



GT

韩 强 黄小清 宁建国 编著

高等板壳理论

21 世 纪 固 体 力 学 丛 书

科学出版社

21 世纪固体力学丛书

高等板壳理论

韩 强 黄小清 宁建国 编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书全面地阐述了板壳问题的基本概念和研究方法,内容涉及板壳的静力、振动、屈曲、动力等问题,以及复合材料板壳理论,以板壳线性弯曲问题为主,同时讨论板壳的非线性弯曲问题,不仅阐述了板壳的经典理论,也介绍了板壳理论的最新成果。

本书可供力学及其相关专业的本科生、研究生、博士后以及相关专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等板壳理论/韩强,黄小清,宁建国编著. —北京:科学出版社,2002
(21世纪固体力学丛书)
ISBN 7-03-010020-4

I. 高… I. ①韩… ②黄… ③宁… II. 薄壳结构 IV. TU33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001101 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年4月第一版 开本:720×1000 B5

2002年4月第一次印刷 印张:14 1/4

印数:1—3 000 字数:272 000

定价:28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《21 世纪固体力学丛书》编委会

主 编 黄培彦

副主编 韩 强

编 委 (以姓氏笔画为序)

汤立群 陈国华 罗 毅

贺玲凤 贾乃文 曾庆敦

总 序

自从产业革命以来,在工业技术的发展中,力学曾大显身手。特别是 20 世纪中叶以来,近代力学基础性、探索性的超前研究曾对当代产业例如航空、航天工业的发展起到过主导的作用。从中固体力学取得了令人瞩目的成就。

随着知识经济和信息时代的到来,21 世纪我国经济建设将会加速发展。一大批高新技术产业和跨世纪骨干产业的形成,将会带来许多新的复杂的工程实际问题,这不仅为固体力学提供了大量的新课题,而且亦成为固体力学学科发展的新动力。固体力学既要适应生产实际的发展,面向工程实际,解决生产难题,同时亦应从工程实际中提炼出具有普遍性的问题进行系统的研究,促进各分支学科的成长,从而推动整个固体力学学科的发展。

中青年学者尤其青年学者是 21 世纪我国固体力学研究领域的主力军。目前,一大批优秀的青年学者已经成长为新一代的学科带头人,活跃在固体力学的诸多前沿研究领域。由他们联合撰写的固体力学系列专著,从各自不同的研究角度出发,反映了最新的研究成果及其发展趋势,对该学科的发展具有重要的影响和参考价值。毫无疑问,《21 世纪固体力学丛书》在这方面做了一个很好的尝试。

《21 世纪固体力学丛书》围绕固体力学的若干前沿研究领域,基于近代固体力学理论的最新研究成果,在结构的疲劳设计、概率断裂力学、复合材料强度理论、非线性力学以及新的实验测试技术等方面进行了系统的总结。该丛书不仅阐述了基本概念、基本理论、基本方法,而且有许多内容是作者们多年来卓有成效的研究成果,具有理论与应用并重的特色。丛书有助于初次涉足这一领域的学生和研究人员在较短的时间内从较高的起点上开展固体力学的研究工作。

我相信,《21 世纪固体力学丛书》的出版将会对固体力学的理论研究和工程应用发挥积极的促进作用。

高镇同

2001 年 12 月

前 言

随着科学技术的蓬勃发展,弹性板壳已经在航空航天、仪器仪表、造船、交通、土建、化工、机械等各个工业领域获得了广泛应用。板壳理论是我国高等工科学校力学及其相关专业普遍开设的课程。作者近年来一直从事板壳理论的教学和科研工作,本书就是在作者教学实践和科研工作的基础上加以充实完成的。

本书阐述板壳问题的基本概念和研究方法,内容涉及板壳静力问题、板壳振动、板壳的屈曲、板壳动力问题的分叉和混沌运动以及复合材料板壳理论,以板壳线性弯曲问题为主,同时讨论板壳的非线性弯曲问题,不仅阐述板壳的经典理论,还介绍了板壳理论的最新研究成果,其中包括作者近年来在复合材料板壳理论和板壳非线性动力学研究中取得的一系列研究成果。由于板壳理论的研究内容极其广泛,因此不可能期望在一本专著中包罗板壳理论的全部内容,因此许多内容本书未能涉及。

本书可以作为力学及其相关专业的本科生、研究生、博士后、理论研究人员和广大工程技术人员的参考书。

在本书出版之际,特向华南理工大学交通学院的领导表示感谢,他们对本书的出版给予了多方面的支持和帮助。

由于作者水平所限,本书一定存在一些缺点和欠妥之处,恳请读者批评指正。

目 录

总序

前言

第一章 弹性薄板弯曲的基本理论	1
§ 1.1 基本概念和假设	1
§ 1.2 弹性薄板的基本微分方程	3
§ 1.3 边界条件	6
§ 1.4 简单例题	8
§ 1.5 四边简支矩形板的一般解.....	10
§ 1.6 齐次方程的一般解.....	14
§ 1.7 弹性地基上的板.....	15
§ 1.8 薄圆板的弯曲.....	15
§ 1.9 薄板弯曲的变分方程.....	20
§ 1.10 基于能量原理的近似解法	25
第二章 弹性薄板的稳定和振动	29
§ 2.1 薄板屈曲的基本控制方程.....	29
§ 2.2 矩形板的屈曲.....	32
§ 2.3 薄圆板的屈曲.....	34
§ 2.4 能量法.....	36
§ 2.5 弹性薄板的自由振动.....	40
§ 2.6 薄圆板的自由振动.....	45
§ 2.7 固有频率的近似解法.....	47
§ 2.8 板的强迫振动.....	50
第三章 弹性薄壳的一般性理论	52
§ 3.1 正交曲线坐标系.....	52
§ 3.2 正交曲线坐标系下弹性体的几何方程.....	53
§ 3.3 壳体理论的基本假设和正交曲线坐标.....	56
§ 3.4 壳体的几何方程.....	57
§ 3.5 壳体的物理方程.....	60
§ 3.6 壳体的平衡方程.....	64
§ 3.7 壳体的边界条件.....	66
§ 3.8 壳体的应变能.....	68

§ 3.9	壳体的无矩理论	69
第四章	柱壳	72
§ 4.1	柱壳的无矩理论	72
§ 4.2	柱壳的有矩理论	75
§ 4.3	圆柱壳的轴对称弯曲	79
§ 4.4	轴对称弯曲的近似解	81
§ 4.5	顶盖柱壳的弯曲	84
§ 4.6	柱壳的半无矩理论	85
第五章	回转壳	88
§ 5.1	回转壳中面的几何性质	88
§ 5.2	回转壳的无矩理论	89
§ 5.3	轴对称问题的无矩理论	91
§ 5.4	球壳的轴对称弯曲	93
§ 5.5	球壳轴对称弯曲的近似解	95
第六章	扁壳	99
§ 6.1	扁壳中面的几何性质	99
§ 6.2	基本方程	101
§ 6.3	扁壳的无矩理论	102
§ 6.4	扁壳问题的混合法	106
§ 6.5	球面扁壳	109
第七章	圆柱壳的稳定性	111
§ 7.1	圆柱壳屈曲问题的控制方程	111
§ 7.2	圆柱壳的线性屈曲控制方程	114
§ 7.3	轴压圆柱壳的屈曲	115
§ 7.4	圆柱壳的扭转屈曲	117
第八章	板壳的非线性问题	120
§ 8.1	非线性弹性矩形板的混沌运动	120
§ 8.2	圆板的混沌运动	128
§ 8.3	圆柱壳的混沌运动	135
§ 8.4	板条的分叉和混沌	146
第九章	叠层板的弯曲	160
§ 9.1	复合材料单层板的本构方程	160
§ 9.2	线性经典叠层板弯曲理论的基本方程	165
§ 9.3	非线性经典叠层板的弯曲	172
第十章	叠层板的稳定性理论	179
§ 10.1	经典叠层板的非线性稳定性理论	179

§ 10.2 确定临界载荷的线性理论.....	180
第十一章 线性经典叠层薄壳理论.....	183
§ 11.1 任意形状叠层薄壳的一般经典理论.....	183
§ 11.2 任意形状叠层薄壳的近似经典理论.....	186
§ 11.3 圆柱叠层薄壳的近似经典理论.....	195
附录 I 各向异性弹性力学基础	202
附录 II 张量.....	211
参考文献.....	216

第一章 弹性薄板弯曲的基本理论

板壳是广泛应用于航空、宇航、造船、土建、化工和机械等工业领域的基本结构单元。对于薄板,引用一些用于简化的计算假定,已经建立了一套完整而成熟的理论体系,这一基本理论在工程上也获得了广泛应用。本章首先介绍弹性薄板弯曲的基本理论。

§ 1.1 基本概念和假设

由两个相互平行的平面以及与此两平面垂直的柱面所围成的物体称为平板,简称为板,如图 1.1 所示。这两个平行平面间的距离 h 称为板的厚度,平分板厚度的平面称为板的中面。一般而言,如果板的厚度 h 远小于中面的最小尺寸 b ($h \leq b/5$),则称此类板为薄板,反之则为厚板。

作用于板上的外载荷可以分解为下述两种分量:1)作用在板中面的载荷分量,这一分量对板的作用常按平面应力问题处理;2)垂直于板中面的载荷分量,这一分量引起薄板弯曲。

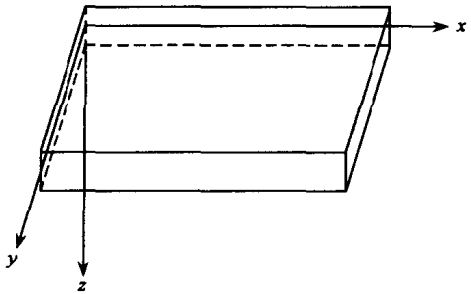


图 1.1 板的坐标

假定板的中面为 xy 平面, z 轴与板中面垂直,板的工程理论基于下述基本假设:

(1) 变形前垂直于中面的直线,在板变形后仍然垂直于变形后的中面,且其长度保持不变。这一假设通常称为 Kirchhoff 直法线假设。

(2) 薄板中面内各点都没有平行于中面的位移。这就是假定 $u_0 = v_0 = 0$,其中 u_0 及 v_0 分别表示板中面上任一点沿 x 轴和 y 轴方向的位移。

(3) 应力分量 σ_z 与应力 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 相比属于小量。

上述的 Kirchhoff 直法线假设是梁弯曲理论中平截面假设的发展。这一假设就相当于忽略了剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yx} 所引起的剪切变形。实际上薄板弯曲变形时,中面法线所产生的转角远大于剪切变形造成的法线的扭曲,因此在研究板的变形时可以将这种微小的影响略去。同时,这一假设还表明,可以略去板的横向应变 ϵ_x ,即认为薄板弯曲时沿板的厚度方向各点具有相同的挠度,也即都与中面的挠度相等。

虽然薄板弯曲时板的中面会发生变形,但当板的挠度远远小于其厚度时,可以近似认为中面内各点都没有平行于中面的位移分量。

根据第(3)个基本假设,在应力应变的物理关系中,可以将平行于中面各面上的正应力 σ_z 与其他正应力相比作为次要因素予以忽略。

根据 Kirchhoff 直法线假设,如果设 w 为板的挠度(即板沿 z 轴方向的位移),则有

$$w = w(x, y) \quad (1.1.1)$$

又根据假设 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$,利用弹性力学的几何方程可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

对上式进行积分有

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

根据第(2)个基本假设,即得到

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

由第(3)个基本假设,物理方程化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

式中: ϵ_x, ϵ_y 及 γ_{xy} 为应变分量; E 为杨氏模量; ν 是 Poisson 比, u, v 和 w 分别是沿 x, y 及 z 轴方向的位移。方程(1.1.5)也可以换写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu \epsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y + \nu \epsilon_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

应该特别指出的是, τ_{xz} 和 τ_{yz} 是平衡所必须的应力,不能根据 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 通过 Hooke 定律而等于零。

§ 1.2 弹性薄板的基本微分方程

在板的挠度很小的情况下,根据弹性理论中变形分量与位移的关系有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

结合方程(1.1.4)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\chi_x \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\chi_y \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z\chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

其中 χ_x 、 χ_y 和 χ_{xy} 分别表示板变形后中面的曲率和扭率。将上式代入方程(1.1.6) 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

从板内取出一个微小的平行六面体,此平行六面体三边的长度分别为 dx 、 dy 和 h ,如图 1.2 所示。

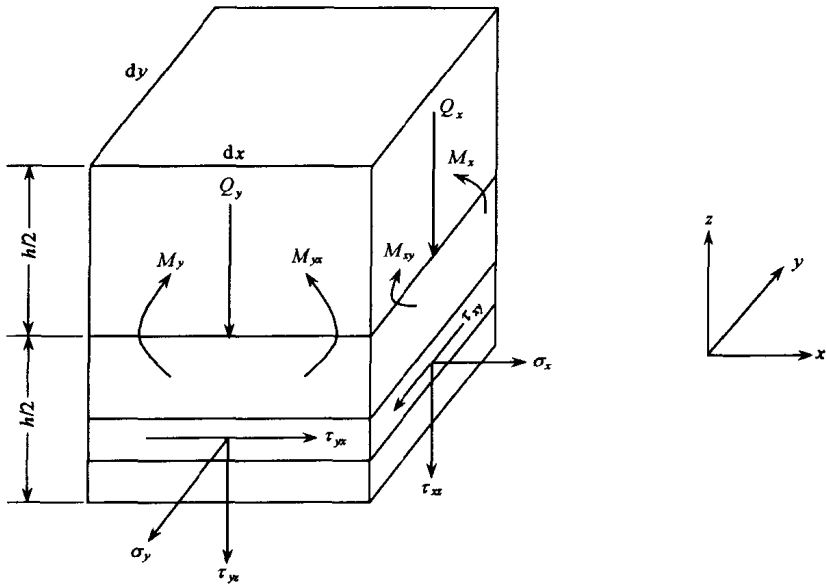


图 1.2 板单元

在垂直于 x 轴的横截面上,作用着应力 σ_x, τ_{xy} 和 τ_{xz} ,将上述应力向板的中面中心简化(同样在垂直于 y 轴的横截面上也作类似处理),并定义单位长度的内力矩为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,称为板的弯曲刚度。

根据弹性力学的平衡微分方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1.2.5)$$

结合方程(1.2.3)有

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (1.2.6)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

是平面 Laplace 算子。对上式进行积分

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y) \quad (1.2.7)$$

式中 $f(x, y)$ 为任意函数,利用条件 $\tau_{xz}|_{z=\pm h/2} = 0$ 可以确定此函数,由此不难得到

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (1.2.8)$$

与此类似,可以得到

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (1.2.9)$$

由上述两式不难看出,横向剪应力沿板厚呈抛物线分布。将上两式代入单位长度横向剪力的下述定义中:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

图 1.3 是板的一微元体,其平衡方程为

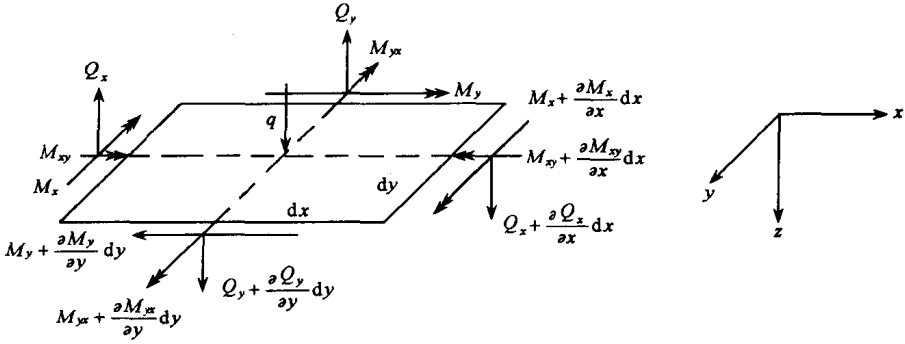


图 1.3 板的微元体

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

将上式中的前两式代入第三式,得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (1.2.12)$$

结合方程(1.2.4)有

$$D \nabla^2 \nabla^2 w \equiv D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q \quad (1.2.13)$$

这就是弹性薄板的基本微分方程。将方程(1.2.4)代入式(1.2.3),将式(1.2.10)和式(1.2.8)、(1.2.9)结合有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x z}{h^3} & \sigma_y &= \frac{12M_y z}{h^3} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{12M_{xy} z}{h^3} \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{h^3} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right] & \tau_{yz} &= \frac{6Q_y}{h^3} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.14)$$

结合边界条件利用方程(1.2.13)解出 w 后,由式(1.2.4)和(1.2.10)即可得到板的内力 M_x, M_y, M_{xy}, Q_x 和 Q_y ,再利用式(1.2.14)就可以得到相应的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 和 τ_{yz} 。

利用式(1.2.14)和(1.2.11),平衡方程化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{6}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \\ &= \frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

积分即有

$$\sigma_z = \frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) + f_1(x, y) \quad (1.2.16)$$

其中 $f_1(x, y)$ 是积分出现的任意函数, 利用 $\sigma_z|_{z=h/2} = 0$ 即可得到 $f_1(x, y) = -q/2$ 。因此有

$$\sigma_z = -2q \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{h} \right) \quad (1.2.17)$$

上式恰好满足在 $z = -h/2$ 处 $\sigma_z = -q$ 的条件。

§ 1.3 边界条件

板的计算问题归结为寻求一个这样的函数, 这个函数必须满足基本微分方程 (1.2.13)。此外, 在板的周边还应该满足某些静力条件或运动条件, 这就是所谓的边界条件。

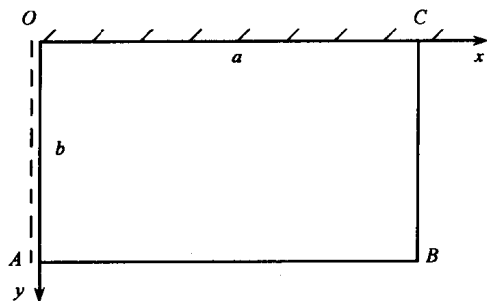


图 1.4 板的边界条件

如图 1.4 所示, 在 $x=0$ 的边缘为简支边; $y=0$ 边为固支边; $x=a$ 和 $y=b$ 两边为自由边。

当简支边界处没有外加弯矩时, 则有在 $x=0$ 处

$$w = M_x = 0 \quad (1.3.1)$$

注意到式 (1.2.4), 上述条件可以换写为在 $x=0$ 处

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3.2)$$

如果在简支边界处有外加弯矩 \bar{M} 作用时, 应将条件 $M_x = 0$ 代以 $M_x = \bar{M}$, 它可以写为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\bar{M}}{D} \quad (1.3.3)$$

对固支边 $y=0$, 其边界条件显然是在 $y=0$ 处

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.3.4)$$

对于自由边界, 例如 $y=b$, 如果该边上没有外载荷作用, 则应有在 $y=b$ 处

$$M_y = M_{yz} = Q_y = 0 \quad (1.3.5)$$

但是应该注意到微分方程 (1.2.13) 是一个四阶偏微分方程, 所以在每一边界上只需要两个条件, 显然方程 (1.3.5) 所要求的自由边的三个边界条件与微分方程的要求相互矛盾, 产生这一矛盾的原因是由于在建立薄板弯曲的近似理论时, 略去了剪切变形 γ_{xz} 、 γ_{yz} 对平板变形的影响。如果考虑这些影响, 薄板弯曲的基本微分方程将是 6 阶的偏微分方程组, 此时在每条边界上就需要 3 个边界条件。

在薄板弯曲的近似理论中,上述矛盾可以通过将式(1.3.5)中的后两个条件合并为一个而解决。

如图 1.5 所示,考虑任一边界(不一定是自由边界)上所受的扭矩 M_{yx} ,设在微段 CD 上作用有内力 $M_{yx}dx$,此内力可以近视地等价于在 C 处有一集中力 M_{yx} 且在 D 处有一反向集中力 M_{yx} 的共同作用。同理,微段 DE 内的内力分量 $\left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx\right) dx$ 可以近视地等价于在 D 处有一集中力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$,而在 E 处有一反向集中力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$ 。由此可见, D 处作用了由扭矩折算的横剪力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx - M_{yx} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$ 。这一横剪力的作用范围可以认为等于以 D 为中心长为 dx 的区间。因此单位长度的横剪力为 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。由于 D 为边界上任意一点,因此上述结论对边界上任意一点均成立。

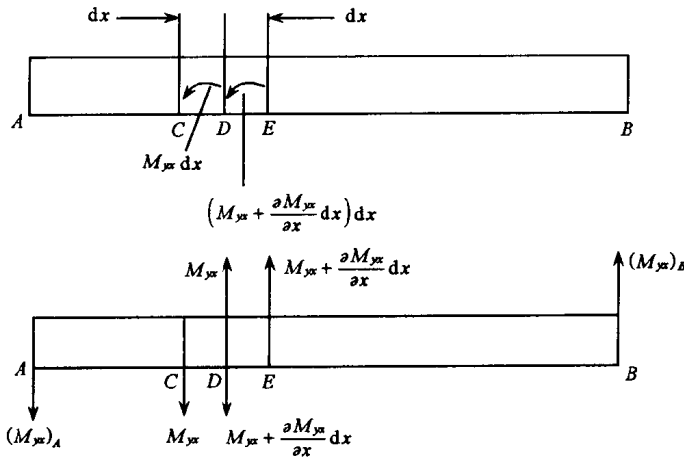


图 1.5 边界上的扭矩

因此,可以认为在边界上任意一点处作用有一折算剪力

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (1.3.6)$$

同时可以看到,此时在边界的两端有未被抵消的集中剪力 R

$$R_{AB} = (M_{yx})_A \quad R_{BA} = (M_{yx})_B \quad (1.3.7)$$

于是自由边上的边界条件可以表示为,在 $y=b$ 处

$$M_y = 0 \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (1.3.8)$$

上式中的后一边界条件表示总的分布剪力等于零,它将原有的两个边界条件合而为一。注意到式(1.2.4)和(1.2.10),式(1.3.8)可以改写为在 $y=b$ 处

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (1.3.9)$$

当然,如果在自由边界上的外载已经给定,则相应的边界条件不难给出。

在两条自由边的交点上,例如图 1.4 的 B 点处,有总的集中反力

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B \quad (1.3.10)$$

根据式(1.2.4),上式又可写为

$$R_B = -2D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B \quad (1.3.11)$$

因此,如果 B 点没有支承对板施加此集中力,板微分方程的解还需要满足角点条件,即在 $x=a, y=b$ 处

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.3.12)$$

如果在 B 点处有支座可以对薄板施加反力,则有下列角点条件,即在 $x=a, y=b$ 处

$$w = 0 \quad (1.3.13)$$

此时反力大小由式(1.3.11)给出。

§ 1.4 简单例题

薄板问题的求解就是寻求满足基本微分方程和相应边界条件的挠曲函数。本节通过几个简单的例子来展示薄板问题的求解过程。

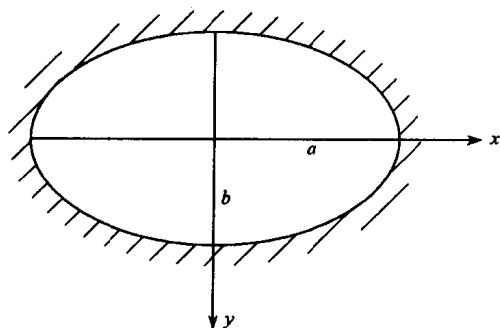


图 1.6 周边固支的椭圆板

例 1.1 均布载荷 q 作用下周边固支的椭圆板,如图 1.6 所示,其边界方程可以表示为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.4.1)$$

试取挠度函数的表达式为

$$w = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (1.4.2)$$

不难看出,上式已经满足了在边界

上挠度等于零的要求,同时不难验证在边界上有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{4mx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{4my}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.3)$$

考虑到