泛函分析讲义

第一卷

F. 黎茨　B. 塞克佛尔维-纳吉

科学出版社

泛函分析讲义

第一卷

F. 黎茨
B. 塞克佛尔維-納吉 著

梁文騏 譯
冷生明 校

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书是在著者们历年来讲授"实函数""积分方程式"及"Hilbert 空间"等课程的基础上产生的．全书共分两部分，本卷是其中的第一卷．这一部分主要是介绍一元函数及多元函数的微分与积分理论的基本问题．在这里，Lebesgue 积分的概念的建立不是利用测度理论，而是基于线性泛函的开拓概念．此外，本卷还阐明了空间 L^2 与 C 的基本性质．

F. RIESZ, B. SZ.-NAGY
LECONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE
AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST 1955 3ème édition

泛函分析讲义
第一卷
F.黎茨 B.塞克佛尔维-纳吉 著
梁 文 骐 译
冷 生 明 校

*
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院开封印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1963 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1983 年 9 月第四次印刷 印张：5 5/8
印数：16,501—23,250 字数：140,000
统一书号：13031·1561
本社书号：2141·13—1
定价： 0.85 元

第三版著者序言

第三版与前一版的不同，除了一些微小的改动以外，是增加了由 B. Sz.-Nagy 編写的附录. 在这个附录中，討論了 Hilbert 类問題以及与第十章和第十一章密切相关的一些問題.

于布达佩斯与塞盖德，1954 年 11 月

第二版著者序言

由于讀者方面对于本书的惠加采納，就引起了再版的必要. 在这一版中，我們力求消除第一版中的印刷錯誤，并且在某些地方作了改进. 特别指出，在第十章及第十一章中变动較大，尤其是講一般形式的半羣，綫性算子的分譜与这种算子的冪的范数之間的关系，以及 von Neumann 的分譜集合的各节.

我們向第一版序言中所提及的各位致以深摯的感謝，并且首先要向 M. Á. Császár 致謝，由于他的許多批評性意見，大大便利了本书的改进工作.

于布达佩斯与塞盖德，1953 年 5 月

第一版著者序言

这本书是由著者們于塞盖德与布达佩斯大学历年所授“实函数”，“积分方程式”，“Hilbert 空間”等課程的基础上产生的. 其初始形式的手稿于 1948 年即已完成，但是由于一些技术性的困难，使得出版延迟了，而于此期間內增添了若干新的章节，講述一些更

新的結果.

第一部分是講微分与积分的現代理論，作为第二部分的一个引論. 第二部分是講积分方程式，綫性泛函与綫性算子的. 本书这样划分成两部分是对应于著者們之間职責的划分. 虽然我們是共同工作的，但第一部分基本上是第一个著者的手笔，第二部分基本上是第二个著者的手笔.

两部分結成一个有机的整体，而以綫性运算的概念为其中心环节. 綫性运算的概念也反映在建立 Lebesgue 积分理論的方法之中；这种方法我們看来是比依据測度論的那种方法来得更簡单一些并且更清晰一些；第一个著者在其所授課程中应用此法达二十年以上，但始終未曾以其最后成熟形式刊印出来.

第一部分从直接証明关于单调函数可微性的 Lebesgue 定理入手，并且特别就应用这一定理来研究区間函数的微商与积分之間的关系. 接着就建立 Lebesgue 积分論并研究空間 L^2 与 L^p 以及这些空間中的綫性泛函. Stieltjes 积分及其推广是用連續函数空間中的綫性泛函引进的.

第二部分是由講述积分方程的一章开始，而积分方程的理論就开辟出了走向綫性算子一般理論的道路. 这一章中講述了导致 Fredholm 的两可(alternative)定理的各种方法，而这些方法在下一章中就用来研究 Hilbert 空間或 Banach 空間中的一般类型的完全連續泛函方程. 对称的完全連續綫性算子是在单独的一章里来講的.

以下就是发展 Hilbert 空間中的有界的自伴算子及无界的自伴算子的分譜理論. 其中也講到无界的对称算子的开拓問題. 独辟一章来講自伴算子的函数并进行关于分譜及其攝动的研究. 关于单一(unitaire)算子的羣的 Stone 定理以及相毗連的若干定理，还有某些各态历經定理，就构成了另一章的題材.

关于不一定正規的綫性算子的分譜理論的一些暫时还未成系統的最新結果，在最后一章中略作一窺；在这里显示了以殘数理論为基础的方法，并研究了 J. von Neumann 关于分譜集合的最新結

果.

在材料的講述上，我們并非旨在詳論所有可能的推广，而是着重于揭示出各主要問題及其解决方法. 有时我們介紹給讀者达到同一目的的好几种方法，同时把它們互相比較并討論它們的应用范围.

請让我們在这里向匈牙利科学院表达我們誠摯的謝意，匈牙利科学院将我們的书用法文印行了出来，这就保証了各国讀者的閱讀. 我們也向 M. Á. Császár 致以由衷的謝忱，承其好意，为我們校看了原稿，并且，由于他的許多批評性的意見使得本书有所改进. MM. H. Grenet 与 K. Tandori 細心地为我們校閱校样，我們也向他們致謝.

于布达佩斯与塞盖德，1952 年 2 月

俄譯本校訂者序言

泛函分析的基本概念与方法的产生，是由于微分方程与积分方程的理論，变分法，函数論，綫性代数等这样一些古典数学分枝发展与交互影响的結果．然而促使产生这样一些一般概念——如象賦范空間，算子，泛函等——的那些具体事实与問題，在許多近代的关于泛函分析的书中却未得到充分完全的反映．

現在以俄譯本出版的卓越的匈牙利学者 Frédéric Riesz 与 Béla Sz.-Nagy 的这本书，其結构上与用通行的叙述方式写成的那些书迥然不同．这书的著者們不是从基本概念与結果的抽象叙述开始，而是从古典的函数空間 L^2 与 C 的研究开始，不过把証明作得使其可以完全运用（或加以不重要的改动）到更一般的情形．因此，他們的这本书是反映了泛函分析发展的历史进程．应該指出，F. Riesz 本人就是泛函分析的創造人之一（他的第一篇作品发表約在五十年以前），在数学的这个領域中曾开辟了很多新的途徑．第二位著者 Béla Sz.-Nagy 也在泛函分析的发展中加进了极其重要的瓌宝．本书著者們在許多場合讲述的是其本人所独创的结果与方法，这种情形无疑地乃是本书引人入胜的一点．

本书的第一部分（第一章至第三章）系 F. Riesz 所写，用来講一元函数及多元函数的微分与积分理論的基本問題，其中的講述在很大程度上是以 F. Riesz 自己的著述为基础的．在这里，和普通的办法不同，Lebesgue 积分的概念的建立并不利用測度理論（仅利用零測度集合的概念），而是基于綫性泛函的开拓的概念．应該指出，虽然如此，这个对于研究直綫上的函数說来是方便的方法，对于定义在任意集合上的函数却不能直接应用．在本书的这一部分中闡明了空間 L^2 与 C 的基本性質．

本书的第二部分，系 B. Sz.-Nagy 所写，差不多完全是用来講

Hilbert 空間中的綫性算子的理論. 第二部分从包含有古典的积分方程論的第四章开始. 接着（第五章）就給出 Hilbert 空間的抽象定义并且十分簡要地說明了 Banach 空間的一般概念. 再下一章是講 L^2 中的对称的完全連續的綫性算子的理論，換句話說，也就是具有对称核的积分方程的理論.

第七章与第八章包含关于有界綫性算子以及无界綫性算子的分譜理論. 如果說，問題的这一部分在各种教科书与入門书中已經屢次得到闡述，那么本书最后三章(第九章至第十一章)所討論的材料，則无論是在苏联的还是在其他国家的专門书籍中，都是講得逊色得多. 在这几章中講的是攝动論（以 B. Sz.-Nagy 自己的著述为基础），各态历經論初步，羣与半羣的单一表示以及算子的解析函数概念；本书的最后一节是講 J. von Neumann 关于自伴算子分譜理論的研究的最近結果.

在科学的現状之下，要想在一本书里包罗泛函分析的所有主要分枝是不可能的. 本书著者們依照他們的科学兴趣，把主要注意力集中在 Hilbert 空間中的綫性算子理論与积分理論上面. 在他們所注意的范围以外，还有賦范环，部分有序空間，非綫性泛函分析問題以及一些其他的題材.

正如以上所指出的那样，在 F. Riesz 与 B. Sz.-Nagy 的这本书中，尤其是在它的第一部分中，闡述是常常远非按照通常的形式来进行的. 另一方面，在很多場合，对同一結果引进了各种不同的証明，对同一問題指出了各种不同的观点. 这就使得本书富于具体內容，而关于作为泛函分析的基础的一些一般概念(如綫性空間与度量空間，完备性，紧斂（compact）性等)，則沒有按照它們的現代形式給以充分的表述. 因此，对于初学泛函分析的讀者，应該建議在研习 F. Riesz 及 B. Sz.-Nagy 的这本书的同时，还应研习任何一本系統講述数学的这个領域的一般概念的教程，例如 Л. А. Люстерник 与 В. И. Соболев 的书(泛函分析概要，莫斯科-列宁格勒，1951；有中譯本，科学出版社出版)的前几章.

F. Riesz 与 B. Sz.-Nagy 的这本书可以推荐为专門研究函数

論与微分方程的大学生及研究生在泛函分析方面的参考书．同时由卓越的学者們所执笔并且創造性地擘划出的这本书无疑地也将引起专家們的注意．

С. В. Фомин

目录

第一部分：微分与积分的近代理論

第一章 微 分

§1. 关于单調函数的微商的 Lebesgue 定理 …… 3

1.不可微的連續函数的例 …… 3

2.关于单調函数的微商的 Lebesgue 定理。零測度集合 …… 5

3. Lebesgue 定理的証明 …… 6

4.囿变函数 …… 10

§2. Lebesgue 定理的若干直接結論 …… 12

5.关于单調項級数的逐項微分的 Fubini 定理 …… 12

6.綫性集合的稠密点 …… 13

7.跳跃函数 …… 14

8.任意的囿变函数 …… 17

9.关于任意函数的导数 (nombres dérivés) 的 Denjoy-Young-Saks 定理 …… 19

§3. 区間函数 …… 21

10.緒言 …… 21

11.第一基本定理 …… 23

12.第二基本定理 …… 24

13. Darboux 积分与 Riemann 积分 …… 25

14. Darboux 定理 …… 27

15.囿变函数与可求长的曲綫 …… 29

第二章 Lebesgue 积分

§1. 定义与基本性質 …… 32

16.阶梯函数的积分，两个引理 …… 32

17.可和函数的积分 …… 34
18.递增序列的逐項积分法（Beppo Levi 定理）…… 37
19.受控序列的逐項积分法(Lebesgue 定理) …… 40
20.关于极限函数的可和性的一些定理 …… 43
21. Schwarz 不等式，Hölder 不等式及 Minkowski 不等式 …… 45
22.可測集合与可測函数 …… 49
§ 2. 不定积分. 絕对連續函数 …… 53
23.不定积分的全变分与微商 …… 53
24.微商几乎处处等于零的单調連續函数的例 …… 54
25.絕对連續函数. 单調函数的典型分解法 …… 56
26.分部积分法与換元积分法 …… 61
27.作为集合函数的积分 …… 64
§ 3. 空間 L^2 及其中的綫性泛函. 空間 L^p …… 65
28.空間 L^2; 平均收斂; Riesz-Fischer 定理 …… 65
29.弱收斂 …… 67
30.綫性泛函 …… 68
31.綫性泛函序列. Osgood 定理 …… 71
32.空間 L^2 的可分性. 选择定理 …… 72
33.划一直交 (orthonormal) 系統 …… 74
34.空間 L^2 的子空間. 分解定理 …… 80
35.选择定理的另一証明; 泛函的开拓 …… 83
36.空間 L^p 及其中的綫性泛函 …… 84
37.关于平均收斂的一个定理 …… 89
38. Banach-Saks 定理 …… 91
§ 4. 多元函数 …… 93
39.定义. 对应原理 …… 93
40.累次积分. Fubini 定理 …… 95
41.非負可加矩形函数对于一个网的微商. 网的平行移动 …… 96
42.囿变矩形函数. 共軛网 …… 99
43.可加集合函数. (B)可測集合 …… 102
§ 5. Lebesgue 积分的其他定义 …… 104
44. (L) 可測集合 …… 104

45. (L) 可测函数与(L)积分 …… 107
46.其他的定义。Егоров 定理 …… 110
47. Arzelà 定理与 Osgood 定理的初等証明 …… 115
48.把 Lebesgue 积分看作是微分的逆运算 …… 117

第三章 Stieltjes 积分及其推广

§1. 連續函数空間中的綫性泛函 …… 120
49. Stieltjes 积分 …… 120
50.空間 C 中的綫性泛函 …… 121
51.母函数的唯一性 …… 126
52.綫性泛函的开拓 …… 128
53.逼近定理。矩的問題 …… 131
54.分部积分法。第二中值定理 …… 135
55.泛函序列 …… 137
§2. Stieltjes 积分的推广 …… 139
56. Riemann-Stieltjes 积分与 Lebesgue-Stieltjes 积分 …… 139
57. Lebesgue-Stieltjes 积分轉化为 Lebesgue 积分 …… 142
58.两个 Lebesgue-Stieltjes 积分之間的关系 …… 145
59.多元函数。直接的定义 …… 147
60.借助于对应原理的定义 …… 149
§3. Daniell 积分 …… 150
61.正型的綫性泛函 …… 150
62.变号泛函 …… 153
63.一个綫性泛函对于另一个綫性泛函的微商 …… 156
参考文献 …… 161

第 一 部 分

微分与積分的近代理論

第一章 微 分

§1. 关于单調函数的微商的 Lebesgue 定理

1. 不可微的連續函数的例. 在古典分析中，一般是假定所討論的函数具有微商，甚而至于是具有直到某一阶的連續微商. 有时在一些个别的点上，微商可能不存在或是发生間断. 然而直到本世紀初，間或提出的問題只不过是：某种函数，例如連續函数或单調函数，是不是一定具有微商呢？或者某种函数是不是处处都沒有微商或至少在一个集合上可能沒有微商呢？在这方面所得到的不过是一些差不多显而易見的結果，例如凸函数左边可微并且右边可微. 由此推知，在 x 的每一个值上，它的微商皆存在，至多只有可于(无穷)多个 x 值是例外.

这些問題一般要追溯到 1806 年，Ampère 的一篇論文“关于导函数的理論”[1][1)]，当时这位伟大的学者曾徒劳无功地企图建立“任何一个”函数的可微性，而仅在变数的某些“特殊的与孤立的”值上可以有例外. 可是当我們进一步考虑到函数概念的发展时，就可覚察到，Ampère 所考虑的差不多只能是分段单調的函数——虽然在原著中沒有明說出这一点来.

在其后的数十年中，尽管数学分析的发展是何等的光輝灿烂，而关于这个問題的解决却未获得进展[2)]. 仅只是到了 Weierstrass

1) 方括号中的数字表示书末所載文献的序号.

2) 俄譯本注. 这不完全正确. Н. И. Лобачевский 早已确切地区別了“漸近性”(即連續性)与“連續性”(即可微性)之間的异同. 例如可参看 Успехи матем. наук, 卷1(1946), 第 1(11) 期的第 15—21 頁 “Мысли и высказывания Н. И. Лобачевского”, 特別是其中第 17 頁. 連續而无微商的函数的第一个例系 Bolzano 所建立. 参閱 Успехи матем, наук, 卷 4 (1949), 第 2(30) 期的第 15 頁,

建立了連續而处处沒有微商的函数的例1)，方才最終地結束了想要証明最一般形式的連續函数的可微性的企图. 由于其他一些問題的緣故，差不多十九世紀后叶所有从事数学分析的卓越数学家都曾經致力于构造一些更簡单的这种函数以及闡明它們的性质；这种研究延綿至今犹未停止. 下面所举的一个例或許要算是最初等的了，这是由 van der Waerden[1] 所作出的，其基本原理是以下这一显明的事实：由整数所組成的无穷序列只有在它的項从某一处开始恆保持相同这一情形下，才可能收斂.

和平常一样，如果当 $h\to 0$ 并且对于 $x+h$ 所經历的值 $f(x+h)$ 皆有意义的时候，比值

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

趋于一个有穷的并确定的极限，那么我們就称函数 $f(x)$ 在 x 点处有微商. 我們用 $\{x\}$ 来表示 x 与相邻最近的整数之間的距离. 作了这些規定之后，我們来构造以下的函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}; \tag{1}$$

由于这級数中各項都是連續函数，而且这級数还以几何級数 $\Sigma 10^{-n}$ 为控制級数，所以函数 $f(x)$ 是連續的. 往下我們試着来計算一下它在 x 点处的微商，就会得出一个否定的結果.

为要达到这个目的，注意我們显然可以只討論 $0\leqslant x<1$ 的情形，并将 x 写成以下形状：

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

規定当 x 为有穷小数时就在后面添上一串零. 我們按照

$$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\leqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }>\frac{1}{2}$$

而分成两种情形. 在第一种情形下，

$$\{10^n x\}=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots,$$

而在第二种情形下，

1) 系 Du Bois-Reymond[1] 所发表.

$$\{10^n x\} = 1 - 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots.$$

当 a_m 等于 4 或 9 的时候,我們令 $h_m = -10^{-m}$,而对于其他的 a_m,則令 $h_m = 10^{-m}$. 我們来考察以下的比值

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}; \tag{2}$$

根据(1)式,这比值可以表成这样形式的級数:

$$10^m \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}.$$

显而易見,分子对于 $n \geqslant m$ 都等于零,而对于 $n < m$ 則簡化成 $\pm 10^{n-m}$;这样一来,級数中相应的各項就等于± 1,因而比值(2)的值是一个整数,也許是正数也許是負数也许是零,但是无論如何其奇偶性总是与 m 一致的. 比值(2)的数列旣是由奇偶相間的一串整数所形成,当然决不可能收斂.

2. 关于单調函数的微商的 Lebesgue 定理. 零測度集合. 現在我們来考察单调函数类. 以下的一个定理属于 Lebesgue,系实变数分析中最引人注目与最重要的定理之一.

定理. 任何一个单調函数 $f(x)$ 对于所有的点 x (可能要除去一个零測度集合的点 x)都有有穷的、确定的微商;或者这样来說,函数几乎处处有有穷的、确定的微商.

我們来闡释一下这些話的含义. 在此先附带說明一点,Lebesgue 曾于 1904 年在他的初版的积分論[*] 的最后一章末尾証明了他的这个定理(不过这是在 $f(x)$ 連續这一附加假定之下証明的),作为是全部理論的最終归結. 虽然如此,在这个定理的叙述中却无論是积分概念还是測度概念都沒有用到. 事实上,零測度集合的概念,就其本質而言并不一定要依賴于測度的一般理論,而且零測度集合的各項主要性質也可以避免使用一般測度論的术語而建立起来.

依照 Lebesgue 的命名,我們称 x 值的一个集合为零測度集合,如果这集合能够含于有穷个或可数无穷多个区間之內,而这些区間的总长度(卽各区間长度的和数)可以任意小. 由这个定义立