黎曼几何学

佐佐木重夫著

科学出版社

佐佐木重夫
リーマン几何学
共立出版株式会社
1957

內 容 簡 介

黎曼几何学的研究有小区域与大区域之分．小区域的研究始于初期．本世紀以来，由于拓扑学的誕生，黎曼几何的研究傾向有了变化，大区域的研究成为人們所热衷的問題．本书正是从大区域的研究角度来叙述的．本书除介紹預备知識，如拓扑空間、可微分流形、测地綫、张量分析等外，还詳尽地評述了等长变换羣及运动羣．

黎 曼 几 何 学
佐佐木重夫 著
苏 步 青 譯
*
科 学 出 版 社 出版
北京朝阳門大街 117 号
北京市书刊出版业營业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
*
1964年 8 月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1964年 8 月第一印次刷　印张：5
印数：0001—5,800　字数：127,000
統一书号：13031·1977
本社书号：3041·13—1
定价：[科六] 0.80 元

前言

1854年由 B. Riemann 首創的所謂黎曼几何学，在其初期主要是从微分不变量的角度进行研究的。自从1915年被爱恩斯坦应用到一般相对論以后，这門分科的研究大致为空間的微小結构和空間概念的扩充等两个方面。如果用今天的語言来表达，这些都属于局部的研究范围。由于二十世紀数学的一个显著特点是拓扑学化，黎曼几何也不能不捲入这个趋势之中，因而，黎曼流形的微分几何結构和拓扑結构等有关方面的問題就成为主要的研究目标，这就是今天称为整体的黎曼几何学。

本书是作为这个整体黎曼几何学的导引而編成的，援用英語"An introduction to Riemannian geometry in the large"做书名最为合适。

为了解决讀者对預备知識的需要，在講述中尽量加以必要的补充，但是如果讀者有拓扑学、李羣論、变分学等方面的若干知識，就更便于閱讀了。在古典的（局部的）黎曼几何学方面，虽有了以E. Cartan, L. P. Eisenhart 的著作为首的种种参考书，但是单独就整体黎曼几何学写成的，在国际上还很罕見。

本书原先預定叙述到陈省身关于紧致黎曼流形的 Gauss-Bonnet 定理的著名研究为止，可是为篇幅所限，未能实現。作为导引性質的书籍，似乎也应該有一章专門講述空間型論，可惜的是，連这一点也做不到。

本年二月作者在九州大学数学系講述本书，那时修訂了一些不完备的地方。对于給我这个机会的九州大学数学系，特别是村主恆郎教授和帮我校对及做其他工作的东北大学各位先生表示感謝。此外，在本书付印时，承共立出版編輯部和出版部各位的支援，在这里也表謝意。

佐佐木重夫

1957年3月20日于仙台

目　　录

第一章　緒　論

§1. 拓扑空間

我們首先叙述拓扑空間的定义. 所謂拓扑空間就是具有这样的一系列邻域的集 M, 使这系列邻域满足下述的公理. 称 M 的元为点.

設在集 M 的每一点 P 至少有一个被称为 P 的基本邻域和它对应, 以 $U(\mathrm{P})$, $U_1(\mathrm{P})$, $U_2(\mathrm{P})$ 等表示 P 的基本邻域. P 的基本邻域全体的集称为 P 的 (或者 P 周围的) 邻域系, M 的各点邻域全体的集 $\sum$ 称为 M 的邻域系.

公理 I. 对于每一 $U(\mathrm{P})$, 必有 $\mathrm{P} \in U(\mathrm{P})$.

公理 II. 設 $U_1(\mathrm{P})$, $U_2(\mathrm{P})$ 是 P 的任意两个基本邻域, 必有这样的基本邻域 $U_3(\mathrm{P})$, 使 $U_3(\mathrm{P}) \subset U_1(\mathrm{P}) \cap U_2(\mathrm{P})$.

公理 III. 如果 $\mathrm{Q} \in U(\mathrm{P})$, 必有这样的基本邻域 $U(\mathrm{Q})$, 使 $U(\mathrm{Q}) \subset U(\mathrm{P})$.

当 M 的邻域系 $\sum$ 满足这三个公理时, 我們說 M 由 $\sum$ 赋与了拓扑, 或者說加上了拓扑, 而且称 M 为拓扑空間.

在拓扑空間, 对形成数学分析基础的凝聚点、开集、閉集、函数的連續性等概念都可以下定义. 例如, 設点 $\mathrm{P} \in M$, 而且有 M 的子集 N, 使得 P 的任何基本邻域 $U(\mathrm{P})$ 含有 N 中和 P 不同的一点, 那末点 P 称为 M 的凝聚点. 又当点 P 具有一个完全被含在 N 里的基本邻域 $U(\mathrm{P})$ 时, P 称为 N 的內点. 当属于 N 的所有点都是 N 的內点时, N 称为开集.

关于拓扑空間的詳細叙述可参考专著, 但是从以上說明可以窺見拓扑空間是形成現代数学基础的重要分科.

特别是, 作为拓扑空間的例子, 将叙述其中重要的尺度空間.

若M是由这样的元組成的集：对于M的每一元偶 A, B, 必有满足下列条件的非負实数 $\rho(A, B)$ 和它对应：

i）当且仅当 $A = B$ 时，$\rho(A, B) = 0$；

ii）$\rho(A, B) = \rho(B, A)$；

iii）設M的任意三点为 A, B, C, 有

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C),$$

则M称为尺度空間，M的各元称为它的点.

尺度空間是拓扑空間. 証明这事实. 作为尺度空間M的点 A 的邻域 $U_\varepsilon(A)$ 是这样选取的：对于任意正数 ε，使

$$\rho(A, B) < \varepsilon$$

成立的所有点 B 的集卽为所求. 如果变动点 A 和正数 ε，而且把由此产生的所有子集 $\{U_\varepsilon(A)\}$ 看成 M 的邻域系 $\sum$，那末拓扑空間的三个公理全部成立.

考察 n 个有序实数的組 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. 如果在两个組里至少有一对同一号碼的实数不相等，便把它們看成是不同的两組. 設 $x^1, \cdots, x^n$ 各取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的任意值，而且上述实数組全体是 M. 对于 M 的元 $X_1 = (x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^n)$ 和 $X_2 = (x_2^1, x_2^2, \cdots, x_2^n)$，选取

$$\rho(X_1, X_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_1^i - x_2^i)^2}$$

为距离的定义，那末 M 变为尺度空間. 这尺度空間称为欧几里得空間，以 E^n 表它.

公理 IV. 对于M的每对不同点 P, Q, 必存在基本邻域 $U(P)$, $U(Q)$，使得 $U(P) \cap U(Q)$ 是非空集.

凡满足这公理的拓扑空間 M，特别称为 Hausdorff 拓扑空間. E^n 是 Hausdorff 空間.

設已知的两邻域系 $\sum$, $\sum'$ 都是把M組成拓扑空間，这时可能发生这种情况，就是对于M的每一子集 N，凝聚点集是同一个，而且开集，閉集等也是一致的. 这时称两邻域系"定义了同一拓扑空間"或者称为等价.

$\sum$, $\sum'$ 等价的充要条件是：对于每一点 $P \in M$ 和每一基本邻域 $U(P) \in \sum$，必有这样的基本邻域 $U'(P) \in \sum'$，使得 $U(P) \supset U'(P)$；而且反过来，对于每一基本邻域 $V'(P) \in \sum'$，必有这样的基本邻域 $V(P) \in \sum$，使得 $V(P) \subset V'(P)$.

在給定的两拓扑空間 M, M' 里，如果对 M 的各点相应地可使 M' 的一点和它对应，那末称这对应为 M 到 M' 內的映象. 設 $P \in M$ 的对应点是 $P' \in M'$，映象可以表成函数記号

$$P' = f(P). \tag{1}$$

P' 称为点 P 的象. 当 M' 的所有点都是 M 的点的象时，称 f 为 M 到 M' 上的映象. 当給定 $P' \in M'$ 时，以 P' 为象的所有属于 M 的点的集称为 P' 的原象. 使 $P' \in M'$ 和它在 M 里的原象对应起来的映象，称为給定映象 f 的逆映象，且用 f^{-1} 表它.

設对于映象 f 給定了点 $P \in M$ 和它在 M' 中的象 $P' = f(P)$ 的任意邻域 $U'(P')$；如果能找出 P 的这样邻域 $U(P)$，使

$$f(U(P)) \subset U'(P')$$

成立，就称映象 f 在点 P 是連續的.

特别是，当 f 在 M 的所有点都是連續的时候，就称映象 f 在 M 上是連續的.

当映 M 到 M' 上的一对一映象 f 同它的逆映象 f^{-1} 一起，順次在 M, M' 上是連續时，映象 f 称为拓扑映象. 当映 M 到 M' 的拓扑映象 f 存在时，把点 $P \in M$ 和点 $P' = f(P)$ 看成同一点，便知道 M, M' 具有同一拓扑.

这时称两拓扑空間 M, M' 互为同胚.

給定两拓扑空間 M_1, M_2，設 $P_1 \in M_1$, $P_2 \in M_2$ 并考察所有点偶 (P_1, P_2) 的集 M_{12}. 現在設 M_1, M_2 的邻域系順次是 $\sum_1$, $\sum_2$；为了对 M_{12} 賦与拓扑，任意取 $U_1(P_1) \in \sum_1$, $U_2(P_2) \in \sum_2$ 而且設 $Q_1 \in U_1(P_1)$, $Q_2 \in U_2(P_2)$，从而作为 (P_1, P_2) 的基本邻域考察 (Q_1, Q_2) 这种点的全体. 这样下了基本邻域的定义之后，其全体 $\sum_{12}$ 很明显地满足公理 I, II, III，因此 M_{12} 是拓扑空間. 这个拓扑空間称为 M_1, M_2 的拓扑积，而用 $M_1 \times M_2$ 表它. 如果 M_1, M_2 都是 Hausdorff

空間，$M_1 \times M_2$ 也是 Hausdorff 空間.

欧几里得平面 E^2是两直綫的拓扑积，所以 $E^2 = E^1 \times E^1$. 一般地，n 維欧几里得空間可以看为 n 重拓扑积 $E^1 \times E^1 \times \cdots \times E^1$.

用連續映象 f 把綫段

$$I:\ a \leqslant t \leqslant b$$

（有时也作 $a < t < b$, $a \leqslant t < b$ 等）映到拓扑空間 M，它的象 $f(t)$ $(t \in I)$ 称为曲綫（或者連續曲綫）. 点 $f(a)$, $f(b)$ 称为这曲綫的端点，是由所論的連續曲綫連結起来的. 当拓扑空間M的任意两点可以用連續曲綫連結时，称它是綫性連通的.

設在拓扑空間M里有由开集組成的集 B，使得任意开集可以表成属于 B 的开集的和集，称 B 为M的基底.

如果拓扑空間M含有至多由可数个集形成的一个基底，就称它满足第二可数性公理.

設在拓扑空間M里有由开集組成的某一集，記作 $\Omega = \{U_\lambda\}$（λ 是为区别这些开集 U_λ 的記号，假定 λ 是在某集 Λ 的元中变动的. Λ 的元不一定是可数个）. 当任意取点 $P \in M$ 时，如果存在一个属于 Ω 的 U_λ 使 $P \in U_\lambda$，那末我們說 $\{U_\lambda\}$ 形成M的开复盖.

当M是满足第二可数性公理的拓扑空間时，只要給定M的任意开复盖 Ω，就可以从 Ω 中选出可数个开集，仅用这些开集把M复盖起来.

§2. 可微分流形

当拓扑空間M具有下列性質时，称为 C^r 級 $(r > 0)$ 的 n 維坐标流形并且記作 M^n:

(i) 在M的开复盖 $\{U_\lambda\}$ 里，对于各个 $\lambda \in \Lambda$，必有这样的 U_λ，使它和 n 維欧几里得空間 E^n 的某領域 D_λ 是同胚的. 把这个映象写成

$$f_\lambda:\ D_\lambda \to U_\lambda.$$

(ii) 設 U_λ, U_μ 是属于所論开复盖而且 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ 的任意

两开集. 置

$$D_{\lambda,\mu}=f_\lambda^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu),$$

那末

$$f_\mu^{-1}\circ f_\lambda:\ D_{\lambda,\mu}\to D_{\mu,\lambda}$$

是 C^r 級的可微分映象. 当 λ,μ 交換位置时,关于

$$f_\lambda^{-1}\circ f_\mu:\ D_{\mu,\lambda}\to D_{\lambda,\mu}$$

也是同样的.

(iii) M 是綫性連通并且满足第二可数性公理的拓扑空間.

M^n 的每一开集 U_λ 称为 M^n 的坐标邻域,$f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ 即 D_λ 中的坐标称为 U_λ 的对应点的局部坐标.

当 $U_\lambda\cap U_\mu$ 非空时, 設 U_λ, U_μ 中的局部坐标顺次是 $x^i_{(\lambda)}$, $x^i_{(\mu)}$ (以下用 i, j, k, l 等作为指标, 如无特别声明, 都假定是在 1, 2, $\cdots$, n 的数值中变动的).

$$\left.\begin{aligned}x^i_{(\mu)}&=x^i_{(\mu)}(x^1_{(\lambda)},\ \cdots,\ x^n_{(\lambda)}),\ x^i_{(\lambda)}\in D_{\lambda,\mu}\\ x^i_{(\lambda)}&=x^i_{(\lambda)}(x^1_{(\mu)},\ \cdots,\ x^n_{(\mu)}),\ x^i_{(\mu)}\in D_{\mu,\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

关于各自变数都是 C^r 級的可微分函数. 所以,例如只要注意在函数 $x^i_\lambda(x^1_{(\mu)},\ \cdots,\ x^n_{(\mu)})$ 里其值域是 $D_{\lambda,\mu}$ 的事实,关系式

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial x^i_{(\lambda)}}{\partial x^j_{(\mu)}}\frac{\partial x^j_{(\mu)}}{\partial x^k_{(\lambda)}}=\delta^i_k\tag{2}$$

便成立,式中 δ^i_k 表示:

$$\delta^i_k=\begin{cases}1, & \text{当 } i=k,\\ 0, & \text{当 } i\neq k,\end{cases}\tag{3}$$

称为 Kronecker 記号. 因此,在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 里就有

$$\det\left|\frac{\partial x^i_{(\lambda)}}{\partial x^j_{(\mu)}}\right|\neq 0,\tag{4}$$

$$\det\left|\frac{\partial x^i_{(\mu)}}{\partial x^j_{(\lambda)}}\right|\neq 0.\tag{4$'$}$$

以后經常要从 1 到 n 作和, 为方便起見, 对(2)式左边作和时略去記号 $\sum$. 但是, 由于同指标上下各出現一次, 容易看出这是在作和的. 例如,类似(2)式的式子

$$\frac{\partial x^i_{(\mu)}}{\partial x^j_{(\lambda)}}\frac{\partial x^j_{(\lambda)}}{\partial x^k_{(\mu)}}=\delta^i_k$$

也成立，而这就是略去左边的 $\sum_{j=1}^{n}$ 的式子。

当拓扑空間 M 是 n 維坐标流形时，坐标邻域系 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$ 的选择并不是唯一的。設 M 按照 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$，$\lambda\in\Lambda$；$\{W_\alpha, F_\alpha, h_\alpha, z_{(\alpha)}\}$，$\alpha\in A$ 两种方式变为坐标流形，任何邻域 W_α 被包含在某一个邻域 U_λ 之中，而且当映象

$$f_\lambda^{-1}\circ h_\alpha:\ F_\alpha\to D_\lambda$$

是 C^r 級的函数，函数行列式 $\left|\frac{\partial x^i_{(\lambda)}}{\partial z^j_{(\alpha)}}\right|\neq 0$ 时，坐标邻域系 $\{W_\alpha, F_\alpha, h_\alpha, z_{(\alpha)}\}$ 称为 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$ 的**細分**。

設拓扑空間 M 按照 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$，$\{V_\rho, E_\rho, g_\rho, y_{(\rho)}\}$ 两种方式被看为 n 維坐标流形；如果 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$ 和 $\{V_\rho, E_\rho, g_\rho, y_{(\rho)}\}$ 有共通的細分 $\{W_\alpha, F_\alpha, h_\alpha, z_{(\alpha)}\}$，就称給定的两坐标流形是等价的，并且表达为

$$\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}\sim\{V_{(\rho)}, E_{(\rho)}, g_\rho, y_{(\rho)}\}.$$

很明显，等价条件满足下列三条件中的前两个：

$A\sim A$；

如果 $A\sim B$，那末 $B\sim A$；

如果 $A\sim B$，$B\sim C$，那末 $A\sim C$。

第三条件就是：当

$$\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}\sim\{V_\rho, E_\rho, g_\rho, y_{(\rho)}\},\tag{5}$$

$$\{V_\rho, E_\rho, g_\rho, y_{(\rho)}\}\sim\{W_\alpha, F_\alpha, h_\alpha, z_{(\alpha)}\}\tag{6}$$

时，便有

$$\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}\sim\{W_\alpha, F_\alpha, h_\alpha, z_{(\alpha)}\}.\tag{7}$$

証明如次。

先假定使(5)成立的 U，V 的細分是 $\{X_\delta, G_\delta, m_\delta, \xi_{(\delta)}\}$，又假定使(6)成立的 V，W 的細分是 $\{Y_\theta, H_\theta, n_\theta, \eta_\theta\}$，而且当 $X_\delta\cap Y_\theta\neq\phi$ 时，考察

$$\begin{aligned}&\{X_\delta\cap Y_\theta,\ m_\delta^{-1}(X_\delta\cap Y_\theta),\ m_\delta,\ \xi_{(\delta)}\},\\&\{X_\delta\cap Y_\theta,\ n_\theta^{-1}(X_\delta\cap Y_\theta),\ n_\theta,\ \eta_{(\theta)}\},\end{aligned}\tag{8}$$

以及这样坐标邻域全体;这就給出 V, W 的細分. 这是由于,例如对于 $(X_\delta\cap Y_\theta)\cap(X_\varepsilon\cap Y_\tau)\neq\phi$ 的型如(8)的两坐标邻域,考察分别包含 Y_θ, Y_τ 的 $\{V_\alpha, E_\alpha, g_\alpha, y_{(\alpha)}\}$, $\{V_\beta, E_\beta, g_\beta, y_{(\beta)}\}$ 的邻域,那末对于 $(X_\delta\cap Y_\theta)\cap(X_\varepsilon\cap Y_\tau)$ 上的两种坐标 $\xi^i_{(\delta)}$, $\xi^i_{(\varepsilon)}$,

$$\frac{\partial\xi^i_{(\delta)}}{\partial\xi^l_{(\varepsilon)}}=\frac{\partial\xi^i_{(\delta)}}{\partial y^j_{(\theta)}}\frac{\partial y^j_{(\theta)}}{\partial y^k_{(\tau)}}\frac{\partial y^k_{(\tau)}}{\partial\xi^l_{(\varepsilon)}}$$

成立. 从假設看出,右边行列式不等于 0,因此 $\left|\dfrac{\partial\xi^i_{(\delta)}}{\partial\xi^l_{(\varepsilon)}}\right|\neq 0$ 成立.

在其他两种情况下,完全同样地可以証明 $\left|\dfrac{\partial\xi}{\partial\eta}\right|\neq 0$, $\left|\dfrac{\partial\eta}{\partial\eta'}\right|\neq 0$.

互为等价的 C^r 級 n 維坐标流形組成一类,称为 C^r 級 n 維可微分流形.

坐标流形是可微分流形的一种表示法.

如果可微分流形在 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ 的情况下常可表示为这样的坐标流形,使得关于对应的坐标变換的函数行列式成立

$$\det\left|\frac{\partial x_{(\mu)}}{\partial x_{(\lambda)}}\right|>0,$$

就称它是可定向的.

当 M^n 是可定向的可微分流形时,約定所用的是上述的坐标流形.

在适当的坐标邻域系 $\{U_\lambda, D_\lambda, f_\lambda, x_{(\lambda)}\}$ 的选定下,如果对于 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ 的 U_λ, U_μ 給出坐标变換的函数都是 C^∞ 級,就称 M^n 为 C^∞ 級可微分流形;如果是解析函数(有时称 C^ω 級函数),就称为解析流形或 C^ω 級可微分流形.

欧几里得空間 E^n 显然是解析流形. 其次,将証明 E^3 的球面

$$S^2:\ x^2+y^2+z^2=a^2$$

是二維解析流形.

証. 以所論球面与各坐标軸的六交点的每个为中心,分别画出球面半径等于 $\frac{\pi a}{3}$ 的圓,而把这些圓的內部看成是坐标邻域. 为方便計,把中心 $(a, 0, 0)$ 的邻域記作 U_x^+, 中心 $(-a, 0, 0)$ 的邻域記作 U_x^- 等等.

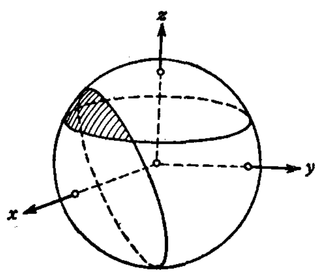

图 1

設点 P 的笛卡儿坐标是 $x(\mathrm{P})$, $y(\mathrm{P})$, $z(\mathrm{P})$.

当 $\mathrm{P} \in U_x^+$ 时,把由 $x^1 = y(\mathrm{P})$, $x^2 = z(\mathrm{P})$ 給定的 (x^1, x^2) 看做 P 的坐标;当 $\mathrm{P} \in U_x^-$ 时,把由 $x^1 = z(\mathrm{P})$, $x^2 = y(\mathrm{P})$ 給定的 (x^1, x^2) 看做 P 的坐标. 关于 U_y^+, U_y^-, U_z^+, U_z^- 等也是同样.

这样一来,例如在 $U_x^+ \cap U_z^+$ 里,

如果看做 U_z^+ 的点,坐标是 (x, y),

如果看做 U_x^+ 的点,坐标是 (y, z).

所以从 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 得出

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}.$$

可是在 $U_x^+ \cap U_z^+$ 里 $x > 0$, $z > 0$, 所以

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} > 0.$$

如果注意到在 $U_x^+ \cap U_z^-$ 里 $z < 0$, $x > 0$, 便有

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(y, x)} = -\frac{x}{z} > 0.$$

在其他交集里也是一样的.

完全同样地可以証明: E^{n+1} 的超球

$$S^n:\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = a^2$$

是 n 維解析流形.

在 E^3 里平滑的卵形面、环面(橡皮圈的表面一类的曲面)、圓柱、双曲面等等二維可微分流形还有很多,举不胜举. 被称李羣的

羣流形也是可微分流形的好例子而且是重要的例子，但这里的說明从略。

从定义容易看出下列定理成立：

定理 1.1. C^r 級可微分流形也是 $C^s(s<r)$ 級可微分流形(但是，当 $r=\omega$ 时，看做 $\infty<\omega$)。

設有开集 U 不属于 M^n 的坐标邻域系 $\{U_\lambda\}$，由 $f: D\rightarrow U$ $(D\subset E^n)$ 导入坐标到 U 里；如果对于使 $U\cap U_\lambda$ 非空的每一个 λ，$U\cap U_\lambda$ 的坐标变换两組都是 C^r 級，U 同 $\{U_\lambda\}$ 一起被称为可容許的坐标邻域。

所謂在 C^r 級可微分流形 M^n 上定义的函数 f 是 C^s 級 $(0\leqslant s\leqslant r)$ 的提法，是指下述情况而言，就是在每一坐标邻域 U_λ 里，f 关于它的坐标 x^i 是 C^s 級函数（这事实称为 f 到 U_λ 的限制）。当 $U_\lambda\cap U_\mu$ 非空时，如果 f 在 U_λ 內是 C^s 級，用 x^i，x'^i 分别表示在 U_λ，U_μ 內的坐标，那末在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 里 $f(x(x'))$ $(x^i(x')$ 是坐标变换的函数)关于 x'^i 也是 C^s 級，从而这定义具有意义。但是，在 C^r 級流形 M^n 里，C^t 級 $(t>r)$ 的函数是沒有意义的。

在 C^r 級可微分流形 M^n 里，考察連續曲綫

$$\mathrm{C}:\ I\xrightarrow{f}M^n\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

当C被包含在唯一坐标邻域 U_λ 內时，它是由型如

$$x^i=f^i(t)$$

的方程表示的，这里 $f^i(t)$ 在 I 內是連續函数。如果其中的 $f^i(t)$ 是 C^s 級$(1\leqslant s\leqslant r)$，而且

$$\sum\left(\frac{df^i}{dt}\right)^2\neq 0\quad(t\in I),\tag{9}$$

称所論曲綫C是 C^s 級曲綫。

当曲綫C不包含在唯一坐标邻域內时，容易看出，C是由有限个 U_λ 复盖着的。

在和 C 具有共通部分的这些坐标邻域 U 里，$U\cap\mathrm{C}$ 是由几个子弧接成的。当这些子弧在 U 里都是 $C^s(0\leqslant s\leqslant r)$ 級曲綫时，称C为 M^n 中的 C^s 級曲綫。

連續曲綫也称 C^0 級曲綫. 在解析流形里也可考察解析曲綫 (C^ω 級曲綫). 为方便計, 还称由絕对連續函数表示的曲綫为 C^a 級曲綫. 有时称有限个 C^1 級曲綫接成的曲綫为 D^1 級曲綫.

§3. 切空間、向量与张量

在可微分流形 M^n 的一个坐标邻域 U 里, 考察一点 P, 并設其坐标是 x_0^i. 以点 P 为起点,考察落在 U 內的 C^1 級曲綫

$$x^i = x^i(t),\ 0 \leqslant t \leqslant t_1;\ x^i(0) = x_0^i,$$

称 $\dot{x}^i(0) = \left[\frac{dx^i}{dt}\right]_{t=0}$ 为所論曲綫的点 P 的切綫向量.

当点 P 包含在两坐标邻域 U, U' 的共通部分 $U \cap U'$ 时,在 U' 內所論的曲綫或其子弧可以表为

$$x'^i = x'^i(x(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant t_2$$

($t_2 \leqslant t_1$), 而且还有关系式

$$\dot{x}'^i(0) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \dot{x}^j(0).$$

$\dot{x}'^i(0)$ 与 $\dot{x}^i(0)$ 的坐标邻域不同, 表示各异, 但是在几何学上可以看做是同一对象. $\dot{x}^i(0)$, $\dot{x}'^i(0)$ 称为在 U, U' 坐标系下这向量的支量.

例如,在坐标邻域 U 里,由

$$x^1 = t,\ x^a = x_0^a \quad (a = 2, 3, \cdots, n)$$

給定的曲綫称为通过点 P 的 x^1 曲綫,而且其切綫向量 $\mathbf{e}_1$ 的支量是 δ_1^i. 同样, x^2 曲綫, $\cdots$, x^n 曲綫的切綫向量 $\mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的支量分別是 $\delta_2^i, \cdots, \delta_n^i$.

从点 P 发出的所有 C^1 級曲綫的切綫向量集撑成 n 維向量空間,这是因为,从

$$\dot{x}^i(0) = \dot{x}^1(0)\delta_1^i + \cdots + \dot{x}^n\delta_n^i$$

可以把支量 $\dot{x}^i(0)$ 的向量 $\mathbf{X}$ 写成

$$\mathbf{X} = \dot{x}^1(0)\mathbf{e}_1 + \cdots + \dot{x}^n\mathbf{e}_n,$$

而且以任意 n 个实数組为支量的向量一定存在. 这向量空間称为 M^n 在点 P 的切空間, 并以 $A^n(\mathrm{P})$ 表乇. 含 P 的坐标邻域調換后,

就产生在 $A^n(\mathrm{P})$ 中的从 $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 到 $(\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n)$ 的变换.

U 坐标系下支量 v^i 的向量在 U' 坐标系下的支量决定于

$$v'^i = \left[\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right]_{x_0} v^j. \tag{1}$$

当点 P 属于三个坐标邻域 U, U', U'' 的共通部分 $U \cap U' \cap U''$ 时，置

$$v''^i = \left[\frac{\partial x''^i}{\partial x^j}\right]_{x_0} v^j,$$

便有

$$v''^i = \left[\frac{\partial x''^i}{\partial x'^k}\right]_{x'_0} \left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\right]_{x_0} v^j,$$

所以

$$v''^i = \left[\frac{\partial x''^i}{\partial x'^k}\right]_{x'_0} v'^k.$$

由此看出,不同坐标邻域的向量的等价关系满足等价条件.

設 v^i 是切向量空間 $A^n(\mathrm{P})$ 的一般向量；如果考察一次形式 $\sum_{i=1}^{n} w_i v^i$ 的全体，由于有独立的 n 个，这些又作成 n 維向量空間. 称乜为切向量空間的**对偶空間**，而用 $^*A^n(\mathrm{P})$ 表乜. w_i 是其向量的支量. 几何学上把 $^*A^n(\mathrm{P})$ 的向量 w_i 看作是 $A^n(\mathrm{P})$ 里由

$$w_i v^i = 0$$

給定的超平面較为方便. 对应于坐标邻域 U 而生成的 $^*A^n(\mathrm{P})$ 的基底是从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 中抽掉第 i 个之后用其余 $(n-1)$ 个向量撑成的超平面.

当点 P 含在坐标邻域 U, U' 的共通部分时，如果关于 U, U' 的在 P 的对偶空間的向量 w_i, w'_i 具有关系

$$w_i v^i = w'_i v'^i,$$

就看成为同一向量.

从(1)得出

$$\left(w_i - \left[\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right]_{x_0} w'_j\right) v^i = 0.$$

因为 v^i 是任意的，就看出

$$w_i = \left[\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right]_{x'_0} w'_j. \tag{2}$$

这式又可改写为

$$w'_i = \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right]_{x'_0} w_j. \tag{2$'$}$$

所以，当 $P\in U\cap U'$ 时，在 $^*A^n(P)$ 也产生了基底的变换.

对偶空間的向量称为共变向量，同这相对地有时称切空間的向量为反变向量，(1)，(2)$'$ 称为向量在坐标变换时的变换律.

对于点 P 的切空間 $A^n(P)$ 的向量 v，取其对偶空間 $^*A^n(P)$ 的向量 w 同它对应，这个一次变换 T（如果借射影几何的用語来表达，就是逆射）称为二阶共变张量. 設 P 含在坐标邻域 U，这变换可以表成

$$w_i = T_{ij}v^j. \tag{3}$$

如果 P 也属于坐标邻域 U'，也可写做

$$w'_a = T'_{ab}v'^b.$$

可是后者可以写成

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^a} w_i = T'_{ab}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j} v^j,$$

所以

$$w_i = T'_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j} v^j.$$

同(3)比較，便导出关系式

$$T_{ij} = T'_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j}, \tag{4}$$

T_{ij}，T'_{ab} 是所論的共变张量关于 U，U' 的支量，而且 (4) 是它的关于坐标变换的变换律. 如果

$$T_{ij} = T_{ji}, \tag{5}$$

很明显看出：关于 T'_{ab} 也成立类似的关系式. 具有这样的支量的张量，称为对称的二阶共变张量. 同样，凡满足关系式

$$T_{ij} = -T_{ji} \tag{6}$$