($P_3=3!=6$),正好对应定义式右端的项数.这说明,三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和,共有 3! 项.

(2)6 项中带正号、负号的各 3 项:

带正号的 3 项列标排列是 123,213,312,均为偶排列;

带负号的 3 项列标排列是 132,213,321,均为奇排列.

因此各项所带正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 是列标排列的逆序数.

由以上分析,三阶行列式可以定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列$p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

4. n 阶行列式的定义

定义 1.1 n 阶行列式由 n^2 个元素构成,其定义式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 的排列，t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

由定义知，n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，每项前面所带符号 $(-1)^t$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 t 确定.

n 阶行列式 D 有时也简记作 $\Delta(a_{ij})$.

规定：一阶行列式的值就等于构成行列式的元素，如 $|-1|=-1$. 注意不要与绝对值记号混淆.

下面给出另一形式的 n 阶行列式定义.

定理 1.2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证 按定义 1.1 有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

由定理 1.1 及其推论可推知：对 D 中的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应相等；反之，对 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应相等，从而 $D=D_1$.

例 1.4 根据定义可知，对角行列式（主对角线上可能有非零元，其余元素全为 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.5 证明

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

证 记 $\lambda_1 = a_{1n}, \lambda_2 = a_{2,n-1}, \cdots, \lambda_n = a_{n1}$. 则由 n 阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,故

$$t = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.6 计算 n 阶上三角行列式(主对角线以下的元素全为 0):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是主对角线以下的元素皆为零,即当 $j < i$ 时,$a_{ij} = 0$.

n 阶行列式的每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积. 而该行列式除主对角线上 n 个元素乘积之外,其余各项中至少有一个元素为零,故

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

其中 $t = t(12\cdots n) = 0$.

同样,下三角行列式(主对角线以上元素全为零)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 1.7 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\Delta(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\Delta(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：$D=D_1D_2$（Laplace 展开定理）.

证 记

$$D=\Delta(d_{ij}),$$

其中

$$d_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,k),$$

$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^l d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}},$$

由于当 $i\leqslant k,j>k$ 时，$d_{ij}=0$，因此 $r_1,\cdots,r_k$ 只有在 $1,\cdots,k$ 中选取时，该项才可能不为零，而此时，$r_{k+1},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1,\cdots,k+n$ 中选取. 于是 D 中可能不为零的项可以记作

$$(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}.$$

这里 $p_i=r_i,q_i=r_{k+i}-k$，而 l 为排列 $p_1\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数. 用 t,s 分别表示排列 $p_1\cdots p_k$ 及 $q_1\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$，于是

$$\begin{aligned} D&=\sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{t+s}a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n} \\ &=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\left[\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\right] \\ &=\left[\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\right]\cdot\left[\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\right] \\ &=D_1D_2. \end{aligned}$$

第二节　行列式的性质与计算

在理论研究和实际应用中，经常遇到行列式的计算问题，对于阶数较高、零元素较少的行列式，利用定义进行计算较为困难，为此有必要寻求简化计算的方法，利用行列式的性质将大大简化行列式的计算.

2.1　行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**. 显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义，有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}, \end{aligned}$$

根据定理 1.2 又有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1 表明，行列式中的行与列的地位是对等的，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然. 于是下面性质只需对行(或列)给出证明.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

互换 i,j 两行(列)，记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$交换 i,j 两行得到的(不妨设 $i<j$)，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kl}=a_{kl}$，当 $k=i,j$ 时，$b_{il}=a_{jl}$，$b_{jl}=a_{il}$($l=1,2,\cdots,n$)，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 t 与 t_1 相差 1，于是有 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式的值为零.

类似性质 2，以下各性质均可利用行列式的定义加以证明.

性质 3 用数 k 乘行列式等于用 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素.

k 乘第 i 行(列)记为 $kr_i(kc_i)$.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(列)提出公因子 k，记为 $r_i\div k(c_i\div k)$.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 2 \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3\div 5]{\substack{r_1\div 3\\ r_2\div 2}} 3\times 2\times 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=30\times 15=450.$$

推论 2 行列式中有一行(列)元素全为零，则此行列式的值等于零.

由性质 3 及其推论可得.

性质 4 行列式如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和. 例如第 j 列的元素都是两数之和，则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k，然后加到另一行

(列)对应元素上去,行列式的值不变.例如用数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去记为 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

利用以上各性质可以简化行列式的计算.

例 2.1　计算

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1}} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[4_4 - 2r_2]{r_3 + 3r_2} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 4r_3} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 9.$

例 2.2　计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解　该行列式的特点是各行 4 个数之和都是 6.把第 2、3、4 列同时加到第 1 列,提出公因子 6,然后各列减去第 1 列:

$$D \xlongequal[c_1 + c_4]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div 6} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$