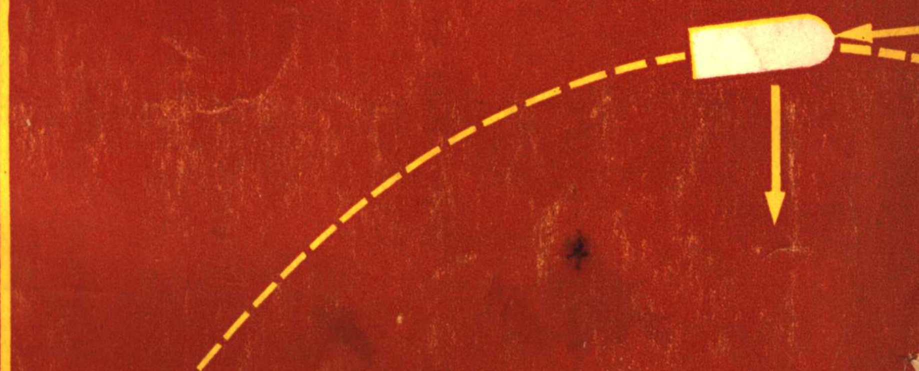
高等学校教学参考书

力学

下册

梁昆淼 编



人民教育出版社

内 容 提 要

本书是作者根据南京大学物理系1959年以来的授课讲义编写而成的。它对现行讲授体系作了一些改革试验，试行解决"普通物理学力学部分"和"理论力学"两门课程部分内容的重复问题。上册内容主要是质点力学、质点组力学、刚体力学和振动与波等。下册内容包括：上册复习提要，刚体的定点运动，达朗伯原理，拉格朗日动力学，哈密顿动力学，力学变分原理，正则变换，弹性体，流体运动学，流体动力学，并附有习题。

本书的特点是注意通过图象及数学运算使学生掌握物理概念；通过理论分析及例题示范，训练学生的思考方法与运算能力。下册对分析力学及连续介质力学的一些重点与难点，作了不少深入浅出、联系实际的阐述，并注意了加强与其他理论课程的联系。

本书可作为综合大学，高等师范院校物理系及其他高等学校相近专业的教学参考书，也可供中学教师进修时参考。

本书责任编辑：邹延肃。

高等学校教学参考书

力 学

下 册

梁昆淼 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

长春新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 257,000

1980年11月第1版 1981年6月第1次印刷

印数 00,001—17,500

书号 13012·0539 定价 0.94 元

序　　言

本书上册大致对应于综合大学物理系普通物理学力学部分，但对质点、质点组、刚体（除定点运动外）的处理，与普通物理力学相比，要深入详尽一些．下册大致对应于综合大学物理系的理论力学课程．它以“上册复习提要”作为开始，然后讲述刚体定点运动、分析力学和连续介质力学三部分．“上册复习提要”对于读过上册以后间断了不少时间才读下册的读者来说是一种复习，对于那些单独阅读下册的读者，也可以使学习过程比较顺利地开始．

总的说来，本书是一次探索（见上册序言）的记录，欢迎同志们提出意见。

梁昆淼　1980年10月

目　录

第三编 连续介质力学

§0. 上册复习提要

(1) 关于方法论

本书上册在方法论方面提出了以下注意点:

1. 区分主要因素与次要因素 任一物理现象总要牵涉到众多因素. 我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分, 否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究. 针对某一特定问题所涉及的实际对象, 应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质, 必要时最多再考虑某些起次要作用的性质, 坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素, 这样就把实际对象抽象为模型. 例如, "质点"和"刚体"都是力学中常用的模型.

2. 掌握与运用变量与常量之间的辩证关系 初等物理学一般只考虑常量, 例如匀速、匀加速、常力. 但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力. 因此, 首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间→0. 具体说, 就是用微分和积分处理变量. 例如, 对于 x 轴上的直线运动,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x},\quad a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\dot{v};$$

$$x=x_0+\lim_{\Delta\tau\to 0}\Sigma v(\tau)d\tau=x_0+\int^t v(\tau)d\tau,$$

$$v=v_0+\lim_{\Delta t\to 0}\Sigma a(\tau)d\tau=v_0+\int^t a(\tau)d\tau.$$

3. 建立"代数式"思考方法 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简, 但性质上都是比较单纯的. 人们往往可以从已知数直接算出某个未知数, 接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数, 如此等等, 即沿着一条"链"推算下去. 但是, 在客观

世界的绝大多数现象中，各种物理量之间往往交织为错综复杂的“网”，“链”式推算法难以奏效. 因此，应当通过具体分析，把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为“代数”方程，例如动力学中的运动方程. 当然，这些方程很可能是微分方程，并不真的是代数方程.

(2) 质点运动学基础

为描述物体的机械运动，首先要选定**参考系统**作为标准物体，运动就是相对于参考系统来描写的.

在参考系统上选定一点作为**原点**. 质点的位置可用从原点到质点的**矢径** $\boldsymbol{r}$ 表示，质点的运动则由矢径随时间 t 的变化 $\boldsymbol{r}(t)$ 描述.

在一段时间 $\Delta t=t_2-t_1$ 上，质点矢径的改变 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 叫做质点的**位移**. 矢径对时间的平均变化率 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ 叫做这段时间内的平均速度. 令 $\Delta t\to 0$，平均速度 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ 的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}}$$

叫做质点在该时刻的（**即时**）**速度** $\boldsymbol{v}(t)$. 速度是矢量，它的大小 $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta\boldsymbol{r}|/\Delta t=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t=ds/dt$ 即速率 v，它的指向就是 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限指向即轨道的切向，以 $\boldsymbol{t}$ 为切向单位矢量，则 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{t}$.

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的时间变化率 $d\boldsymbol{v}/dt$ 即 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ 叫做质点的（**即时**）**加速度** $\boldsymbol{a}(t)$. 作为速度的变化率，既要考虑速度大小的变化，也要考虑速度指向的变化. 即

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{t})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\theta}\boldsymbol{n}.$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是法向单位矢量，指向轨道凹侧. 这样，切向加速度是 $\dot{v}$ 即 $\ddot{s}$，法向加速度是 $v\dot{\theta}$. $v\dot{\theta}$ 还可改写为

$$v\dot{\theta}=v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}=v^2\frac{d\theta}{ds}=\frac{v^2}{R}.$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨，而在具体问题的计算中却以使用**坐标系**较为简便.

古典力学认为空间是欧几里德的，即平直而无弯曲的. 在欧几里德空间中可以建立**直角坐标系**，而任一矢量$\boldsymbol{A}$可用直角坐标分量表示为$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$, 其中

$$\begin{cases}A_x=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}=A\cos\alpha,\\ A_y=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}=A\cos\beta,\\ A_z=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}=A\cos\gamma,\end{cases}\qquad \begin{cases}A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2},\\ \cos\alpha=A_x/A,\\ \cos\beta=A_y/A,\\ \cos\gamma=A_z/A.\end{cases}$$

这样, 在直角坐标系中,

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}.$$

对于平面问题，还可以建立**平面极坐标系**. 任一矢量$\boldsymbol{A}$可用径向分量A_ρ与横向分量A_φ表示为$\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{i}+A_\varphi\boldsymbol{j}$，其中$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$分别是径向和横向单位矢量. 注意$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$的指向随地点而异. 这样,

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d}{dt}(\rho\boldsymbol{i})=\dot{\rho}\boldsymbol{i}+\rho\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\dot{\rho}\boldsymbol{i}+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}&=\frac{d}{dt}(v_\rho\boldsymbol{i}+v_\varphi\boldsymbol{j})=\dot{v}_\rho\boldsymbol{i}+v_\rho\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\dot{v}_\varphi\boldsymbol{j}+v_\varphi\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\\&=\dot{v}_\rho\boldsymbol{i}+v_\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{j}+\dot{v}_\varphi\boldsymbol{j}+v_\varphi(-\dot{\varphi}\boldsymbol{i})=(\dot{v}_\rho-v_\varphi\dot{\varphi})\boldsymbol{i}+(\dot{v}_\varphi+v_\rho\dot{\varphi})\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

注意，径向加速度$\dot{v}_\rho-v_\varphi\dot{\varphi}$不仅来自径向速度的大小变化(即$\dot{v}_\rho$)，而且也来自横向速度的方向变化(即$-v_\varphi\dot{\varphi}$)；横向加速度不仅来自横向速度的大小变化(即$\dot{v}_\varphi$)，而且也来自径向速度的方向变化(即

$v_\rho\dot{\varphi}$). 以 $v_\rho=\dot{\rho}, v_\varphi=\rho\dot{\varphi}$ 代入 $\boldsymbol{a}$ 的式子，即得

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i}+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{j}.$$

在轨道给定的情况下，常用**自然"坐标系"**，就是说用切向和法向分量表示矢量，例如 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\theta}\boldsymbol{n}=\dot{v}\boldsymbol{t}+(v^2/R)\boldsymbol{n}.$

(3) 质点动力学基本定律

质点动力学问题可用一句话来概括：通过具体分析而"代数式"地写出牛顿运动定律在具体问题中的表示式——运动方程. **中心问题**在于写出运动方程. 通常运动方程是在适当的坐标系中用分量形式写出. 一旦写出运动方程，问题就转化为数学问题. 正确写出运动方程的**关键**在于具体分析，为具体分析创造条件还需要隔离物体. 归纳为十六字诀：**隔离物体，具体分析，选定坐标，运动方程.**

具体分析包括受力情况与运动情况的分析，在运动情况中特别着重加速度.

不应只取特定时刻或将物体只取在特定位置来分析，因为物体在特定时刻或特定位置的受力情况或其加速度，并不足以确定物体的全盘运动情况. [参阅上册 § 19 例7.]

每说到一个力，应明确指出是哪一物体对哪一物体的作用，以防止误列入一些并不存在的力 [参阅上册 § 19 例 4]，或把作用于甲物体的力误认为作用于乙物体[参阅上册关于图 31 的讨论].

考虑某一物体受哪些力作用，要注意它与哪些物体接触，以防止遗漏某些力.

力学中常遇到的力有万有引力、弹性力和摩擦力.

弹性力取决于物体的形变程度，后者又往往与物体的运动情况有关. 例如悬挂物体的绳或弹簧中的张力不一定等于所悬物体的重量，张力大小视物体运动情况而定.

弹簧中张力可表为 $F=-kx$，原点 $x=0$ 必须对应于弹簧既不

伸长也不压缩的情况.

静摩擦力的指向与接触处的相对滑动趋势相反. 例如汽车启动时,主动轮与地面接触处的滑动趋势是向后的,所以主动轮所受静摩擦力向前,这正是推动汽车加速的牵引力!

静摩擦力的大小一般应作为未知数从运动方程解出. 但静摩擦力的大小不可能超过静摩擦系数与正压力的乘积.

滑动摩擦力的指向与接触处的滑动方向相反, 大小则等于滑动摩擦系数与正压力的乘积.

在约束运动中还有约束反力, 它所体现的约束作用表现为实体的弹性力. 约束反力一般应作为未知数从运动方程解出. 有时,约束是单侧的,它允许质点在某种情况下从另一侧自由地脱离. 如果解算出来的约束反力指向错误的一侧, 这就意味着脱离了约束.

求解约束运动常用自然“坐标系”. 对于光滑约束,通常先解切向运动方程 $m\ddot{s}=F_t$,解这方程的方法是改写 $\ddot{s}$ 为 $\dot{s}d\dot{s}/ds$, 这是以 s 为自变数的一阶导数,方程中出现的 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$(θ 是切向与 x 轴的夹角)也改写为 $\cos\theta=dx/ds$, $\sin\theta=dy/ds$, 统一用 s 为自变数然后积分. 切向运动方程的第一次积分往往就是机械能守恒. 解出切向方程后就可从法向方程解出约束反力. [参阅上册 § 14 例和 § 24 例 2.]对于粗糙约束, 可从切向方程和法向方程消去约束反力, 再改写 $\ddot{s}=\dot{s}d\dot{s}/ds$, 化方程为一阶微分方程, 由此解出运动情况, 然后即可用切向或法向方程计算约束反力. [参看上册习题 7.5 和 7.6.]

(4) 非惯性参考系统

质点相对于“静止”参考系统的“绝对”速度 $\boldsymbol{v}$ 同它相对于运动参考系统的相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 之间的关系是

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

式中 $\boldsymbol{v}_0$ 是运动参考系统的原点的速度, $\boldsymbol{\omega}$ 是参考系统相对于原点转动的角速度. $\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 叫作牵连速度.

"绝对"加速度 $\boldsymbol{a}$ 与相对加速度 $\boldsymbol{a}'$ 之间的关系是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'.$$

上式右边第二、三、四项是牵连加速度, 其中 $\boldsymbol{a}_0$ 是运动参考系统的原点的加速度, $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$是质点随参考系统转动的**向心加速度**. $2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ 则叫作**柯里奥利加速度**.

由牛顿运动定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 知

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}'+m\boldsymbol{a}_0+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}',$$

即

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}',$$

其中 $\boldsymbol{F}'$ 是**惯性力**,

$$\boldsymbol{F}'=-m\boldsymbol{a}_0-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'.$$

上式右边的$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$是**惯性离心力**, $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ 是**柯里奥利力**.

(5) 质点动力学运动定理

从牛顿运动定律可以作出一些带有普遍意义的推论即所谓**运动定理**. 某些问题可以跳过运动定律直接从运动定理出发而简捷地得到解决.

$\boldsymbol{K}=m\boldsymbol{v}$ 叫作质点的动量. 微分与积分形式的**动量定理**是

$$\boldsymbol{F}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}, \qquad \int\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{K}_2-\boldsymbol{K}_1,$$

其中$\int\boldsymbol{F}dt$ 称为力$\boldsymbol{F}$的冲量. 积分形式的动量定理特别适合研究冲击作用. 在冲击作用下, 质点速度改变 $\left(\int\boldsymbol{F}dt\right)\Big/m$.

如 $\boldsymbol{F}=0$, 动量定理成为**动量守恒原理** $d\boldsymbol{K}/dt=0$, $\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}_1$. 如

$\boldsymbol{F}\neq 0$, 但 $F_x=0$, 则$\boldsymbol{K}$不守恒, 但 K_x守恒.

取某一轴线，称之为 z 轴. 微分与积分形式的**动量矩定理**是

$$M_z=\frac{d}{dt}J_z, \qquad \int M_z dt=J_z|_{t_2}-J_z|_{t_1}.$$

式中力矩 M_z 和动量矩 J_z 按定义分别是

$$M_z=xF_y-yF_x, \quad J_z=xK_y-yK_x=mx\dot{y}-m\dot{x}y;$$

如果在 xy平面中改用极坐标, 则

$$M_z=\rho F_\varphi, \quad J_z=\rho K_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}.$$

如 $M_z=0$ 则**动量矩 J_z 守恒**.

对于点O的力矩 $\boldsymbol{M}$ 和动量矩 $\boldsymbol{J}$ 可以分别定义为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{K}$, 这里 $\boldsymbol{r}$ 是从点O算起的. 它们在某一轴线上的投影恰好是对于该轴线的力矩和动量矩. 微分与积分形式的**动量矩定理**是

$$\boldsymbol{M}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{J}, \qquad \int \boldsymbol{M}dt=\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1.$$

如力矩 $\boldsymbol{M}=0$, 则**动量矩 $\boldsymbol{J}$ 守恒**.

$T=\frac{1}{2}mv^2$ 叫作质点的动能. 质点的**动能定理**是

$$W=T_2-T_1,$$

式中W是作用于质点的合力$\boldsymbol{F}$所作的功$\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$.

满足条件 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$(或记作 curl$\boldsymbol{F}=0$ 或 rot$\boldsymbol{F}=0$)的力所作的功, 只取决于起点和终点而与路径无关, 这种力叫作**势力**(**或保守力**). 对于势力, 可引入**势能** $V(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}+V_0$而用势能的减少$-(V_2-V_1)$表示力所作的功$W$. 势能可以加减任意的常数. 当质点高度变动不大时, 重力势能为 mgh; 当质点与地心的距离 ρ 变动较大时, 重力势能为$-mgR^2/\rho$. 弹簧系统的弹性势能为 $kx^2/2$, 这里 $x=0$ 处必须对应于弹簧既不伸长也不压缩.

如果对质点作功的力全是势力, 动能定理成为**机械能守恒原**

理 $T_2+V_2=T_1+V_1$.

一般说来，对质点作的功W可以表示为两部分：一部分 W_c 用势能的减少来表示，其余部分 W_d 不能用(或虽能用而未用)势能的减少来表示，这时动能定理就成为**功能原理**$(T_2+V_2)-(T_1+V_1)=W_d$.

功完成的快慢称为**功率**. 功率可表为$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$.

在转动情况下，功往往可用力矩表出为$\int Md\varphi$，功率也用力矩表出为 $M\omega$.

(6) 质点组动力学

两质点彼此相互作用，但不受外力作用，这叫作**两体问题**. 两体问题可归结为质点动力学. 其实，即使两质点受外力作用，只要外力方向一致且正比于各自的质量，也可归结为质点动力学. 这是因为，一方面有质心运动定理

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0=\boldsymbol{F}^{(外)},$$

式中质心的质量 m_0 为两质点的质量之和 m_1+m_2，质心的矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 为两质点矢径的带权平均$(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2)/(m_1+m_2)$；另一方面有相对运动的运动方程

$$m'\ddot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{F},$$

式中折合质量 $m'=m_1m_2/(m_1+m_2)$，$\boldsymbol{r}'$ 是相对矢径，$\boldsymbol{F}$ 是相互作用力.

除两体问题以外，质点组动力学问题的运动微分方程的解算在数学上困难很大. 因此，通过运动定理了解质点组运动的总趋向及其某些特征，具有很重要的意义.

质点组的动量、动量矩、动能指的是各质点的动量、动量矩、动能的总和，

$$\boldsymbol{K}=\sum_i\boldsymbol{K}_i,\qquad \boldsymbol{J}=\sum_i\boldsymbol{J}_i,\qquad T=\sum_i T_i.$$

这些物理量还可以用质心的相应物理量表示出来. **质心**是一个设想的质点，其质量 m_0 定义为各质点的质量之和，其矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 定义为各质点的矢径之带权平均，

$$m_0=\sum_i m_i, \quad \boldsymbol{r}_0=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i/m_0.$$

质点组的动量 $\boldsymbol{K}$、动量矩 $\boldsymbol{J}$、动能 T 可以用质心的动量 $\boldsymbol{K}_0$、动量矩 $\boldsymbol{J}_0$、动能 T_0 表为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0, \quad \boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0+\boldsymbol{J}', \quad T=T_0+T',$$

其中 $\boldsymbol{J}'$ 和 T' 分别是质点组相对于质心的动量矩和动能. $T=T^0+T'$ 又叫作 **柯尼希定理**.

质点组的**动量定理**、**动量矩定理**、**动能定理**是

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(外)}, \quad 即 \quad m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(外)},$$

$$\frac{d}{dt}J_z=\sum_i M_{iz}^{(外)}, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{J}=\sum_i \boldsymbol{M}_i^{(外)},$$

$$T_2-T_1=W^{(外)}+W^{(内)}.$$

动量定理也就是质心运动定理. 由于牛顿第三定律，动量定理和动量矩定理不考虑内力. 但内力的功不必为零，所以在动能定理中仍要考虑内力. 不过，如果这质点组是刚体，则内力的功为零，这时动能定理可不考虑内力.

如果采用**非惯性参考系统**，这些运动定理仍然成立，但必须计及惯性力. 如非惯性参考系统是随质心平动的**质心参考系统**，则惯性力系的力矩为零，惯性力系所作功也为零.

相应的**守恒原理**是

$$\boldsymbol{K}\ 守恒（如\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(外)}=0）, \quad K_x\ 守恒（如\sum_i F_{ix}^{(外)}=0）,$$

$$J_z 守恒（如\sum_i M_{iz}^{(外)}=0）, \quad \boldsymbol{J}\ 守恒（如\sum_i \boldsymbol{M}_i^{(外)}=0）,$$

$$T+V\ 守恒（如外力和内力全是势力）.$$

(7) 刚 体 力 学

自由的刚体有三个平动自由度（确定基点位置需要三个独立变数），还有三个转动自由度（确定刚体相对于基点的取向又需要三个独立变数）. 刚体相对于基点的转动情况可用角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表明. 不管选哪一点作基点，$\boldsymbol{\omega}$ 都是一样的.

如果基点的速度和加速度是 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{a}_0$，则刚体内矢径为 $\boldsymbol{r}_i$ 的点的速度和加速度是

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i,\quad \boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}.$$

施加于刚体的力是滑移矢量，所以施于刚体的力系不一定能够归结为单个的力. 一般地说，施于刚体的力系可归结为作用在任选的简化中心的单个力 $\boldsymbol{S}$ 以及一个力偶. 力 $\boldsymbol{S}$ 等于力系中所有各力的**矢量和**（但不能称为力系的合力），它跟简化中心的选取无关. 力偶则与简化中心的选取有关，它的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于力系对于简化中心的力矩.

质心运动定理

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0=\boldsymbol{S},$$

动量矩定理 $\boldsymbol{M}=\dot{\boldsymbol{J}}$，即

$$M_x=\dot{J}_x,\quad M_y=\dot{J}_y,\quad M_z=\dot{J}_z,$$

共计可有六个方程，正好可以决定刚体六个自由度的运动. 这六个方程不妨称为刚体的**运动方程**. 在动量矩定理中，计算动量矩的基点和计算力矩的简化中心应是同一点. 这一点可以是固定点，也可以是动点. 但如是动点，则 $\boldsymbol{M}$ 必须包括惯性力系的力矩. 不过，如果这动点是刚体的质心，则惯性力系的力矩为零.

除了质心运动定理和动量矩定理以外，动能定理

$$T_2-T_1=W^{(外)}$$

常有助于简捷地解决问题. 注意这里不考虑内力的功，因为刚体