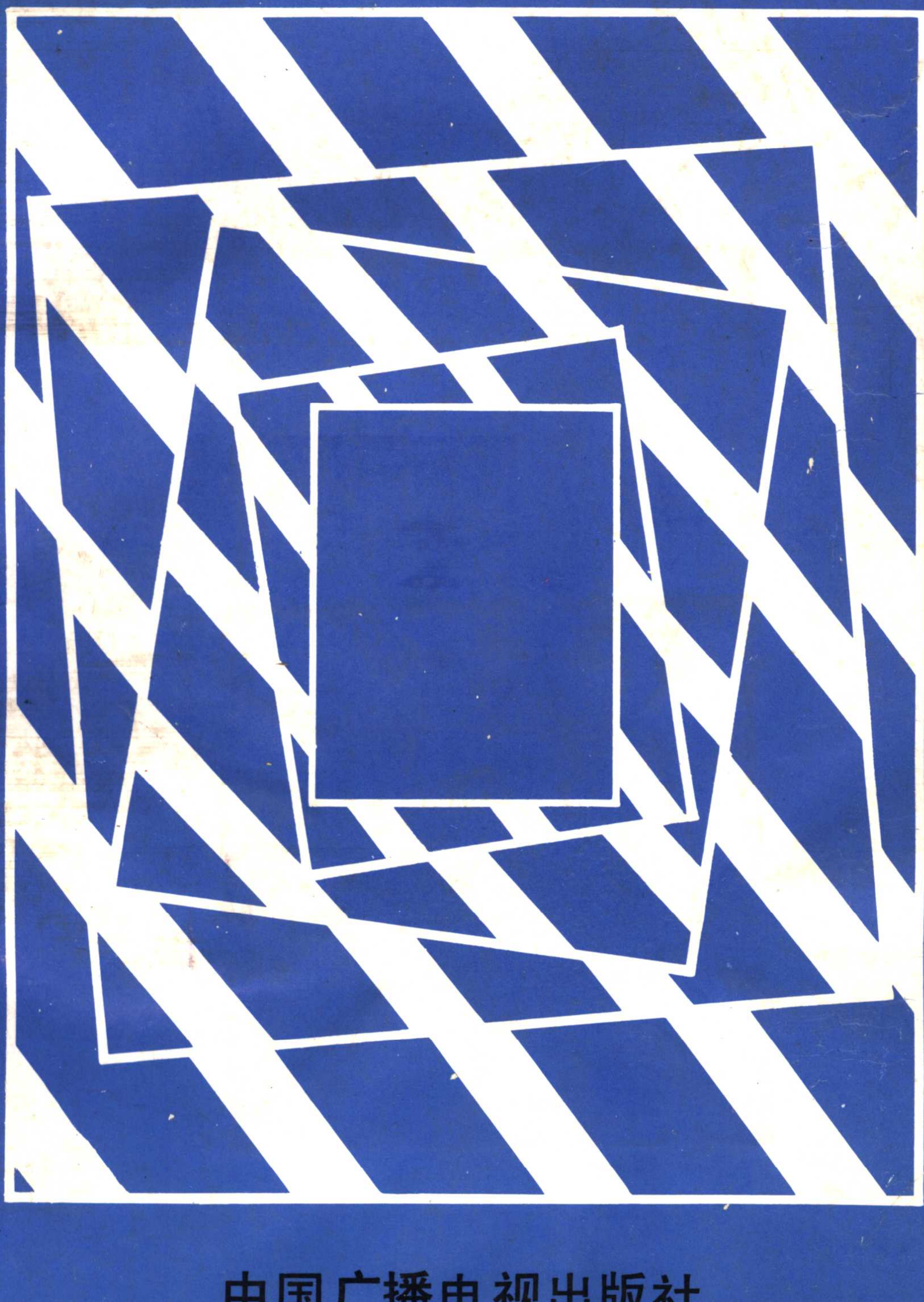
数学博览指南

吴晓乾　唐　虎等编译



中国广播电视出版社

数学博览指南

吴晓乾　唐　虎
陆昳秋　　　编译

刘书麟　徐预生　校

中国广播电视出版社

（京）新登字097号

内 容 提 要

本书借助于幽默的对话，融知识性、科学性、思想性和趣味性于一体，深入研讨了现代大学数学的一些基本内容。选题新颖，内容翔实。该书几乎谈及数学本身及其发展的各个分支，注意用新的思想方法和现代语言来描述近年来数学的发展趋向，其为古典数学与现代数学表达方式架起了一座桥梁。对于激发读者对数学的兴趣、优化数学知识结构、启迪思维与训练思维、开发智力、培养动手能力方面都颇为有益。

本书主要对象是大专院校师生、研究生、数学研究人员、中学教师、一般数学爱好者和应用数学这个工具的广大科技工作者。

数学博览指南

吴晓乾、唐　虎、陆联秋　编译

中国广播电视出版社出版

（北京复外广播电影电视部大院　邮政编码100866）

北京大中印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所经销

787×1092毫米　16开　12.5印张

1993年10月第1版　1993年10月第1次印刷

印数：1－2000册　定价:11.00元

ISBN7-5043-2444-2/O·11

编 译 者 的 话

《数学博览指南》主要是根据英国奥彭大学数学导师约翰·贝利斯和罗德·哈格蒂合著(1988年由麦克米伦教育出版有限公司出版)的《艾丽丝漫游数学世界》(Alice in Numberland)一书，并参考有关数学文献编译而成。本书借助于幽默的对话及读者的努力，融知识性、科学性、思想性和趣味性于一体，深入研讨了现代大学数学的一些基本内容。

该书选题新颖，内容翔实，它涉及的数学知识面相当宽广，几乎谈及数学本身及其发展的各个分支，特别是本书意在用现代语言描述近年来数学的发展趋向方面做得相当成功。从整体上看，本书有点像R·库朗和H·鲁宾逊的《现代数学概观》(或译为《什么是数学》(汪浩　朱煜民　译))，然而本书在选题上比较注意吸收新的思想方法和新的表达方式。阅读此书，可以较轻松地跨越初等数学与高等数学之间的鸿沟。故本书可作为联结古典数学与现代数学表达方式的一座极好的桥梁。尤其是对想了解现代数学的读者，会发现该书对他们是一本难得的优化数学知识结构、启迪思维、训练思维、开发智力、培养能力的好书。因为他们会从中感受到数学的严密性和抽象概念对于他们都是称心如意和令其愉快的……收获将是巨大的。

本书主要对象是大专院校师生、研究生、数学研究人员、中学教师和一般数学爱好者，以及使用数学这个工具的广大科技工作者。

本书由吴晓乾、唐　虎、陆昳秋同志编译。书中《前言》、第1至5章由航空航天部徐预生高级工程师校对；第6至13章和《索引》由中国科学院系统科学研究所刘书麟副研究员校对。

高级工程师陆如新同志对本书的编译和出版给予了热情的鼓励与支持，并为本书的顺利出版付出了极为辛勤的劳动；徐预生、刘书麟二位同志在百忙中冒酷暑为我们校稿。在此我们一并表示衷心的感谢!

愿此编译本的出版能对广大读者提高数学素质，建设四个现代化起到一点积极作用。

由于我们水平所限，编译文难免有不妥之处，敬请各位读者批评指正。

编　译　者

1993年6月于北京

前 言

不读前言会妨碍理解。

可悲的是受过教育的人甚至连我的文章主题都不明白！

保罗·R·哈尔莫斯（Paul R·Halmos）

写这本书的目的何在？很简单，为了帮助学生喜欢数学。我们想，对于那些擅长数学的学生，本书正好使他们更上一层楼；而对于那些数学上一般但不想放弃成功机会的学生，本书将培养他们学习数学的兴趣，提高学习积极性，使之有希望精通数学。

我们早就企图十分慎重地写一本趣味读物，其内容是严密的数学问题。职业数学家都懂得，趣味读物与严密的数学内容是两个不相容的概念，我们的问题是要保证我们的读者既喜欢这本趣味读物而又不失其数学观点。这就是我们建议读者“前言必读”的原因吧。不过书中某些部分毫无轻松愉快之感：这是指那些阐明重要数学内容的部分。既然我们已经改变了您的枯燥感，那么当我们偶尔“解释幽默之处”时，大概您会原谅我们严格的数学描述吧。如果用不着解释，那当然更好啰。

我们假定读者们对数学有些兴趣，他们或是从事数学教学的老师，或是正在学习数学的学生，他们对数学研究可能已感到愉快。本书的数学知识水平适于高中六年级*学生及早期肄业的大学生。我们想要达到本书知识领域的途径是经过深思熟虑的，而不是灵机一动鲁莽从事的。但 道路是迂回曲折的，在许多地方有分岔，而且常常自成交叉。在通往主题的道路上，可以安排些极有兴趣的应用题目，设计一批风景点和一些特定的文物，使人为之倾倒，但我们根据数学本身特有的数学趣味，选择了另外一条道路。实际上，用“有趣”一词来表达本书的感受有点太平淡了，我们期望本书的还带点“刺激”味道，用“激起兴趣”和“令人兴奋”才更确切一些。很难使人相信，爱好数学能与爱好诗歌、音乐甚至运动一样感到愉快与兴奋。然而这却是真的，并且曾是我们设计其途径时考虑的一个因素。

此外，贯穿本书的另一条主线是求证的概念。明确的说，数学中求证的依据与方法是所有大学学科中独一无二的，即使是物理学也比不上。遗憾的是，数学教学中往往忽视了这个方面，其后果可能是严重的。这意味着，我们以欺诈的手段把数学学科抛售给大学生买主，当他们发现大学数学中有关求证方面内容很多时，他们会不喜欢大学数学教科书，会抱怨贸易说明条例没有保护他们的利益，使他们度过十分伤心的三年。还可

---

* 译注：哈尔莫斯过份追求形式化逻辑化，的确对于非专家的读者，读他的著作，很难理解其意，这与他的老师*J·V·Neumann*的风格大相径庭。

* 译注：“高中六年级”是英国学制。

能有一个同样遗憾的后果——有些有潜力的学生，从来没有明确他们将来从事数学研究，因为没有人来论证他们是否能把求证的探索视为愉快的事情，而不作数学上的短工；然而这种论证的理论与事实依据也很难获得！为了评价学生的证明能力，高中六年级时必须让他们适当地进行准备，甚至在此之前——例如高中五年级时，对他们进行分析，其论题要在证明方面看上去都很明显，如用麻烦、困难的方法来证明，则不会引起他们的兴趣。那么，明显的情况是什么，通过证明它我们赢得什么？第二章回答了有关几点。

另一个极端的情况，有些以数与图为基础的不可信（但却是事实）的论点，我们也打算强调一下这些方面。显而易见的问题中隐藏着深奥、完全料想不到的激动与奇妙感，由此引起了对数学的兴趣，以致产生了满足感。很自然，有这方面体验的人会把自己的体会讲给别人听，特别是讲给那些持有“运算只有艰苦”的数学观点的人听。有些“擅长数学”的人，有时竭力告诉别人“这个题目很容易”。这样的人都不是数学家；他们满足于已经解决的那些难题，于是就认为一切都那么容易！真正的满足感，不论是马拉松赛跑、登山运动、数学还是音乐，都来自迎接重重困难的挑战。运用您的判断力，避免选择那些不大实际的难题！

然而，数学中只解决一些难题是不够的。如果每道难题都要求创造十分新的方法，那将是非常困难，而且也是不可能的事情。当越来越感到该题目没有内在的统一时，不仅仅是感到很困难，连原来的满足感也会迅速消失。由于这个缘故，统一性是另一个重要的观点。考虑到这一观点，对于包括那些严密的证法不得不作判断，解答必须根据这样的一些原理来证明：这些原理即使很简单，但要在各种数学领域内都应有很深的推论。一般地说，我们避免了只在一种场合下使用的方法，除非要求包括这种单一场合使用的方法。

最后，虽然有了这本书，我们希望数学界的同行们，把我们这本书视为有益于读者的文本，这决不会与数学的严密性相抵触，而且我们的意图是处理许多严密的数学问题，并且把它们论述清楚。我们提出的一些问题（例如“什么是实数？”或“何谓求证？”），其意义是很深远的。这些问题所引起的艰苦工作，在于判断问题的重要性及其解法，也在于做细致的工作以彻底地解答它们。在各要点处，有一些如用〔$m \cdot n$〕指明的将由读者来填补的空缺，并在本书附录* 中给出了一些提示。在求证结束时用哈尔莫斯墓碑符号“□”表示，特别重要的结果和定义用方框圈起来。

本书不必按其写的顺序来阅读，完全可以根据读者自己的理解和兴趣来读。本书的写作，既便于读者改变漫游路线，也便于为读者建立标志。指出这本书不是任一具体数学分支的系统教科书是重要的，但我们希望读这本书的总体效果是：促进对更正规的教科书的学习，提高理解能力，从而提高学习这些教科书的兴趣，培养健康的批判态度，尤其是注重严密性及可靠的直觉性。

“严密的目的是要合理地征服直觉”*（雅克·阿达马，1865～1962），——或许我

---

*译注：第十三章。为方便计，已将原著中的两个附录分别编成第十二、十三章。

*译注：〔法〕J·Hadamard《数学领域的发明心理学》（有中译本），原文为J·Hadamard教授在美国耶鲁演讲发展成的一本书。

们还要加上：还要揭露常常发生的错误！

我们谨对麦克米伦教育出版有限公司数学编辑彼得·奥茨的帮助和耐心表示感谢，对凯西·克鲁、安吉拉·富勒顿和黛安·霍洛韦改正我们的难以辨认的潦草书写表示感谢，并对他们相互间的支持表示谢意。至于书中的错误之处，就让我们俩作者相互责怪吧。

约翰·贝利斯
罗德·哈格蒂
1987年于诺丁汉及阿宾顿

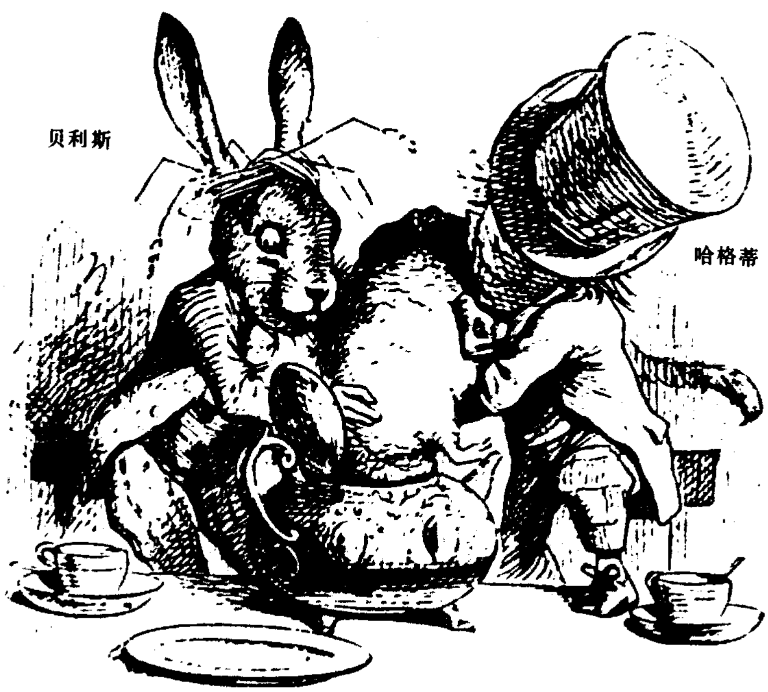


图 0-1

目　　录

第一章　艾丽丝来到逻辑王国

——在此我们结识了艾丽丝、半斤及八两兄弟俩，他们也理解了逻辑……

"另一方面"，八两接着说，"假设事情是那样，说不定就是那样；假设事情是这样，可能就是这样；可是当事情不是这样时，那也就不是这样。这就是逻辑。"

刘易斯·卡罗尔（Lewis Carroll）

|一|　逻　　辑

艾丽丝照着镜子，在镜子里她瞧见了森林里的八两（Tweedledee）和半斤（Tweedledum）*兄弟俩。这兄弟俩，长得极其相像，以致于艾丽丝难以把他俩区分开来。在我们的故事中，俩兄弟中一个谎说自己呆在星期一、二、三，而实际上是呆在一周的另外几天；另一个谎说自己呆在星期四、星期五、星期六，而实际上却呆在一周的其余各天。一天，艾丽丝在森林里遇到了这兄弟俩，下面是他（她）们的谈话：

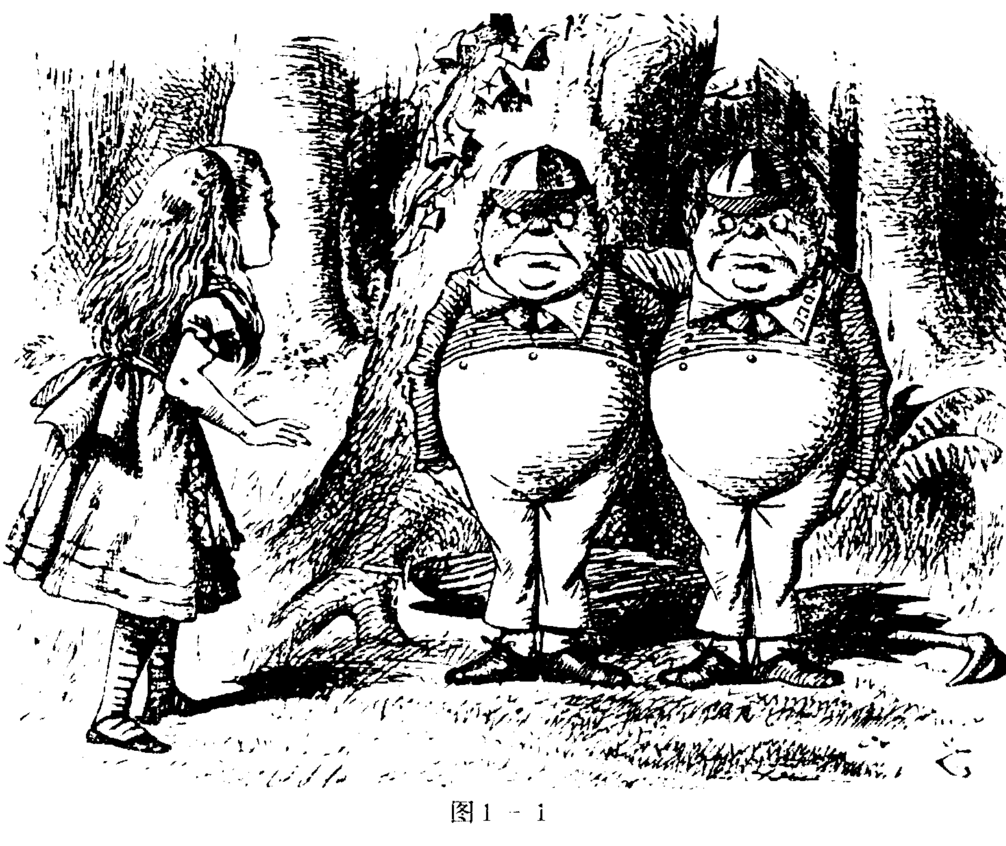


图1－1

* 译注：在我国旧衡制中，十六两为一市斤，八两为半斤。所以我们祖先用八两和半斤来比喻两个极其相似的人。

老大：我叫半斤。

老二：我叫八两。

艾丽丝：啊！原来今天是星期天。

当然，艾丽丝是对的，原因在于：假如兄弟俩一位说谎，另一位说的就是真的，所以他们俩既都可自称为半斤，也都可自称为八两。因此，兄弟俩都讲真话，只能发生在星期天。我们的分析是依赖于这样一个事实：兄弟俩说出的话不是真（的），就是假（的）。这样的命题叫语句。在逻辑中我们只承认语句，而象"我在说谎"或"现在几点钟？"这样一些习惯用语不能作为语句来考虑。因为后一个习惯用语是个问题，那为什么前一个习惯用语也不是呢？〔1.1〕接着他们又说：

老大：我叫八两"or（或）"天在下雨。

艾丽丝：哎呀妈呀！我忘记带伞了。

现在请记住今天是星期天，所以两兄弟讲的是真的。本来，老大是半斤（从较早的谈话中可知），因为语句"我叫八两or天在下雨"是真的而老大不是八两，那么天必定是下雨。半斤的话是复合语句的一个例子，这个复合语句是由两个简单语句组成的，中间用连词"or（或）"连接。用来构成复合语句的连词还有"and（与）"和"not（非）"。在我们同艾丽丝继续历险之前，规定这三个连接词准确的逻辑意义：

我们规定，凡有真值的语句用T表真值，有假值的语句用F表示假值。

假设有一语句P，语句P的否定简记为$\sim P$，它有与语句P相反的真假值。用真值表（见图1－2）可以简练地表示其意义：

P	$\sim P$
T	F
F	T

图1－2

假设另有一语句Q，复合语句"PorQ"写成$P \vee Q$，如果P或Q中有一个为真，则复合语句$P \vee Q$就为真。请注意，所用的"or"包括"and/or"的意思，并不排除只有一个而不是两个的意思这种情况。复合语句"PandQ"，记成$P \wedge Q$，只有当语句P和Q都为真时复合语句$P \wedge Q$才为真。用真值表（见图1－3）很容易地表示这个知识。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

图1－3

转眼间，又到了第二周的一天。在森林深处，艾丽丝又遇到了兄弟俩。她已经历了许多奇事，忘记了今天是星期几。

老大：我叫半斤and他叫八两。

艾丽丝：那么我确实搞不清您们谁叫什么。

老二：我不叫八两。

艾丽丝：好像那——会帮我的忙的。

当然，艾丽丝是对的，她非常善于逻辑（推理）。从上面的谈话我们不能判断谁叫什么。〔1．2〕

老大：相反地说，我不叫半斤or他也不叫八两。

艾丽丝：您否定了刚才说的？

或许兄弟俩已经把艾丽丝弄糊涂了！我们是否能判断老大是以不同的方式，说的同一个意思呢？当然，“相反地说”指的“不是这种情况”，于是我们来论述某些语句的否定断定。为了分析这个问题，我们继续进行下去。

令P 代表“我叫半斤”这个语句，Q表示语句“我叫八两”。于是老大先讲的这两个语句组成$P \wedge Q$，后讲的两个语句组成$\sim(\sim P \vee \sim Q)$。不论这些子语句的真假值是什么，只要这两个复合语句真假值相同，那么它们在逻辑上就是相同的。反之亦然。由它们的真值表也可确定这一点（见图 1－4）。

因此，$P \wedge Q$ 与$\sim(\sim P \vee \sim Q)$ 的逻辑值相等。

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(\sim P \vee \sim Q)$	$P \wedge Q$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

图1－4

这周以后，艾丽丝又遇到了这两位朋友。

老大：如果我叫半斤，那么他就叫八两。

老二：如果我叫八两，那么他就叫半斤。

艾丽丝：哦！那么今天又是星期天，我仍然不知道你们谁叫什么。

又一次说明，艾丽丝的逻辑思维清楚。老大说的“如果P 那么Q ”，通常写成“$P \rightarrow Q$”。只有当断定Q 为假，而P 为真时，这个语句为假。因为我们不能，以合乎逻辑的方式把一个真语句推断成假的。用含有连接符“→”的真值表说明这一知识（见图1－5）。

暂时离开我们的朋友们是值得的，因为在真值表图1－5中有些明显的奇事。为了了解这一点，请考虑下面三个语句，按照真值表的要求，这三个语句得为真：

（a）如果$2+2=4$，那么草通常为绿色的。

（b）如果$2+2=5$，那么草通常为绿色的。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

图1－5

（c） 如果2＋2＝5，那么可以把镜子里的艾丽丝称为维多利亚皇后。

要求这样的一些语句为真显然是胡闹，因而我们必须承认，平常说话所用的语言与形式（数学）逻辑不是一回事。我们没有提出这些语句的经验，实际上是意味着我们不知道～、∨、∧和⇒就是日常谈话中的用词“非”、“或”、“与”和“蕴涵”的简写。还不仅如此，诸如$P \vee Q$和$P \Rightarrow Q$这样一些语句，只有当P和Q在意义上有某种联系时才是合理的表达。艾丽丝只是抢着说“今天是星期天与我不知道您们谁叫什么”之类的话，因为她（和我们）知道星期几和兄弟俩是否诚实之间的一种联系。即使是艾丽丝，如果她习惯发表象上面（a）－（c）这种见解的话，也难免被人嘲弄。在形式逻辑中总是假定没有这种联系，只有真或假。除了语句的真假值外，其余含义都被忽略了。即使如此，Q无论是真还是假，只要P为假时$P \Rightarrow Q$都为真，这几乎使人难以相信。考虑语句“如果今天是星期二，那么我喝酒”，问在什么情况下为假。“我不在星期二喝酒”就指明是假。换言之，该语句与“我不是不在星期二喝酒”其用意是相同的。这往往就是数学蕴涵研究的方式。这就是说，$P \Rightarrow Q$总是起着表示～（$P \wedge \sim Q$）的作用。请证明最后两个逻辑表达式逻辑值相等。〔1.3〕作为一个具体的例子，请见图1-8，如图所示，$\triangle ABC$是以A为直角的直角三角形，三边分别为x、y、z，毕达哥拉斯（*Pythagoras*）定理说：“如果$\triangle ABC$为直角三角形，那么$x^2+y^2=z^2$”。这与“如果三角形不是直角三角形，那么$x^2+y^2 \neq z^2$”是等价的。举一个更极端的例子，请考虑下面的$P \Rightarrow Q$语句：“如果n是大于69而小于70的整数，那么n为一素数。”按照数学逻辑来判断的话，这个定理是一个真语句，是一个缺席的真语句——如果您愿意这么理解的话，因为P从来不为真，所以这个语句完全是一个空语句。

再回到艾丽丝与两兄弟的最新谈话。老大的语句$P \Rightarrow Q$为真，否则兄弟俩就都是半斤！而从图1－5中既没有告诉我们P为真，也没有告诉我们Q为真。同理，老二的语句$Q \Rightarrow P$为真。所以，艾丽丝是对的，今天是星期天，我们仍然不能区别这兄弟俩。

老大：如果他不是八两，那么我也不是半斤。

艾丽丝：啊！您又在这里重复说。

说明艾丽丝又是对的。换句话说，说明（$\sim Q \Rightarrow \sim P$）、$P \Rightarrow Q$的换质位命题，在逻辑上与$P \Rightarrow Q$等价。〔1.4〕语句$Q \Rightarrow P$叫做$P \Rightarrow Q$的逆语句，复合语句（$P \Rightarrow Q$）∧（$Q \Rightarrow P$）简记成$P \Leftrightarrow Q$，常常读作“$P$当且仅当$Q$”。由“implies（蕴涵）”和“and（与）”的真值表很容易推演出$P \Leftrightarrow Q$的真值表。（见图1－6）我们马上看到，凡语句P和Q逻辑

值相同时，$P\Leftrightarrow Q$ 为真。

P	Q	$P\Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

图1－6

1—2 定 理

许多数学定理都是由一些假设和结论结合而成。因此这些定理的逻辑形式都是“如果P，那么Q”。这些定理的证明包含论证$P\Rightarrow Q$是真语句，通常有三种证法：

(1) 假设P为真，通过一些步骤推断Q为真。

(2) 假设Q为假，推断P也为假。换句话说，证明其换质位命题。

(3) 假设P为真与Q为假，推论出一明显的假语句。换言之，证明$\sim(P\wedge\sim Q)$为真。正如前面您所证明的，它与$P\Rightarrow Q$为真的逻辑值是相等的。

第3种证法是不寻常的。我们把导出一些明显矛盾的方法称为归谬法。我们在后面会看到许多例子。某些定理具有$P\Leftrightarrow Q$的形式，这实际上在一个定理中包括了两个定理。在此情况下，我们得证明$Q\Rightarrow P$以及$P\Rightarrow Q$都成立。作为用上述“证明$P\Rightarrow Q$”方法的一个例子，在正整数（又叫自然数）范围内，我们证明下述结果：

定理1.1 如果n^2为奇数，则n也为奇数。

我们令P表示“n^2为奇数”，令Q表示“n为奇数”。

证1：根据素因子分解的唯一性（UPF：见第2章）$n=p_1p_2\cdots\cdots p_r$，式中$p_1,p_2,\cdots\cdots,p_r$表示素数（不一定全都不等）。因而有$n^2=p_1^2p_2^2\cdots\cdots p_r^2$。而$n^2$为奇数，因此任何一因子$p_i$（$i=1,2,\cdots\cdots\cdots,r$）都不可能等于2。显然$n$为奇数。我们就直接证明了$P\Rightarrow Q$为真。

证2：如果n为一偶数，那么$n=2m$，其中m为另一整数。于是$n^2=2(2m^2)$也是偶数。用证明换质位命题“$\sim Q\Rightarrow\sim P$”就可证明$P\Rightarrow Q$。 □

证3：如果n^2为奇数而n为偶数，那么n^2+n为奇数。因而有$n(n+1)$为奇数，而n和$n+1$是两个相邻的整数，那么它们中必有一个是偶数。换言之，$n(n+1)$也为偶数。显然，这是不可能的。假定$P\wedge\sim Q$为真，于是产生了矛盾。因此，$\sim(P\wedge\sim Q)$为真，这就证实了$P\Rightarrow Q$为真。 □

必须注意，在什么时候采用矛盾证法（即反证法）。例如，下述证法错误出在哪里？〔1.5〕

定理1.2 1是最大的自然数。

证：假定1不是最大的自然数。令n是最大的自然数，那么$n+1$又是一最大的自

然数。哪一个引起矛盾？

数学语句常常包括一个变量x。对于x的一个固定值，如果这样的一个语句不是真就是假，那么我们就把该语句称为谓词，并用$P(x)$表示它。于是，对变量x的任一具体值，$P(x)$就给出一个语句。例如，"x为满足$2x=x^2$的一个实数"，这样给出的一个语句$P(x)$。根据初等代数，我们可以证明$P(0)$为真；$P(2)$为真而对于x的其余值$P(x)$为假。变量前面置一量词，就能把谓词变换成语句。有个"存在量词"，"存在"简写成"$\exists$"。还有一个全称量词"任意"，简写成"$\forall$"。好象要证明"$\forall x, P(x)$"型的定理很吓人，因为我们必须对某个目标集合中的每个x（可能有无限个）来证明$P(x)$为真。相反，好像"$\exists x, P(x)$"型的定理要求较少，我们只须对x的一个单值证明$P(x)$为真即可了。许多极好的数学定理都是存在型的。最重要的是能证明这样的定理。例如，甚至连一个解的存在都没证明时要解某些代数方程或微分方程，其要点是什么？前面我们已经叙述过，"任意"型和"存在"型定理在性质上俨然不同。实际上并不是这样，因为假想我们已把"$\forall x, P(x)$"型语句作出定义，但后来我们又怀疑它的真实性。现在我们力图证明我们自己的猜想是不正确的。（对于职业数学家来说这并不是异常情况！）我们得找一个x值，对此x值来说$P(x)$为假。因上述x有多种可能，故称为与我们最初断言的反例。在数学研究中，反例起着重要的作用。扼要地讲，证明"$\exists x, \sim P(x)$"为真就证明了"$\forall x, P(x)$"为假。如图1－7所示，否定的全称语句也是一个相伴存在语句，反之亦然。

语　句	否定语句
$\forall x, P(x)$	$\exists x, \sim P(x)$
$\exists x, P(x)$	$\forall x, \sim P(x)$

图　1－7

我们来考虑法国著名数学家费马（Pierre de Fermat，1601—1665）提出的三大难题。许多数学家根据实验资料和过去的经验，往往觉得某些语句为真，可是不知道怎样证明。这样的一些语句，在解答它们之前，被称为猜想。费马是一个皮革商的儿子，父亲把他培养成为一个律师，他只在业余时间研究数学，而且很少发表论文，数学证明就更少。他的许多猜想，特别是数论方面的一些猜想，后来证明都是正确的，有些猜想至今仍未解决。

猜想1 对$\forall$自然数n，$2^{2^n}+1$是素数。

猜想2 对$\forall$自然数n（n含有因子P，而P不是素数），n^{P-1}能被P整除。

猜想3 对$\forall$大于2的自然数，方程$x^n+y^n=z^n$没有整数解x，y，z。

第一个猜想为假。虽然$2^{2^1}+1=5$，$2^{2^2}+1=17$，$2^{2^3}+1=257$，$2^{2^4}+1=65537$都是素数（这几个数被称为费马素数），当$n=5$时这个猜想就不成立了。这个反例是欧拉（Euler）在1732年提出来的：　$2^{2^5}+1=641\times6700417$，

不知道是否还有更大的费马素数。

第二个猜想称为“费马小定理”，是费马在1640年提出来的，是欧拉在一个世纪以后证明的。

最后一个猜想称为“费马最后定理”——是否成立还不知道。读者应当注意，方程 $x^2+y^2=z^2$ 容许有整数解。由一个直角三角形（见图1－8）三边组成的一组数 (x, y, z)，其最小的两组整数解（3，4，5）和（5，12，13）分别组成两个直角三角形的边长。数学家力图解决费马最后定理的历史记载是很有趣的。费马自己证明当 $n=4$ 时其结论为真，即 $x^4+y^4=z^4$ 没有整数解。比费马晚一个世纪的欧拉，证明了当 $n=3$ 时其结论成立。到了1955年，借助于 *SWAC* 数字计算机，证明到 $n<4003$ 时正确。当 $n<25000$ 时也证明了这个结论正确。提供可观的赏金* 来证明 n 为大于2的所有自然数这个结论

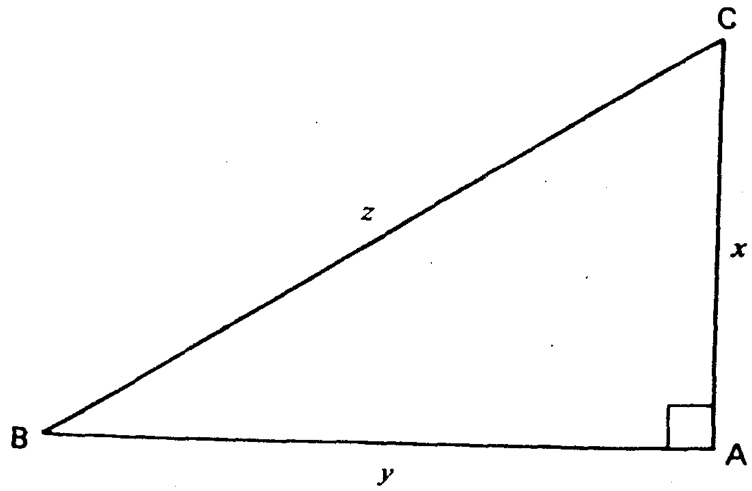


图1－8

的正确性时，有许多业余数学家和职业数学家提出了大量证法。费马最后定理，作为数学定理的未定特征，有许多证法——这些证法全都不正确！要更详细地了解这个有趣的问题，请看E·T·Bell写的《The Last Problem（最后难题）》。

本节中，一个很有力的证明方法我们没有提及，这就是数学归纳法。这有一整章的内容来叙述它（见第5章）。在理论上说，数学归纳法适于证明“$\forall$ 自然数 n，$P(n)$”形式的定理。我们讨论谓词时，已经谈到 $P(x)$，其中 x 属于某些特殊的目标集。下节中，我们把集合这个概念作为本章的压台戏来加以介绍。

1—3 集 合

我们把一个给定的目标集称为集合，该集合中的个体称为这个集合的元素。每当 a 是一个给定集合 S 的元素时，我们就应写成 $a \in S$，可把符号“$\in$”理解为惯用语“属于”的简写。实际上，最初它是意大利语 este，就是“是”的意思。在编写本书的最后阶段，我们俩作者才发现这一点！而每当 b 不属于集合 S 时，我们则写成 $b \notin S$。如果一个集合的那些元素都能列出来，那么我们就把它们列出来且把这些元素放在大括号中间。例如，艾丽丝在森林中遇到的那一对活宝是一两个元素的集合，我们写成

---

* 译注：赏金是十分可观的而且在逐渐增加，但至今仍未解决。

$S=\{$八两，半斤$\}$

可利用谓词来阐明一个集合的内容——当我们的集合是不可数集时尤其显得重要。换句话说，不能把该集的所有元素都列出来（见第9章）。作为使用谓词的一个例子，仔细考虑图1－9中的集合T。可以把这个述语理解为“集合T是由小于1的所有实数x组成的”。

$$T=\{x:x\text{为一小于1的实数}\}$$

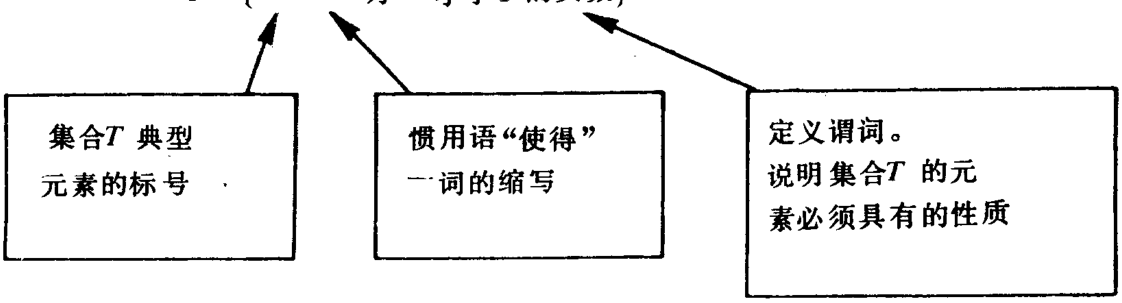


图1－9

当讨论任一数学问题、猜想或定理时，我们总得阐明所考虑的是哪一个集合或哪些集合。对于数学问题，阐明某一全集U是最容易办得到的。后出现的一些集合只包含该全集的一些元素。本书将要非常详细地研究各种各样的数集。我们把这些数集概括为下述几种——本书的目的之一是要帮您懂得上述这些定义谓词哪一个是确切的。

自然数：

$$N=\{n:n\text{为一正整数}\}$$

整　数：

$$Z=\{n:n\text{为一整数}\}$$

有理数：

$$Q=\{p/q:\ p\text{和}q\text{均为整数且}q\neq 0\}$$

实数：

$$R=\{x:\ x\text{为一实数}\}$$

复　数：

$$C=\{a+ib:\ a\text{和}b\text{均为实数且}i^2=-1\}$$

显然，要给实数R下详细的定义是赘述了——待到第4章再作较为满意的解释吧。

当处理一些数学问题时，利用这里提出来的各种集合，这些集合的论证实质上是牢固地建立在逻辑的基础上。我们的逻辑联结词包含在集合基本运算的定义之中，即并（集）、交（集）和互余或互补（余集或补集）。同样，我们将简单导出集合的代数（运算）定律，包括某些复合语句的逻辑等价定律。我们将利用维恩（Venn）图来说明集合的运算。