LIGONG

高等学校理工科参考丛书

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONGSHU

吉米多维奇数学5000题〈附解答〉

第三卷

高等学校理工科参考丛书

吉米多维奇数学5000题
（附解答）

第三卷

吴茂贵　许　康　何灿芝　石耀焜
刘利民　　　刘　恒　　　周复兴　译

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

吉米多维奇数学5000题(附解答)

(第三卷)

吴茂贵　等译

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行
(长沙市展览馆路8号)
湖南省新华书店经销

湖南省新华印刷二厂印刷
(印装质量问题请直接与本厂联系)

*

1992年8月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：22.125　字数：507,000
印数：1——3,500

ISBN 7—5357—1169—3
O·107　定价：12.90元

地科123—58

译者的话

本书是《吉米多维奇数学5000题》的第三卷，连同湖南科学技术出版社1986年出版的第一、二卷（中译本），字数超过120万，章数达18章，内容覆盖理工科各专业数学基础课及专门课几乎全部范围．特别是第三卷，比我国现行“工程数学”课程材料更丰富、广泛，因为该书（一、二、三卷）在原苏联是按总课时510节安排的，远多于我国理工科专业数学课时．

这样，这套习题集（一、二、三卷）就成为我国迄今所见到的章、节、题数最多、覆盖面最广、内容最丰富的理工科数学解题参考书．鉴于近十年来各出版社虽也出过不少高等数学教材和参考书，但所附习题大量的属于大学一年级内容，彼此重复，缺乏新意；至于象本卷所含内容，其他各书甚少涉及，或者付之阙如，或者仅有概率论（连数理统计都未纳入），这种状况必须有所突破．所以我们不揣冒昧，谨向各大学、中专、研究设计院所、数学系科以及社会各级图书馆和资料室郑重推荐这一极富收藏和参考价值的书籍；当然同时也负责地向广大数学界同行和理工科大学生、研究生推介本书，它将成为您在学习深造、教学备课和研究创造中的良师益友．

本书翻译工作由吴茂贵、许康、何灿芝、石耀焜、刘利民、

刘恒、周复兴承担，全书由吴茂贵审阅，并纠正了原书的一些差错。但是，限于我们的水平，疏漏和不妥之处难免存在，敬请读者指正。

译 者

1990.11

目　录

第三卷序言

本书是《吉米多维奇数学5000题》的续篇，列为第三卷。它的内容属高等数学专门教程部分，计有：概率论，数理统计，最优化方法，数学物理方程的傅立叶解法与达朗贝尔解法，积分方程等。这些材料完全符合原苏联高教部于1979年5月颁布的工科院校高等数学510学时教学大纲专门教程部分所作的规定。

本书如同前二卷一样，每节开头都载有简明扼要的基础理论知识。为了有利于学生学会独立解题，每节都列举了解答详细的若干范例。书内所有计算题都附有答案；题号右上角标有一个星号（*）的题附有提示，标有两个星号（**）的题附有详解。

在编写本卷习题集时，仍遵循前二卷的一个指导思想：为了深入研究数理统计、最优化问题、数理方程的网格解法等等，非得使用电子计算机不可。因此，书内许多数值问题都要求运用算法语言求解。

莫斯科工程物理学院与莫斯科钢铁冶金学院高等数学教研室的А. И. 勃里列伯柯，В. А. 特列诺金，В. П. 契斯恰可夫，А. Л. 加尔卡维四位教授及其他许多老师研讨了本书的手稿，他们提供的一系列宝贵意见和建议，使本书的编写质量得到改

善。作者在此深表谢忱!

作者还要衷心感谢莫斯科电子技术学院高等数学教研室Л. В. 拉宾柯和С. А. 佛明娜两位老师，他们为这本习题集的印刷出版作出了贡献。

第十四章　概率论

§1　随机事件

1　随机事件的概念　概率论研究的是呈偶然结局的随机试验模型。任何一项随机试验都是在某些完全确定的总体条件下实现其观测结果的。当总体条件不变时，我们所考察的试验（至少在理论上）应可能重复进行任意多的次数。

所谓“观测结果”，就是根据给定的试验方案，原则上均可凭借感官或某种器具对每次试验的结果作出判断或记载（比如，“掷钱币”就是一个最简单的例子）。任何一次试验结果的出现都具有偶然性，这就是随机事件。在观测每次的试验结果时，预计的随机事件可能发生，也可能不发生。

对任一随机事件，每观测一次总会得到唯一存在的基本事件，我们把该试验的所有基本事件作为元素构成集合 Ω。这样便给随机试验赋予了一个数学模型的“外壳”。Ω的任意子集是随机事件，Ω的全体子集组成所指随机试验的事件场。

设有基本事件ω属于某事件A($\omega\in A$)，当ω在试验结果中出现时，就说事件A 发生。对应于空集ϕ的事件叫做不可能事件；对应于全集Ω的事件叫做必然事件。

如果在试验结果中A与B能（不能）同时发生，事件A与B

叫做相容（不相容）。亦即：A与B有公共元素则相容，否则不相容。

对于不同的试验，集合Ω可以是离散的或连续的。离散情形的基本事件可以是有限个或无穷可数个；连续情形的基本事件呈连续统型（数轴上的任何有限或无限区间都是连续统型点集的例子）。

随机试验的数学模型可概括如下：1)作出基本事件集合Ω；2）描述该试验的事件场；3）确定事件场的概率分布。

2)、3）两款奠定了概率论的严格公理体系，它是概率论及其应用的现代教程的“基石”。

1）款中的集合Ω一般由试验本身直接给定。如果不是这样，就应通过实践对该项试验逐一考察我们所关注的所有基本事件究竟有哪一些，据此来确立集合Ω。

在有的问题中，“基本事件”这个概念往往规定得不怎么严格，因此会出现解不唯一的情形。为了避免产生歧义，我们可将事件场中的基本事件予以特别指定，而不再让集合Ω的非单元素子集充当“基本事件”。

例1 将一颗骰子掷一次得X点。写出这一掷骰试验的基本事件集合Ω，并用Ω的子集分别表示下列各事件：$A=\{X是3的倍数\}$；$B=\{X是奇数\}$；$C=\{X>3\}$；$D=\{X<7\}$；$E=\{X是分数\}$；$F=\{0.5<X<1.5\}$。指明哪儿对事件相容。

解 我们试用两组不同的基本事件来解题：1° $\omega_k=\{X=k\}$，$k=1,2,\cdots,6$；或2° $\omega^{(1)}=\{X是奇数\}$，$\omega^{(2)}=\{X是偶数\}$。

由1°可得必然事件$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$；

由2°可得必然事件$\Omega_2=\{\omega^{(1)},\omega^{(2)}\}$。

对于本题显然只能选用Ω_1。因为Ω_2无法表出试验中出现的事件

ω_1，ω_2，…，ω_6，A，C，F等等。关于Ω_1我们有：$A=\{\omega_3, \omega_6\}$；$B=\omega^{(1)}=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$；$C=\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$；$D=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}=\Omega_1$；$E=\phi$；$F=\omega_1$。

经比较得知彼此相容的事件有：A与B；A与C；A与D；B与C；B与D；B与F；C与D；D与F。▌

例2 用雷达探测空中目标。雷达的屏幕显示器是一个半径为10厘米的圆盘，空中目标在屏幕上的位置显示成耀斑。以屏幕中心为原点建立平面直角坐标系，试确定这项试验的基本事件集合Ω及下列各事件所对应的子集：$A=\{$耀斑位于第一象限$\}$；$B=\{$耀斑位于以原点为圆心，以5厘米为半径的圆盘内$\}$；$C=\{$耀斑位于以2.5厘米为半径的圆盘内，圆心在Ox轴负半轴5厘米处$\}$。指出事件A与B、A与C、B与C是否相容？

解 我们可以认为雷达屏幕上显示的耀斑是直径充分小的圆盘，并将其理想化，看作是数学概念的“点”。于是集合Ω呈连续统型：

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 100\}.$$

相应地，所求的几个子集是

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 100,\ x>0,\ y>0\};$$

$$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 25\};$$

$$C=\{(x,y)\,|\,(x+5)^2+y^2\leqslant 6.25\}.$$

根据事件相容与否的定义，易知本题中A与B、B与C相容，A与C不相容。▌

例3 研究下述随机试验：甲、乙两足球队举行一场对抗赛。设有事件$A=\{$甲胜乙$\}$；$B=\{$甲、乙决出了胜负$\}$；$C=\{$乙以3∶1获胜$\}$；$D=\{$甲、乙两队总共进球数不少于3$\}$。试确定这项试验的基本事件集合Ω，并指出所列各事件对应的子集。

解 本题显然不可能符合随机试验中“总体条件不变”的

要求．因为当这两个队举行第二场球赛时，现场条件一般都会有所变动．为了建立本题的概率模型，必须将现实条件作必要的抽象理解。假定这样的模型存在，那么基本事件是哪一些呢？不难想到，只要以甲、乙两队终场时各自进球的个数作基本事件就行了．于是我们有：

$$\Omega=\{(x,y)\mid x\in Z_0,y\in Z_0\},$$

其中x——甲队的进球数，y——乙队的进球数，

Z_0——非负整数集合。

从理论上看，Ω 中的x与y的取值似乎没有上界的限制，这在实际问题中确实是不可思议的现象！

现将本题所举四个事件的对应子集表示如下：

$$A=\{(x,y)\mid x\in Z_0,y\in Z_0,x>y\};$$

$$B=\{(x,y)\mid x\in Z_0,y\in Z_0,x\neq y\};$$

$$C=\{(x,y)\mid x=1,\ y=3\}=\{(1,\ 3)\};$$

$$D=\{(x,y)\mid x\in Z_0,\ y\in Z_0,\ x+y\geqslant 3\}.$$

顺便指出，本题解法也许会因人而异．比如说，甲队的教练员可能不仅只关心这场比赛的胜负，而且更为关心双方队员的犯规次数及受伤人数。从而就得另行确定与上述Ω 不同的基本事件集合Ω'．这里就不细说了．▌

在问题1.1—1.8中，按题设的试验确定基本事件集合Ω，并指出所提事件的对应子集。

1.1 将一颗骰子掷两次，先后得两个点数．已知事件：$A=$｛两个点数都是3的倍数｝；$B=$｛两个点数都不是6｝；$C=$｛两个点数都大于3｝；$D=$｛两个点数相同｝。

1.2 将一枚硬币掷三次，国徽朝上记为“正”，数字朝上记为“反”．已知事件：$A=$｛国徽朝上只一次｝；$B=$｛数字一次也没朝上｝；$C=$｛国徽朝上的次数比数字朝上的次数多｝；$D=$

{国徽朝上至少连续出现两次}。

1.3 掷一枚硬币直至出现国徽朝上为止。已知事件：$A=${掷第三次才见国徽朝上}；$B=${掷过两次以后才可能出现国徽朝上}。

1.4 对一平面直角坐标系上的矩形($-2\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 1$)作射击试验，不考虑弹着点位于给定矩形之外的情形。已知事件：$A=${弹着点的横坐标不小于纵坐标}；$B=${弹着点的横纵坐标之积非负}；$C=${弹着点的横、纵坐标的绝对值之和不小于1}。哪几对事件是相容的？

1.5 在区间$[a,b]$上随机取一点x，又在区间$[a,x]$上随机取一点y，考察数组(x,y)。已知事件：$A=${第二点距b点比距a点近}；$B=${两随机点间的距离小于$[a,b]$长度的一半}；$C=${第一点距a点比距b点近}；$D=${第一点距第二点比距b点近}。哪几对事件不相容？

1.6 伊万和彼得约定上午11至12时之间在某地相会。两人到达该地的时刻都是11至12时之间的随机值，先到者至多等候15分钟，未见后到者就离去。记x——彼得到达的时刻，y——伊万到达的时刻（时间从11时起算，均以分钟为单位），考察数组(x,y)。已知事件：$A=${彼得在11点45分以后到达}；$B=${彼得在伊万以后到达}；$C=${伊万在11点45分以前到达}；$D=${两人没有会见}；$E=${彼得等候伊万15分钟后离去}；$F=${伊万一到就见到了彼得}；$G=${两人总是相会}；$H=${两人总是在11点半以后相会}；$I=${至少有一人在11点半以前到达}，$J=${伊万因迟到而没有会见彼得}；$K=${两人会晤的时间少于5分钟}。

1.7 长为$2h$的线段PQ被Ox轴垂直平分于点$R(l,0)$。过P和Q作圆$x^2+y^2=r^2(r<l)$的切线PP'和QQ'，OP'与OQ'的倾斜角分别是φ_1与$\varphi_2(0<\varphi_1<\varphi_2<\pi)$。一质点$a$在圆$x^2+y^2=r^2$上

以匀速转动一周，并在任何瞬时都有沿切线方向逃逸的趋势。线段PQ对位于$\widehat{P'Q'}$上的质点有二倍于逃逸力的吸引力而恰能俘获该质点，设事件$A=\{$质点α被线段PQ俘获$\}$。作出质点α运动的基本事件集合Ω，并将事件A表为Ω的子集。

1.8 某气象站的风力计能精确测出风速v(公里/小时) 及误差为$\pm 2°$的风向φ。设有事件$A=\{(v,\varphi)|v<12,\ \varphi=343°35'\}$；$B=\{(v,\varphi)|v=15.5,\ 340°\leqslant\varphi<350°\}$；$C=\{(v,\varphi)|v\geqslant 3.25,\ 48°\leqslant\varphi\leqslant 51°\}$。试确定该气象站关于风力记载的基本事件集合$\Omega$及所指诸事件是否是$\Omega$的子集。

2 事件的代数运算 由于事件可视为集合，因而事件和集合一样可完成各种代数运算：

$A\subset B$ (事件的包含关系——事件B发生后，事件A必定发生)。

$A=B$ (两事件相等——当且仅当$A\subset B$与$B\subset A$同时成立)。

$A+B$ (两事件的和——事件A与B至少有一个发生，逻辑上的“或”运算)。

AB (两事件的积——事件A与B同时发生，逻辑上的“与”运算)。$AB=\phi$，当且仅当A与B不相容。

$A-B$(两事件的差——事件A发生，事件B不发生)。

$\bar{A}=\Omega-A$ (事件A对于全集Ω的补——事件A不发生，逻辑上的“非”运算)。$\bar{A}$与A互为对立事件。

以Ω的某些子集构成一个集类$\mathscr{F}$，使得其内任何两个元素完成上述各种运算所得结果仍在$\mathscr{F}$内。我们称这样的集类$\mathscr{F}$为布尔代数（布尔——英国数学家）。对于一项随机试验，若将Ω中能观察到的事件作为$\mathscr{F}$的元素，那么这类事件的全体，一般言之就是Ω的所有子集。假如$R\subset\Omega$，但是$R\notin\mathscr{F}$，那么由定义即知R在试验中不会出现。这个定义与前面凭经验确定的随机事件