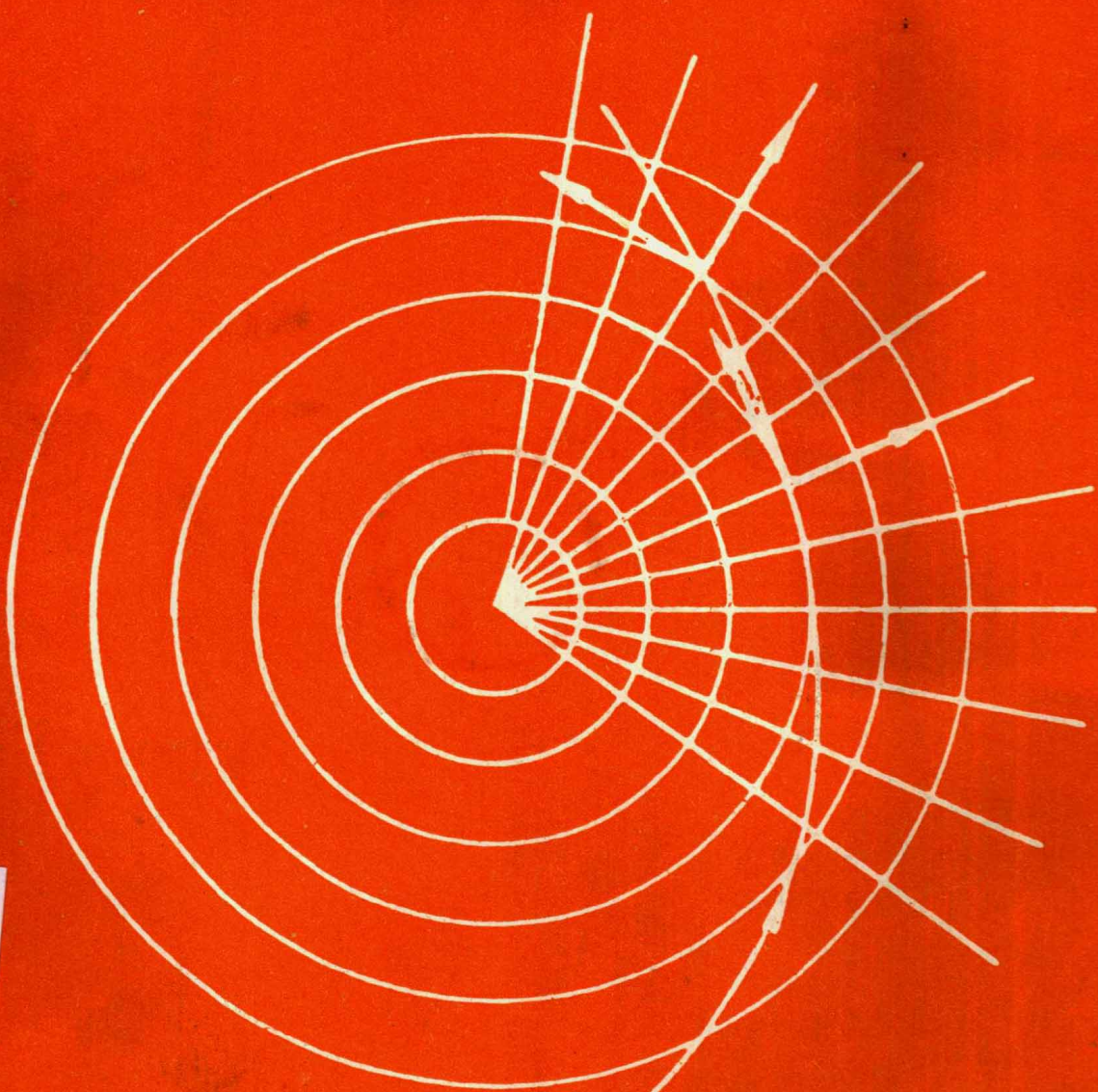


● 全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会 建议试用教材

● 理论力学

自学指导书

● 管靖 胡静 卢圣治 编著



电子工业出版社



理论力学自学指导书

管 靖 胡 静 卢圣治 编著

电子工业出版社

内容简介

本书是配合自学丛书《理论力学》为高等教育自学考试是自学者而编的。书中每章有“基本理论与重点难点”，指导读者深入学习基本概念和基本方法；每章有“解题指导与例题”，起到了全日制教学中的“答疑”和“习题课”的作用。本书具有相对独立性，便于读者使用其他教材时也可用本指导书。

理论力学自学指导书

管 靖 胡 静 卢圣治 编著

责任编辑 宋玉升

电子工业出版社出版(北京市万寿路)

电子工业出版社总发行 各地新华书店经售

山东电子工业印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:16.25 字数:350 千字

1991 年 1 月第一版 1991 年 1 月第 1 次印刷

印数:4000 册 定价:6.50 元

书号:ISBN7-5053-0353-8/O·13

《理论物理自学丛书》编委会

主编 喀兴林 章立源 蔡伯濂

编委 卢圣治 宋玉升 吴哲 郑锡珪
胡静 钱平凯 钱伯初 徐世良
梁昆森 彭宏安 惠和兴 管靖
(按姓氏笔划为序)

学术秘书 惠和兴

自学高考物理专业委员会

致 读 者

高等教育自学考试物理专业本科阶段设有理论力学、热力学与统计物理学、电动力学、量子力学以及数学物理方法等课程。这些课程理论要求较高，全日制高校的学生学习起来，也是不轻松的。对这些课程，国内已先后出版了许多很好的教科书，但这些教科书都是与系统讲授并辅之以其他辅助教学环节这种教学方式相适应的，对自学不尽合用。自学高考的考生及有志于提高自己物理素养的各方面读者，切望有一套与现有教材相比有不同特点的、比较适合于自学的理论物理自学教材供他们使用。值得高兴的是，许多高校有经验的教师、专家和出版社都热情支持理论物理自学教材的出版工作。课程的自学考试大纲只规定了每门课程的自学和考试的要求，不同的作者根据大纲编写的教材，还能反映作者对课程内容的理解和体会，还有自己的讲述方式和自己的特色。我们认为，发动社会力量编写和出版符合大纲要求的，不同风格的理论物理自学教材供读者选用，无疑是有益的。电子工业出版社组织的这套《理论物理自学丛书》将是最早出版的一套，《丛书》的内容符合自学考试大纲的要求，并力求适应自学的特点。

物理专业委员会将这套《理论物理自学丛书》作为自学考试“建议试用”教材之一，愿这套自学丛书对自学考试、成人教育，对工程技术人员和全日制高校的教师和学生都有裨益。

全国高等教育自学考试指
导委员会物理专业委员会
一九八八年四月

前 言

当前,在全国范围内,学习先进自然科学和先进技术科学的热潮正在高涨。这套《理论物理自学丛书》就是为适应广大读者自学的需要而编写的。

理论物理学不仅是物理学的精华,也是很从自然科学如化学、生物学、天文学和地质学等的理论基础。同时理论物理学又是现代许多技术科学如电子学、材料科学、半导体技术和激光技术等的基础。为了学习物理学本身,为了学习有关的自然科学和技术科学,都必须首先掌握一定数量的理论物理学的知识。我们充分认识到目前理论物理学的重要地位,所以我们首先给各界读者提供这套《理论物理自学丛书》。

《理论物理自学丛书》主要是为各界自学读者编写的。它的读者对象有三个方面:第一是需要知识更新的实验物理学工作者和广大物理教师,第二是为了掌握本门学科的现代知识而要求学习理论物理的生物学、化学工作者和技术科学工作者,第三是有志于自学成才的广大青年。这套丛书的取材内容大体上相当于综合性大学物理专业的理论物理课程,包括了全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会颁布的理论物理课程考试大纲的全部内容。《丛书》的编写方法则尽量适应自学的特点。因此我们想,这样一套《丛书》对广大在校学生也可能有所裨益。

《理论物理自学丛书》一共十本,包括理论物理中的四门课程即“理论力学”,“热力学与统计物理学”,“电动力学”和“量子力学”,以及一门数学课程“数学物理方法”,每门课程有一本课本和一本自学指导书。

每门课程的课本是一本完整的和系统的教材。它的内容大体上与综合性大学或师范院校的相应课程内容相同,属于理科教材的性质。我们说适应其他自然科学和技术科学的需要,主要是向这些方面的读者提供他们所需要的理论物理的基础知识,并不涉及这些学科本身的内容。为适应自学的特点,我们力求把课本写得活泼一些,如概念的讲解比较细致周到,对重点和难点部分给予更多的注意,对学习方法加以一定的引导,附有一定数量的例题和习题,有些重要的预备知识以附录的形式给出等等。我们希望在课本中适当地写进一些通常教材中不写而在课堂上要讲的内容。

自学指导书则对于课本的自学给予更为具体的指导。如果说课本中应该突出学科的主线。不宜用过多的题外话去打断主要思路的发展的话,那么自学指导书就不受这个限制。在自学指导书中可以对重点和难点内容给以更多的讲解,对自学方法给以更多的指导,可以用思考题等形式讨论一些疑难问题,可以给出更多的例题和习题,对解题的方法和思路给以更多的指导和训练,出可以给出一些学习中需要的补充材料等等。此外我们还希望自学指导书能适当地具有一定的相对独立性,使利用其他教材作为自学课本的读者,也能从这套自学指导书中得到一定的收获。

学习理论物理学的起点本来应该是学过大学本科物理专业的高等数学和普通物理课程(即力学,分子物理和热学,电磁学,光学和原子物理学)。为适应自学读者的情况,我们把这套《理论物理自学丛书》的起点略为放低一些。我们希望学过工科的高等数学(例如樊映川的书)和工科的普通物理(例如程守洙和江之永的书)的读者也能开始自学这套丛

书。为此我们在课本和自学指导书的编写上都作了一些安排，以便使更多的读者能够通过自学掌握理论物理的内容。当然，这也要求读者付出更大的努力和作出一些适当的安排（例如承认某些预备知识中的结论和公式，对课本中的一些内容降低一点要求等等）。

我国实行高等教育自学考试制度，全国高等教育自学考试委员会物理专业委员会已于1984年正式成立，物理专业的考试已经开始，特别是已对具有专科学历的读者已开始本科证书的考试（本丛书中的五门课是这一考试的主要内容）。我们希望自学这套《丛书》的读者踊跃参加单科或系统的考试，取得合格证书。也希望那些具有专科学历的读者和已取得专科合格证书的读者再接再厉，接着自学这套丛书，争取取得本科毕业的资格。

祝大家自学成功！

喀兴林

1988年1月

序 言

本书是配合理论物理自学丛书《理论力学》(以下简称为教材),为自学者而编写的。和“教材”相比较,这里则更加突出理论力学的基本概念,基本理论和基本方法,在基本内容上展开更充分的讨论,在解题方法上给读者以更多的指导。

我们在编写本书的过程中,认为多数读者都已学习过物理类的普通物理力学;同时为了照顾只学过工科普通物理的读者,亦安排了一些较浅的,过渡性的内容。我们希望这本指导书尽可能地适应不同情况的自学者的需要。

书中着重指出理论力学基本内容的重点和难点,并通过思考题对它们进行讨论;我们希望这些内容可以解答读者阅读“教材”后产生的若干疑问,引导读者把握住理论力学的基本内容,深入地进行学习;起到全日制教学中“答疑”“质疑”的作用。在每一章中,都写有“解题指导与例题”一段,与“教材”中的例题配合,希望能提高读者的解题能力,起到“习题课”的作用。每一章的最后,我们对“教材”中绝大多数必作习题作出了解答或提示,当然这起不到教师批改作业的作用,但希望对解算这些习题有困难的读者能有所帮助。

这本书是参照全日制学生在学习理论力学时容易产生问题,考虑到自学的特点而编写的。由于我们对自学者情况了解不多,对自学者产生哪些问题缺乏经验,所以本书是否适合于自学读者的需要,还有待于读者提出宝贵的意见和建议,以便使我们可以条件许可时为自学者作些更有益的工作。

本书每一章的“基本理论与重点难点”一段中,均对这一章的基本内容作了总结性的简单叙述。这一方面是为帮助读者对全章内容作一总结;另一方面亦是为了使本书具有相对的独立性,以便使用其它理论力学教材的读者可以方便地使用这本指导书。

这本指导书反映了北京师范大学从事理论力学教学工作的各位教师多年积累的教学经验,若能同时对在全日制院校中学习的同学有所帮助,对讲授理论力学课程的教师有一定参考价值,我们将感到十分高兴。

本书经北京师范大学喀兴林教授和北京大学蔡伯濂副教授审阅,北京师范大学汪家华副教授给予支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

作者 1986年2月 北京师范大学

对于使用本书的一些建议

在这里向读者说明应如何使用这本指导书，同时也希望读者阅读这部分内容后，在学习方法上得到一些启示。

在本书的每一章开始的“综述”一段中，指出这一章的内容在理论力学中的地位、和普通物理力学的联系与区别，并提出学习这一章的基本要求。希望读者阅读这些内容后，能把握住理论力学的基本内容，有重点地、前后联系地、深入地进行学习。这里应向读者指出，“教材”已考虑到自学者的特点，内容也是精选过的，所以“教材”中的各个部分都有它的价值和重要性；但它作为一本教材，要照顾到理论的完整性并为有余力的读者安排适当的、提高性的内容，因此必然有些内容超出基本要求之外。读者可参照本书提出的基本要求，根据自己的情况对各部分内容的学习作出适当的安排。对于初学理论力学的读者，特别是那些在学习中感到有些困难的读者，我们建议还是把主要精力放在最基本的内容上。

在每章的“基本理论与重点难点”一段中，包括了对基本内容的小结。在阅读这些内容之前，希望读者对“教材”中的相应内容作一总结，然后再对照阅读，这有益于读者提高自学的能力。对于基本内容，本书主要通过思考题展开讨论，采用这种方式是出于以下考虑：“教材”中对基本内容多已有详细的论述，若本书再从正面进行讨论则显得重复且不易收到良好的效果；我们选用现在使用的方式，是希望读者在对思考题的独立思考中，在纠正自己的错误的过程中加深对基本内容的理解；同时也能逐步培养读者在阅读基本教材后，自己能够提出问题、再思考并回答这些问题，从而进行深入学习的能力。为达到上述目的，在这里我们对读者提出一个要求：当读者看到思考题后，请用一张白纸把答案遮住；由读者自己独立地思考并回答这个问题，若能将其要点写在纸上则更好；然后再与答案对照；如果读者发现了自己的错误，应分析发生错误的原因，重新钻研教材的相应内容，直到完全弄懂为止。直接阅读思考题答案的作法，对读者是无益的。

在本书各章内“解题指导与例题”一段中，通过对例题的示范求解和讨论，我们向读者指出了必须掌握的基本解题方法，并对这些方法进行了总结。虽然独立求解这些例题对初学者说来可能有些困难，但我们仍希望读者在阅读题解之前能独立地对求解这些例题作些试探，然后再对照着阅读题解，这样有利于发现自己存在的问题，以获得较大的收益。在阅读例题的同时，读者应注意以下两点：一是要注意解题的基本思路、方法和技巧；二是要注意解题的程序和步骤。在阅读过这部分内容之后，则应完成全部应作的习题。对初学者来说应完成“教材”中的全部必作题。对这些习题，读者应认真地按照步骤要求，力争独立完成。本书中对这些必作题大都作出了解答或提示，读者在完成习题之后，可以和题解作一对照，看是否存在问题或比较不同方法的优劣。读者在解算习题遇到困难，反复思考并无法解决时，为不至浪费过多的时间，也可以看一下本书中的提示；这时读者最好仍不看全部提示，而是只看其中几步，一旦得到启示即争取独立完成其余部分。在作习题时也应注意总结经验，这样经过不断的努力和积累，解题能力必将逐步提高。读者应特别注意的是绝不能用阅读题解代替作习题，阅读题解虽可以学会部分习题的解法，但对加深基本内容的理解和提高解题能力是不利的。

在本书的第四、十、十四章之后，为读者准备了三份自我检查试卷，供读者检查自学效果使用。和通常一样，60分及格，80分就可以算是好的成绩了。

在学习理论力学的过程中，正确处理好钻研理论与解算习题的关系是很重要的。我们认为二者相辅相成，均不可偏废。从一方面讲，作习题有利于读者加深对理论的理解、巩固知识和提高能力，也是将掌握的理论应用于实际的基本训练，因此作习题是学习理论力学不可缺少的重要环节。对哪些由于知识更新的需要而自学理论物理，并不准备参加考试的读者，应特别注意这一点；只学理论而不作习题，会使学过的理论似懂非懂，收不到良好的效果。从提高能力的角度看，有余力的读者在认真钻研理论后，多作些习题还是有益的。从另一方面讲，认真学习并掌握基本理论，是应用它们解决实际问题的前提，也是正确解题、提高解题能力的必要条件，必须给予足够的重视。同时读者应看到，我们说“学习理论的目的在于实践”，但不等于“学习理论的目的就是作习题”，作习题是学习的手段而不是其最终目的；而且在物理专业中，理论力学作为一门专业基础课，其主要目的在于使读者掌握力学基本知识、提高能力并为后续课程作准备，清晰、准确、牢固地掌握理论力学的基本理论，是学习其它理论物理课程所必需的，有着它独特的意义。希望准备参加理论力学考试的读者，不要认为“考试就是作题，作题就是一切”而忽视对基本理论的钻研。

我们希望读者在作习题时，一定要注意作题的“质量”，就是说一定要认真、独立地做完习题，并不断地总结经验，而不要勉强地追求作题的数量。本指导书中的例题和习题，不论从难度上看还是从数量上看，我们认为对初学者来说已经是足够的了。

由于本书既包括基本内容的总结和讨论，又包括解题指导和适量的例题、习题，所以它具有相对的独立性，可以使读者不必过多地依赖于“教材”而较容易阅读。但我们应向读者指出，单纯地通过指导书进行学习，或把它作为应付考试的“捷径”是不行的。第一，指导书缺乏基本原理的系统阐述，它突出了重点，但损失了理论体系的完整性。第二，对一些十分重要的问题，由于“教材”中已有详尽的论述，在指导书中只是指出其重要性而不作讨论。第三，我们不妨作一比喻，把学习理论力学比作上一个山峰，则认真阅读“教材”钻研理论和独立地完成习题就是读者借以行进的两足，这是能取得成功的根本；而指导书是为读者提供一根拐杖，如果使用得当，可以攀登得轻松些、迅速些，但是不依靠两足而只依赖拐杖，是难以成功的。

因为理论力学是理论物理中的第一门课，为帮助读者克服初学理论物理的困难，本书若干章节讨论的相当详尽。但是我们知道通过学习，能力的提高可能比知识的获得更为重要。而过多地依赖指导书，有碍于读者自学能力的培养，所以希望读者通过学习，随着学习能力的提高，自觉地逐步减少对指导书的依赖，而最终取得在物理学王国内自由生活的能力。

目 录

致读者 (自学高考物理专业委员会)	(1)
前言	(2)
序言	(4)
对于使用本书的一些建议	(5)
第一章 质点运动学	(1)
第二章 质点动力学	(20)
第三章 质点在有心力场中的运动	(48)
第四章 非惯性系中质点的运动	(60)
质点力学部分自我检查题	(83)
第五章 质点组的普遍定理	(85)
第六章 两体问题	(110)
第七章 变质量质点的运动	(116)
第八章 刚体运动学	(123)
第九章 刚体动力学	(138)
第十章 刚体静力学	(169)
质点组力学和刚体力学部分自我检查题	(176)
第十一章 虚功原理	(178)
第十二章 拉格朗日方程	(204)
第十三章 哈密顿正则方程	(225)
第十四章 哈密顿原理	(235)
分析力学部分自我检查题	(243)
附录 自我检查题参考答案	(244)

14-113

第一章 质点运动学

一 综 述

这一章以矢量和微积分为数学工具, 解决如何描述质点运动的问题, 是学习动力学的基础。基本要求是:

1. 在正确理解矢量和矢量导数概念的基础上, 对运动学方程、位移、速度和加速度等概念要有深刻的理解。

2. 以掌握单位矢量导数的运算为中心, 能根据速度和加速度的定义, 导出它们在几种坐标和自然坐标法中的表达式; 并在理解表达式中各项物理意义的基础上熟记这些公式。

3. 熟练掌握质点运动学的正、逆两类问题的求解方法 (正问题指已知质点的运动情况, 根据几何关系建立运动学方程, 再通过求导数求出速度和加速度。逆问题指已知质点的速度和加速度以及初始条件, 通过积分或求解微分方程求出运动学方程)。并能处理一些较为灵活的问题。

在本章中矢量导数的概念和运算, 极坐标系中公式的推导、理解和应用, 有关描述轨道曲线几何特征的微分几何知识, 以及用自然坐标法处理空间曲线运动等问题, 是读者不熟悉的新内容, 也是本章的重点和难点, 应给以足够的重视。读者还应注意, 掌握矢量导数和单位矢量导数的概念和运算, 不但是学好本章内容的一个关键性问题, 而且也是学好整个理论力学的前提。一些初学者学习这一章时, 往往忽视物理概念的理解和公式的推证, 而去死背速度和加速度的公式, 这种学习方法必须摒弃。

二 基本理论与重点难点

§ 1 参考系与坐标系

1.1 由于运动的相对性, 要描述质点的运动必须首先选定参考系。我们约定: 以地面为参考系时则不必强调或声明。

思考题 1 有一车轮沿直线轨道作无滑滚动, 要研究轮上一点的运动, 能否以轮心 O 点为参考系?

答 不能以轮心为参考系。参考系必须是三维的不变形的物体, 而不能是一个参考点。如果只给出一个参考点, 则不能区分与参考点距离相等而方位不同的质点的位置。

1.2 为了定量地描述质点的位置, 往往在参考系上建立适当的坐标系, 坐标系一般与参考系固连, 这时可以把坐标系看成是参考系的数学抽象。

思考题 2 有一半径为 R 的车轮, 沿一直线轨道以匀角速度 ω 作无滑滚动, 求轮边一点 A 的运动学方程。对该问题有一同学作法如下:

以轮心 O 为原点, $O-x$ 轴与轨道平行建立直角坐标系 $O-xy$ 如图 1-1 所示。 A 点的

运动学方程为

$$\begin{cases} x = R\sin(\omega t + \theta_0) \\ y = R\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

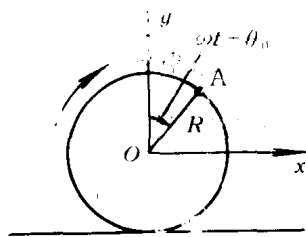


图1-1

试分析该作法是否正确？为什么？

答 解法中未指明参考系，按约定即以地面为参考系；而建立的并不是A点对地面的运动学方程，故解法是错误的。作题时参考系的选取必须认真对待，使用的参考系必须与选定的参考系一致。

思考题3 在参考系上建立一个与之固连的极坐标系，我们发现极坐标系的单位矢量的方向随着质点位置的改变而变化，这是否与“固连”相矛盾？

答 坐标系可以看成是由直线或曲线组成的带有标度的网格。所谓固连是指这些网格和参考系没有相对运动。坐标系的单位矢量（基矢）沿组成网格的直线或曲线（统称为坐标曲线）的切线方向，一般说来不一定是常矢量。

§2 运动学方程和轨迹

运动学方程可用矢量法表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ，也可以用坐标法表示，如在极坐标系中运动学方程为

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

在已知轨道的条件下，可以用弧长方程 $s = s(t)$ 作为质点的运动学方程。在使用自然坐标法时，一定要在轨道上选取原点并规定弧长的正方向，只有这样才能使质点位置与弧长 $s = s(t)$ 有一一对应的关系。要注意到自然坐标法中切向单位矢量 $\hat{\tau}$ 的方向与弧长正方向一致，不一定与运动方向一致；自然坐标法中的弧长 s 是可正可负的代数量，其增量 ds 也是可正可负的，和“教材”中讨论速率时引入的恒正的路程 s (ds 也恒正) 符号相同而含意不同。

运动学方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 描述了质点位置随时间的变化关系，通过求导数可以求出质点的速度和加速度；而且由坐标法表示的标量形式的运动学方程中消去时间变量 t ，即可求得轨道方程。如在球坐标中，运动学方程为

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

消去 t ，则得到轨道方程

$$\begin{cases} g_1(r, \theta) = 0 \\ g_2(r, \varphi) = 0 \end{cases}$$

所以我们说，运动学方程包括了质点运动的全部信息。

思考题4 在球坐标系中能否把位矢表示为 $\mathbf{r} = r\hat{r}^0 + \theta\hat{\theta}^0 + \varphi\hat{\varphi}^0$ ？为什么？

答 把位矢 $\mathbf{r}$ 向球坐标的三个单位矢量 $\hat{r}^0$ 、 $\hat{\theta}^0$ 、 $\hat{\varphi}^0$ 方向投影，由于 $\mathbf{r}$ 与 $\hat{r}^0$ 方向相同，故沿 $\hat{r}^0$ 方向投影为 r ，沿 $\hat{\theta}^0$ 、 $\hat{\varphi}^0$ 方向投影为零，所以在球坐标中 $\mathbf{r} = r\hat{r}^0$ 。读者可再

思考下面的问题:

[1]在球坐标中 $r = r\hat{r}^0$, 而又知道 r 是 r, θ, φ 的函数, 这是否矛盾?

[2]以 r, θ, φ 为自变量, $\hat{r}^0, \hat{\theta}^0, \hat{\varphi}^0$ 各是哪些自变量的函数?

§3 位移、速度和加速度

3.1 我们将 t 至 $t + \Delta t$ 时间间隔内位置矢量 r 的增量定义为质点在该时间间隔内的位移, 即

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

思考题5 等式 $|\Delta r| = \Delta r$ 是否正确?

答 请读者参看图1-2, 可知一般 $|\Delta r| \neq \Delta r$

3.2 速度定义为位置矢量对时间的导数

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

加速度定义为速度对时间的导数

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}$$

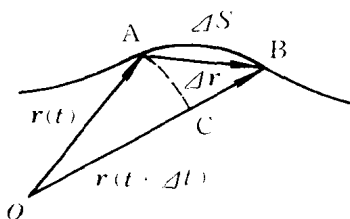


图1-2

思考题6 把速度的大小表示为 $v = \frac{dr}{dt}$ 有什么错误? 为什么?

答 我们知道 $v = |\dot{r}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$, 而 $\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$. 由思考题5可知在有限时间间隔 Δt 内, $|\Delta r| \neq \Delta r$. 因此可以断定在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况下, 一般 $v \neq \frac{dr}{dt}$.

有人有这样一种看法: 由图1-2可以看出, 若质点作直线运动, 而 O 点又选取在运动轨迹上, 则 $|\Delta r| = \Delta r$. 因此当质点作直线运动时 $v = \frac{dr}{dt}$ 是正确的. 其实这种看法也不对, 至于为什么不对? 到底在什么情况下 $v = \frac{dr}{dt}$ 才正确? 请读者作进一步的思考.

读者还可以思考: 若把速度定义为 $v = \frac{dr}{dt}$ 有何错误?

思考题7 “加速度的大小等于单位时间内速度大小的增量。”这句话是否正确? 为什么?

答 由思考题5、6的讨论, 经类比可知一般 $a \neq \frac{dv}{dt}$, 所以这句话是错误的. 具体分析由读者完成.

3.3 速度和加速度是用矢量导数来定义的, 因此掌握矢量导数的特点是掌握速度和加速度概念的基础. 一般来说某矢量函数 A 的导数 $\frac{dA}{dt}$ 的方向沿 A 的矢端曲线的切线方向, 其大小等于 A 的矢端沿矢端曲线运动的速率. 当 A 是位置矢量时, 上述结论易于理

解, 而当 A 速度 v 时, 速端曲线就比较抽象, 为帮助读者理解加速度与速端曲线的关系, 下面分析一个具体问题。

思考题 8 质点沿螺旋线轨道 $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$ 运动, 试证其加速度与 Oxy 平面平行。

答 由于

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2} \quad (\text{常数}) \\ \dot{z} &= 1 \quad (\text{常数}) \end{aligned}$$

故矢量 v 的长度不变, v 与 Oz 轴夹角不变。从而可知速端曲线为一个与 Oxy 平面平行的圆周, 如图1-3所示。加速度 $a = \frac{dv}{dt}$, 其方向沿速端曲线的切线方向, 所以可知 a 与 Oxy 面平行。

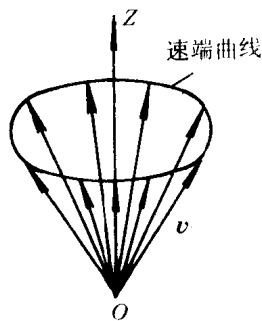


图1-3

§ 4 速度、加速度在常用坐标系中和在自然坐标法中的表达式

在直角坐标系中

$$\begin{aligned} v &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k} \\ a &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

在平面极坐标系中

$$\begin{aligned} v &= v_r \hat{r}^0 + v_\theta \hat{\theta}^0 = \dot{r} \hat{r}^0 + r \dot{\theta} \hat{\theta}^0 \\ a &= a_r \hat{r}^0 + a_\theta \hat{\theta}^0 = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r}^0 + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}^0 \end{aligned}$$

在柱坐标系中

$$\begin{aligned} v &= v_\rho \hat{\rho}^0 + v_\theta \hat{\theta}^0 + v_z \hat{k} = \dot{\rho} \hat{\rho}^0 + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}^0 + \dot{z} \hat{k} \\ a &= a_\rho \hat{\rho}^0 + a_\theta \hat{\theta}^0 + a_z \hat{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho}^0 + (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{\theta}^0 + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

在球坐标系中

$$v = v_r \hat{r}^0 + v_\theta \hat{\theta}^0 + v_\phi \hat{\phi}^0 = \dot{r} \hat{r}^0 + r \dot{\theta} \hat{\theta}^0 + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}^0$$

以上这些公式成立的条件是所采用的坐标系与参考系固连。

若用自然坐标法, 则 $v = v_\tau \hat{\tau} + v_n \hat{n} + v_b \hat{b} = v_\tau \hat{\tau} = \dot{s} \hat{\tau}$

$$a = a_\tau \hat{\tau} + a_n \hat{n} + a_b \hat{b} = \frac{dv_\tau}{dt} \hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} = \dot{s} \hat{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n}$$

我们知道 v 、 a 是对一定参考系而言的。当我们采用自然坐标法时, 求出的 v 、 a 是对哪个参考系的呢? 读者可以想一下这个问题。

掌握上述各式的推导和熟记这些公式是本章的重点。公式推导的核心是单位矢量求

导,这在“教材”中已有详尽论述,不再重复。熟记这些公式是灵活运用它们处理问题的先决条件,也是学习动力学的基础。

思考题9 杆 OA 在一平面内绕其固定端 O , 以匀角速 ω 转动。杆上有一滑块 M , 相对杆以匀速 u 沿杆向 A 端滑动。以 O 为极点建立极坐标如图 1-4, $t=0$ 时 OA 与极轴重合, 且 M 位于 O 点。有人认为, 在这种情况下研究 M 的运动, 则有如下结论:

[1] $a_r = 0, a_\theta = 0$, 故 $a = 0$ 。

[2] O 为 OA 转动的中心, 所以在自然坐标法中向心加速度指向 O 点。

试分析上述二结论是否正确: 为什么?

答 结论[1]是错误的。得出这个错误结论是由于把直角坐标法中的关系 $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}$ 简单地推广到极坐标中去, 认为 $a_r = \ddot{r}, a_\theta = \ddot{\theta}$ 的缘故。应注意到在直角坐标系中, 之所以有形如 $a = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$ 的简单表达式, 是由于直角坐标系与参考系固连, 其中的单位矢量 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 为常矢量, 单位矢量的导数为零。而与参考系固连的极坐标系的单位矢量 $\hat{r}^0, \hat{\theta}^0$, 随 M 点的运动而改变, 所以加速度公式较为复杂。

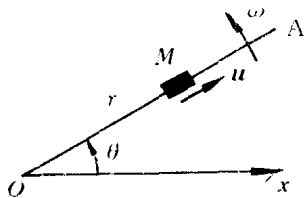


图 1-4

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

我们应根据上述公式计算 M 点的加速度, $\ddot{r}$ 是由 M 沿 OA 不均匀运动产生的。在现在的问题中 $\ddot{r} = 0$, $-r\dot{\theta}^2$ 是不考虑 M 沿 OA 的运动, 由于 OA 均匀转动产生的“向心”加速度, 现在 $-r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$, $r\ddot{\theta}$ 是不考虑 M 沿 OA 的运动, 由于 OA 作不均匀转动产生的“切向”加速度, 这里 $\ddot{\theta} = 0$ 。(不考虑 M 沿 OA 的运动, 则 M 作圆周运动, 上面说的“向心”, “切向”均是对该圆周轨道而言的) $2\dot{r}\dot{\theta} = 2u\omega$, 所以正确的结论是 $a_r = -r\omega^2, a_\theta = 2u\omega, a = -r\omega^2 \hat{r}^0 + 2u\omega \hat{\theta}^0$ 。

为帮助读者理解和记忆, 下面结合目前的具体问题分析一下 $2\dot{r}\dot{\theta}$ 一项是如何产生的。设 t 时刻 M 位于 a 处, $t + \Delta t$ 时 M 位于 b 处, 如图 1-5 所示。由于 $\Delta t \rightarrow 0$, 所以我们可以将 b 处的速度沿 a 处的单位矢量 $\hat{r}, \hat{\theta}^0$ 方向投影。由于 OA 的转动改变了 u 的方向, 同时由于 M 沿 OA 向 A 端运动改变了横向速度的大小 (由 ωr 变为 $\omega(r + u\Delta t)$), 所以在 Δt 时间内沿 $\hat{\theta}^0$ 方向的速度增量为

$$\Delta v_\theta = u \sin(\omega \Delta t) + \omega(r + u\Delta t) \cos(\omega \Delta t) - \omega r$$

考虑到 $\Delta t \rightarrow 0$, 故 $\sin(\omega \Delta t) \approx \omega \Delta t, \cos(\omega \Delta t) \approx 1$, 则

$$\Delta v_\theta = u\omega \Delta t + \omega u \Delta t = 2u\omega \Delta t$$

因此可知, 由于 OA 的均匀转动与 M 沿 OA 的均匀运动之间的相互作用产生了沿 $\hat{\theta}^0$ 方向的加速度

$$a'_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = 2u\omega$$

结论 [2] 也是错误的。在普通物理力学中主要研究圆周运动问题，对于圆周运动情况转动中心经常与轨道曲率中心重合。而对我们现在研究的一般空间曲线来说，转动中心与曲率中心一般不重合。由点 M 的运动学方程

$$\begin{cases} r = \omega t \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

可求出点 M 的轨道方程

$$r = \frac{u}{\omega} \theta$$

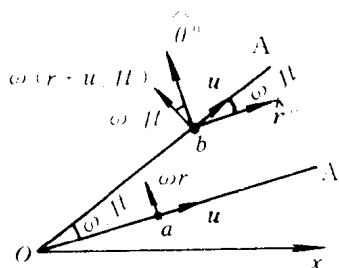


图1-5

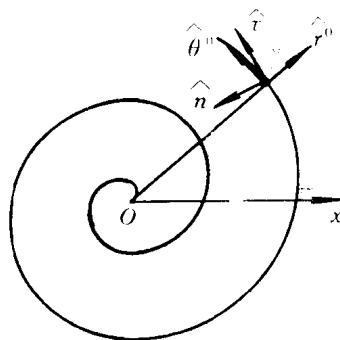


图1-6

为一阿基米德螺线，如图 1-6 所示。在自然坐标法中，向心加速度沿主法线 $\hat{n}$ 的方向，指向曲率中心，而不是指向 O 点。

请读者思考：极坐标系单位矢量 $\hat{r}^0$ 、 $\hat{\theta}^0$ 和自然坐标法的单位矢量 $\hat{n}$ 、 $\hat{\tau}$ 有何差别？有人说对于圆周轨道则 $\hat{r}^0$ 、 $\hat{\theta}^0$ 与 $\hat{n}$ 、 $\hat{\tau}$ 相同，这种说法对吗？

思考题10 如图1-7所画情况，说明各点情况是否是实际可能的，并说明理由。

答 点1：不可能。 $v=0$ 则 $a_n=0$ ， a 应沿切线方向（如点5的情况）

点2：不可能。 $v \neq 0$ 则 $a_n \neq 0$ （除非 $\rho = \infty$ ，即为直线轨道）， a 不可能沿切线方向。

点3：不可能。 a_n 沿主法线 $\hat{n}$ 方向，由主法线定义可知 $\hat{n}$ 指向轨道凹侧，故 a 应偏向轨道凹侧（如点6、7情况）。

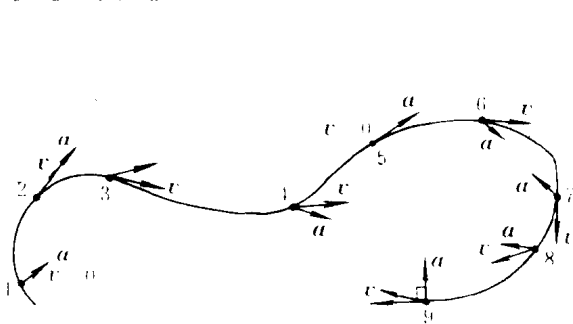


图1-7

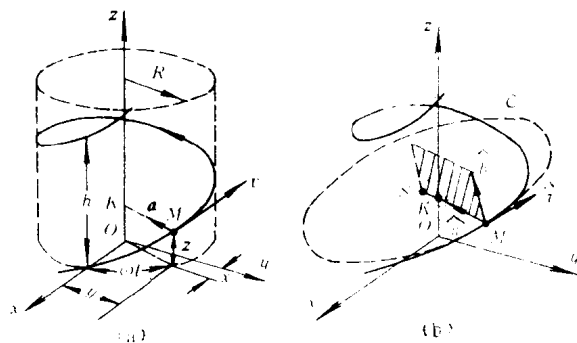


图1-8

点4：不可能。由 v 和切线方向的定义， v 应沿轨道切向，且 a 不可能指向轨道凸侧。