创新版奥林匹克竞赛丛书
Olympic Games

中国华罗庚学校数学课本

初三年级

总策划 何 舟
本册主编 韩乐琴

吉林教育出版社

中国华罗庚学校数学课本

为寻求智力和潜能得到开发的学生提供契机

——总主编的心愿

最新的理念 涵盖《大纲》要求，又不拘泥于大纲；使青少年懂得数学探究的过程，拓展研究成果和思维空间；形成创造性学习的优势，获得可持续发展。

最优的结构 每章创设有探索价值的开放性数学问题，提出重难点所在，指点解决的方法、策略；每节给出教材可用结论，提出拓展的“探究目标”，展示“探究过程”，设计“拓展练习”，让学生参与、体验、发展；章末的“本章小结”，提炼知识、规律、能力、方法、观点，揭示应注意的问题。

最强的阵容 丛书各册主编与撰稿人均为知名专家和奥林匹克教练，具有长期从事开发3%左右智力超常青少年潜能的经验，善于创设数学背景问题，引导学生探究，走向成功。

中国华罗庚学校数学课本 · 小学一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学三年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学四年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学五年级
中国华罗庚学校数学课本 · 小学六年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 初三年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高一年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高二年级
中国华罗庚学校数学课本 · 高三年级

ISBN 7-5383-4337-7

ISBN 7-5383-4337-7/G · 3958
定价：13.80元

创新版奥林匹克竞赛丛书 Olympic Games
中国华罗庚学校数学课本
初三年级
吉林教育出版社

中国
华罗庚学校
数学课本

初三年级

总策划　何　舟

总主编　马传渔

本册主编　韩乐琴

撰　　稿　王忠钦　李桂春　朱兴国

　　　　　黄彩英　温　洪　陈　平

吉林教育出版社

（吉）新登字02号
封面设计：杨　蕙
责任编辑：王世斌　李　智

创新版

奥林匹克竞赛丛书

中国华罗庚学校数学课本

初三年级

总 策 划　何　舟
本册主编　韩乐琴

★

吉林教育出版社 出版 发行
山东滨州教育印刷厂印刷　新华书店经销

★

开本：880×1230毫米　1/32　印张：10.375　字数：308千字
2002年6月吉林第1版　2002年6月山东第1次印刷
本次印数：20000册

ISBN 7-5383-4337-7/G·3958
定价：13.80元

总主编的话

第31、35届I.M.O.选题委员会委员
南京大学数学系教授、享受国务院政府津贴
马传渔

由我国著名数学家华罗庚、苏步青两位教授于1956年负责举办的全国部分省、市高中数学竞赛，为我国数学竞赛拉开了序幕。历经近50年方方面面的努力，各层次的数学竞赛已在全国开展得红红火火、蓬蓬勃勃，它为开发广大学生的智力，为培养数学奥林匹克师资队伍，为国际数学奥林匹克(I. M. O.)选拔人才，为早期发现与培养现代杰出科技苗子产生了巨大的作用。

为缅怀华罗庚教授的光辉业绩，弘扬华罗庚教授的敬业精神，全国最早由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办了北京市华罗庚学校，经过近20年的发展，小学、初中、高中三个层次的华罗庚学校已遍布全国各地，各种版本华罗庚学校的教材已相映生辉，令人目不暇接。我们这套《中国华罗庚学校数学课本》丛书，愿为漫步在数学奥林匹克殿堂中的广大读者铺路。

本丛书体现了知识点的增加、知识面的扩大和知识框架的更新，强化了新世纪教学思想的介绍与渗透，突出了数学方法的总结和应用，具有可读性、启迪性和实用性。

1. 本丛书是一套规范的系列奥林匹克培训

M4-7/05

教材，小学包含 1～6 年级 6 个分册，中学包含初一到高三年级 6 个分册，共计 12 本。本丛书不仅体现了小学、初中、高中三个层次内容上的衔接，而且强调了解题方法上的衔接。

2. 本丛书**源于教学**，系参照现行中小学《数学教学大纲》，编写而成，既覆盖了相应教材中的各个知识点，与现行教材同步，又增添了不少解题方法的篇章。

3. 本丛书**高于教学**，紧扣各级数学竞赛大纲，每册读本既详尽地介绍各级数学竞赛的内容和题型，又由浅而深地引入竞赛中经常使用的各种数学思想和数学方法。本书“**本章小结**”栏目，对每章相关的知识点、解题方法、问题的规律、应用的范围、伸展与拓广、创新与灵感作了总结与提炼。

4. 本丛书以趣例引入，具有浓厚的**趣味性**；以生活实例作背景介绍数学内容，具有广泛的**应用性**；以探索性、操作性范例作展示，具有丰富的**启迪性**，能激发广大中小学生学习数学的兴趣。

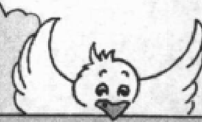
5. 本丛书注意到**与各级数学竞赛接轨**，强调数学技能与解题能力的循序渐进的训练与培养，“**探究过程**”栏目中所提供的实例题意新颖、内容丰富，十分贴近各级数学竞赛试题，能帮助数学特长生在数学竞赛中获胜，为个别数学特长生冲刺奥林匹克金牌架设桥梁。

6. 本丛书由名牌大学**数学教授**、**命题专家**、**特级教师**、**学科带头人**、**奥林匹克教练员**编写而成，既可作为一本课外读物，也可作为数学辅导书及数学培训班、数学兴趣小组的试用教材与参考书，还可作为中小学教师培训奥林匹克的教本。

“千里之行，始于足下。”愿《中国华罗庚学校数学课本》陪伴广大数学爱好者在汗水中积累知识，在灵感中启迪智慧，在玩乐中迎接成功。

中国华罗庚学校数学课本
编　委　会

结识名师

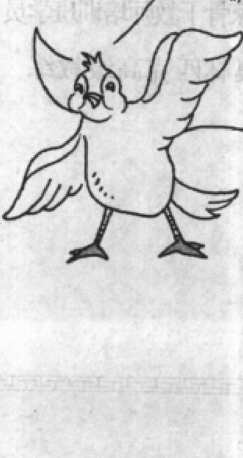


韩乐琴

中学高级教师，1969 年毕业于北京大学数学力学系，1995 年于首都师范大学奥林匹克硕士研究生班研读毕业。

执教 30 多年来，她一直从事理科实验班的教学工作，有丰富的一线教学经验，所教的学生曾多次获得全国联赛和奥林匹克竞赛的一、二、三等奖，教育教学工作成绩显著。

她主编的助学、助考读物有《解题思维能力发散训练》《海淀新考王》《海淀名题》《初中数学总复习归纳丛书》《海淀备考》《重点难点得分点大突破丛书》《海淀考王》等数十部，并参与了《高考宝典》《中国考典》《现行中学教材同步辅导与练习》等十余部书的编撰工作。

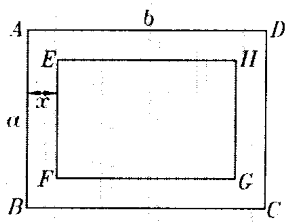


目录

第一章　一元二次方程

一元二次方程是数学中的重要内容，在数学竞赛中也经常出现．它是解决高次方程和其他方程的基础，而且研究它的根的分布、根与系数的关系也是很有意义的．

如图，有一块矩形地 $ABCD$，要在中央修建一矩形花圃 $EFGH$，使其面积为这块矩形地面积的一半，且花圃四周道路的宽相等，今无测量工具只有无刻度的足够长的绳子一条，如何量出道路的宽度？



解：设道路的宽度为 x，$AB=a$，$AD=b$，则

$$(a-2x)(b-2x)=\frac{1}{2}ab.$$

$$8x^2-4(a+b)x+ab=0.$$

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$

由于 $2x=\dfrac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}>\dfrac{a+b+b}{2}>b$（不合题意），

故 $$x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}=\frac{AB+AD-BD}{4}.$$

具体量法，用绳量出 $AB+AD$，再减去 BD 之长，将余下的 $AB+AD-BD$ 对折两次，即得到道路的宽

$$x=\frac{1}{4}(AB+AD-BD).$$

解决上述问题，就可以根据题意建立一元二次方程，再解这个一元二次方程．

本章将主要介绍一元二次方程的解法、一元二次方程的根、方程的判别式、根与系数的关系及一元二次方程的应用．

第一节　解一元二次方程和一元二次方程的根

一元二次方程的基本解法有多种，如直接开方法、配方法、公式法、十字相乘法．如何综合运用这些方法去解决一些一元二次方程问题是值得研究的．如含有绝对值的方程，及带有参数的一元二次方程等．一元二次方程的根有三种情况：两个不等实根、两个相等实根、无实根，但数系发生变化，结论也要相应发生变化．对于这类问题进行研究，也是很有趣的事情．如有理数根、整数根、素数根、奇偶数根等．两个一元二次方程是彼此独立的，但有时两个一元二次方程可能会有公共根，一个或两个，也具有研究意义．

探究目标

1. 特殊的形如一元二次方程的解法．
2. 含有参数的一元二次方程根的性质．
3. 含两个参数的一元二次方程的公共根．

探究过程

1. 含有绝对值的形如一元二次方程的解法．

在数学竞赛中，经常发现在方程的局部或某一边出现绝对值（形如 $ax^2+b|x|+c=0$），这类问题应如何解答．

建议：对于这类问题应该首先考虑去掉绝对值符号．去掉绝对值符号可以根据绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

也可以利用换元法．

讨论：如果根据绝对值的定义，则可以分 $x\geqslant 0$ 和 $x<0$ 两种情况去解．解两个一元二次方程，同时要考虑根的范围．如果利用换元法，就需要有整体分析的意识．采用这两种思路去研究，可以巩固分类讨论的数学思想、整体分析的数学意识和换元法这种重要的数学方法．

例1　方程 $x^2-3|x|+2=0$ 的最小根的负倒数是______．

解法一：(1)当 $x\geqslant 0$ 时，则有

$$x^2-3x+2=0.$$

解得

$$x_1=1, x_2=2. \tag{1}$$

(2)当 $x<0$ 时,则有

$$x^2+3x+2=0.$$

解得

$$x_3=-1,x_4=-2.$$

由(1)(2)可知,方程 $x^2-3|x|+2=0$ 的最小根为 -2,那么它的负倒数为 $\frac{1}{2}$.

解法二:原方程可化为

$$|x|^2-3|x|+2=0.$$

设 $y=|x|$,则

$$y\geqslant 0.$$

∴ 方程可化为 $y^2-3y+2=0$.

∴

$$y_1=1,y_2=2,$$

即

$$|x|=1\text{ 或 }|x|=2.$$

∴

$$x_1=1,x_2=-1,x_3=2,x_4=-2.$$

∴ 原方程 $x^2-3|x|+2=0$ 的最小根为 -2,它的负倒数为 $\frac{1}{2}$.

例2 方程 $|x^4-4x^2|=4$ 的实数根的个数是______.

解:(1)当 $x^2\geqslant 4$ 时,方程为

$$x^4-4x^2-4=0.$$

解出

$$x^2=2+2\sqrt{2}>4.$$

得

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

(2)当 $x^2<4$ 时,方程为

$$x^4-4x^2+4=0.$$

解出

$$x^2=2<4.$$

得

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{2}.$$

综上可知,方程有 4 个实根.

例3 已知 $\frac{1}{a}-|a|=1$,那么,代数式 $\frac{1}{a}+|a|$ 的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

解:由已知,可知 $a,\frac{1}{a},|a|$ 都是正数,则

$$\left(\frac{1}{a}-|a|\right)^2=1$$

∴

$$\frac{1}{a^2}+|a|^2=3.$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{1}{a}+|a|\right)^2=5.$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{a}+|a|=\sqrt{5}.$$

选 D.

例 4 a 是实数,解方程 $x|x+1|+a=0$.

解:(1)当 $x<-1$ 时,原方程变形为

$$x^2+x-a=0. \qquad ①$$

当 $\Delta=1+4a\geqslant 0$,且 $a=-x|x+1|>0$,

即 $a>0$ 时,①的解为 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$,但须 $x<-1$,故

$x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ 是原方程的解.

(2)当 $x\geqslant -1$ 时,原方程为

$$x^2+x+a=0. \qquad ②$$

当 $\Delta=1-4a\geqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{4}$ 时,②有解.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}.$$

又 $x\geqslant -1$ 时,即 $\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\geqslant -1$.

所以,当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ 时,$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$ 是原方程的解;当 $a<0$ 时,$x=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ 是原方程的解.

综上所述,当 $a<0$ 时,原方程的解为 $x=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$;

当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ 时,原方程的解为 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$;

当 $a>\frac{1}{4}$ 时,$x=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

2. 带有参数的一元二次方程的解法.

有些时候方程的系数带有字母,这类问题在解题过程中经常出现,我们该如何解决呢?

建议:这类问题首先要考虑二次项的系数,如果为 0 就不是一元二次方程,这种情况要特殊处理;如果不为 0,则要按照一元二次方程的解法,可以配方,也可以考虑它的判别式.有时也要考虑因式分解,特别是后者往往能起到事半功倍的效

果.

讨论：在研究问题的过程中一直带有分类讨论的数学思想. 在具体的研究过程中还要用到配方这种重要的数学方法，以及灵活运用的数学意识（如采用因式分解）. 现在，我们就以方程 $ax^2+bx+c=0$ 为例来进行一般性的说明.

1. 如果 $a=0$，则方程可化为 $bx+c=0$.

当 $b\neq0$ 时，$x=-\frac{c}{b}$；

当 $b=0, c=0$ 时，x 为任意实数；

当 $b=0, c\neq0$ 时，x 无解.

2. 如果 $a\neq0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 是一元二次方程.

当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时，原方程有两实根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，原方程无实根.

例 5 解关于 x 的方程 $x^2-3mx+2m^2-mn-n^2=0$.

解法一：

$$\begin{aligned}\Delta&=(-3m)^2-4\times1\times(2m^2-mn-n^2)\\&=9m^2-8m^2+4mn+4n^2\\&=m^2+4mn+4n^2\\&=(m+2n)^2.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{3m\pm\sqrt{(m+2n)^2}}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=2m+n, x_2=m-n.$$

解法二：方程左边常数项为 $2m^2-mn-n^2=(2m+n)(m-n)$.

根据十字相乘法方程左边可因式分解，原方程可化为

$$[x-(2m+n)][x-(m-n)]=0.$$

$$\therefore\quad x_1=2m+n, x_2=m-n.$$

3. 带有参数的一元二次方程的根的性质.

在近几年的国内外竞赛中，常常会出现含有参数的且研究根的性质的一元二次方程问题，一元二次方程的根可能会是实数、有理数、整数等. 在不同的数系当中，会有不同的性质，这类问题的研究是复杂的，也是具有挑战性的.

建议：这类问题研究时要分别分析根的不同性质：何时具奇偶性，何时是素数根，何时是整数根，何时是共轭根. 在这类问题的解答过程中应结合具体实际加以解答.

讨论：(1)若有理系数一元二次方程有一根 $m+\sqrt{n}$，则必有另一根 $m-\sqrt{n}$

(m,n 为有理数).

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，在 $\Delta\geqslant0$ 时有两个实根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，且 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，求整数根一般有：

①Δ 为完全平方式且必须 $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}=k$(k 为 $2a$ 的整数倍).

②$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$为整数，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$为整数，且必须代入原方程检验.

③用整数的性质进行综合分析.

④变换主元进行讨论.

这里，我们主要对(1)进行一个简要的证明：

若 m,n 是有理数，$\sqrt{n}$是无理数，$m+\sqrt{n}$是一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0) \quad ①$$

的一个根，则 $m-\sqrt{n}$也是方程的一个根.

证明：∵　$m+\sqrt{n}$是方程的一个根，

$$\therefore \quad a(m+\sqrt{n})^2+b(m+\sqrt{n})+c=0.$$

$$\therefore \quad (am^2+bm+an+c)+(2am+b)\sqrt{n}=0.$$

$$\therefore \quad \begin{cases}am^2+bm+an+c=0,\\2am+b=0.\end{cases}$$

将 $m-\sqrt{n}$代入方程①，得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=a(m-\sqrt{n})^2+b(m-\sqrt{n})+c\\&=(am^2+bm+an+c)-(2am+b)\sqrt{n}\\&=0-0\cdot\sqrt{n}\\&=0=\text{右边}.\end{aligned}$$

故 $m-\sqrt{n}$也是方程①的一个根.

例6 设 a,b 是整数，方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根是$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$，则 $a+b=$____.

解法一：∵

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{4-2\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3},$$

又∵　$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$是方程的根，

$$\therefore \quad (2-\sqrt{3})^2+a(2-\sqrt{3})+b=0.$$

$$\therefore \quad (7+2a+b)-(4+a)\sqrt{3}=0.$$

$$\therefore \quad \begin{cases}7+2a+b=0,\\4+a=0.\end{cases}$$

$\therefore$ $$\begin{cases} a=-4, \\ b=1. \end{cases}$$

$\therefore$ $$a+b=-4+1=-3.$$

解法二：根据我们前面研究出的结论：

$\because$　$2-\sqrt{3}$是原方程的根，

$\therefore$　$2+\sqrt{3}$也是原方程的根.

$\therefore$ $$a=-(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})=-4.$$

$$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1.$$

$\therefore$ $$a+b=-3.$$

例7　已知方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的整数根，p,q 为自然数，且是素数，则这个方程的根较大的是______.

解：设原方程的两个不相等的整数根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p<0, & ① \\ x_1\cdot x_2=q>0. & ② \end{cases}$$

由②知，x_1,x_2 同号；再由①知，x_1,x_2 均为负整数.

若 q 为奇素数，则 x_1,x_2 均为奇数，因此 p 为偶素数，即

$$x_1+x_2=-p=-2.$$

满足上式只有 $x_1=x_2=-1$，与已知条件矛盾.

所以 q 为偶素数，即 $q=2$，进而

$$x_1=-2, x_2=-1,$$

且 $p=-(x_1+x_2)=3$ 为素数.

故方程的较大根是 -1.

例8　求满足条件的所有 m 值：使关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+m-1=0$ 的根都是整数.

解：(1)当 $m=0$ 时，所给方程是一次方程为 $x-1=0$，有整数根 1；

(2)当 $m\neq0$ 时，所给方程为二次方程.

设两个整数根为 x_1,x_2，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{m}=-1-\dfrac{1}{m}, & ① \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{m-1}{m}=1-\dfrac{1}{m}. & ② \end{cases}$$

由①－②，得

$$x_1+x_2-x_1x_2=-2.$$

初三数学