拓扑学引论

第一分册

点集拓扑学

江泽涵 著

上海科学技术出版社

拓 扑 学 引 论

第一分册

点 集 拓 扑 学

江 澤 涵 著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书闡述拓扑学的基础理論，共七章及三篇附录，分二册出版。

第一分册点集拓扑学，共二章，第一章讲述度量空間，独自成为一个完整的系統．第二章拓扑空間，較詳細地討論滿足可数性公理的 T_1 空間和紧致 Hausdorff 空間．

本分册是拓扑学基础課的第一部分，也可供需要点集拓扑学知識的数学工作者参考．

拓 扑 学 引 论

第一分册　点集拓扑学

江 澤 涵 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海新华印刷厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 2 14/32　排版字数 55,000

1964 年 9 月第 1 版　1964 年 9 月第 1 次印刷　印数 1—6,500

統一书号 13119·592　定价（科六）0.40 元

序

作者在北京大学讲授过拓扑学基础課多次,积累了一些讲稿,并油印过一部分. 前年才能把这些讲稿整理成一本比較完整的拓扑学引論讲义. 这本讲义曾由岳景中和熊金城两同志在中国科学技术大学試用,姜伯駒、祝尔家两同志和作者在北京大学試用. 根据試用时发現的問題,又作了不少修改.本分册点集拓扑学是修改后的第一部分. 其余部分包括多面体的同調論、拓扑空間的同調論等,将继續付印.

作者的目的是要把本书写成拓扑学基础課的一个教本. 大家都认为这样的一个教本应从同学的实际出发,应內容精簡、条理清楚、重点突出. 作者也試图把这些要求作为本分册的理想目标,作了一些努力. 例如第一,把本分册中的度量空間的全部定理安排在第一章中,同时尽量説明第一章中的一些定理能否推广成第二章中拓扑空間的定理、以及能否推广的理由;第二,在本分册第二章中用三节(§4, §5, §7)来討論三种特殊的拓扑空間. 但同时,作者深深感到由于思想水平与业务水平的限制,本分册远未达到要求;誠恳地欢迎讀者批評指正.

在编写本分册的整个过程中,姜伯駒同志經常閱讀、修改和补充草稿;而且第一章前三节的綱要和第二章末一节的草稿是他执笔的. 他和岳、熊、祝三位同志在試用后,提出了一些很宝貴的改进意見. 本学期听課的同学也帮同消灭了一些費解的和不妥的句子. 作者衷心感謝这些同志.

最后,説明本书中采用的記号. 記号“▮”表示証明完毕,或証

明显明，或此处不給出証明．“定理1.3”表示同一章中的1.3定理,而“定理I.1.3”則表示第一章中的1.3定理.

江 澤 涵

北京大学燕南园 1964年6月30日

目　录

第一章　度 量 空 間

度量空間是 n 維欧几里得空間 E^n 的极为接近、极为自然的推广，而且从它又可以很自然地过渡到更广的、更抽象的、但有必要加以研究的拓扑空間．另一方面，它的范圍已够广泛，包括了在数学中遇到的一些函数空間、Hilbert 空間等；因而度量空間的理論已成为学习近代数学所不可缺少的知識．

本章将介紹度量空間的一些基本概念与性质，以及从度量空間到度量空間的連續映射的一些基本概念与性质．理解它們的最好途徑，是用欧几里得空間 E^n 的相应概念与性质作为模型．至于它們的安排与証明，則将受到下一章中拓扑空間的討論的影响．

1．度量空間・球形邻域

至多三維的欧几里得空間 E^n, $n\leqslant 3$, 是我們从直观以及解析几何課程所知道的空間．設 x 与 y 是它的两点，分别以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为坐标；这两点之間的距离是

$$d(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $n>3$ 时，已經无直观的 E^n；但我們把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫作点 x：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而且把 $d(x, y)$ 作为点 x 与点 y 之間的距离，于是得到 n 維的欧几里得空間 E^n, $n>3$．为簡便起見，对于任意正整数 n，我們都把点 x 与 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看作是等同的．

用 R^n 表示 E^n 的点的集合．R^1 当然就是实数集合．这里我

們严格地用集合这概念；即 R^n 的元素或点完全确定了，但点与点之間未确定任何关系，特别未确定距离关系 d. 集合 R^n 加上距离关系 d 才是我們的 n 維欧几里得空間 E^n；在这意义下，我們說 d 賦予集合 R^n 一个“空間結构”.

从 R^n 到 R^1 的一个对应 f: $R^n \to R^1$ 就是 n 个实变数的一个实值函数 $f(x)$. （只限于单值对应与单值函数.） 但当我們說函数 $f(x)$ 連續时，我們就用了距离 d 的概念；所指的实际是对应 f: $E^n \to E^1$. 所以函数 $f(x)$ 的連續性所需要的，不仅有集合概念，还有空間結构的概念.

本节的目的是用 E^n 作背景来引进度量空間.

1.1 定义 設 S 是一个集合，其元素叫作点，記作 x, y, z 等，而且 ρ: $S \times S \to R^1$ 是满足下列三条公理的一个非負实函数*)：

1° $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2° 对称性：$\rho(y, x)=\rho(x, y)$;

3° 三角形不等式：$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$.

点集 S 与函数 ρ 在一起，叫作一个**度量空間**，記作 (S, ρ). S 的点或子集仍分别叫作 (S, ρ) 的点或子集，函数 ρ 叫作 (S, ρ) 的**距离函数**或**度量**，$\rho(x, y)$ 叫作点 x 与 y 之間的**距离**.

例 1.1 n 維的欧几里得空間 $E^n=(R^n, d)$ 是一个度量空間. 距离函数 $d(x, y)$ 显然满足前两条度量公理. 它也满足第三条公理：对于任意正整数 n, $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$；証明从略，或看本书第二分册中附录 A 例 3.

例 1.2 用例 1.1 中的 R^n 作为集合 S，在 S 上定义非負实函数

$$d_1(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

或

$$d_2(x, y)=\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|x_i-y_i|\}.$$

---

*) $S \times S$ 表示集合 $\{(x, y) \mid x, y \in S\}$.

可以驗証 d_k 满足度量公理，所以(R^n, d_k)是度量空間，$k=1$ 或 2.

建議讀者对于 $n=2, 3$ 作出 $d_k(x, 0)=1$ 的图形，并补出这里未給出的証明，作为复习时的思考題. 此后，一个命題之后出現“(复习題)”时，都是建議讀者补出这命題的証明.

例 1.3 Hilbert 空間 E^ω 从 n 維的欧几里得空間 E^n 中三角形不等式，我們知道，对于 E^n 的三个点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(0, 0, \cdots, 0)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

既然对于任意正整数 n 这不等式成立，經过取极限(当 n 无限增大)，有下列結論：如果序列$\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使級数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ 收斂，則序列 $\{x_n-y_n\}$ 也使級数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 收斂(只限于无穷序列).

現在定义 Hilbert 空間 E^ω 如下. 它的点 x 是使得級数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 收斂的实数序列 $x=\{x_n\}$. 它的两点 x 与 y 之間的距离是

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

它是一个确定的实数，正是上文所說的. 距离函数 ρ 显然滿足前两条度量公理. 因为

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

再經过取极限，就証明了 ρ 也满足第三条度量公理.

空間 E^ω 的子集

$$\{x=\{x_n\} \mid 0\leqslant x_n\leqslant 1/n\}$$

叫作 Hilbert 空間的**基本方体**.

例 1.4 一些函数空間. 在分析数学中时常遇到以某类函数为元素的集合 S，而为着便于处理所考虑的問題，又必須在 S 中引进度量 ρ，使(S, ρ)形成度量空間.

a. 在討論函数的逼近或一致收斂时，集合 S 的元素是閉区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的連續函数. 两个元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 只当$|x(t)-y(t)|$在整个区間上都很小，才认为很邻近；明确地說，即引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t))=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

b. 在变分法与微分方程的稳定性理論等中，集合 S 的元素是可微 k 次的函数. 二元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的邻近，不仅要求 $|x(t)-y(t)|$ 很小，而且要求 $|x'(t)-y'(t)|$, $|x''(t)-y''(t)|$, $\cdots$, $|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|$ 都很小，对于任意 t. 这时候引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\sum_{i=0}^{k}\max|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|$$
$$=\max_{a\leq t\leq b}\{|x(t)-y(t)|,\ |x'(t)-y'(t)|,\ \cdots,\ |x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|\},$$

参看例 1.2.

c. 在积分方程論中，集合 S 同例 1.4a，但引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\left[\int_a^b[x(t)-y(t)]^2dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以驗証，这些函数 ρ 都满足度量公理.（复习題.）

例 1.5 設 S 是任一集合，其元素記作 x, y 等，定义 $\rho(x,\ x)=0$，而 $\rho(x,\ y)=1$ 当 $x\neq y$. 这里的 $(S,\ \rho)$ 是一个度量空間，叫作**离散的度量空間**.

例 1.6 設 $(S,\ \rho)$ 是任意的一个度量空間. 定义

$$\rho_1(x,\ y)=\rho(x,\ y)/\{1+\rho(x,\ y)\},$$

或

$$\rho_2(x,\ y)=\begin{cases}\rho(x,\ y), & \text{当 } \rho(x,\ y)\leq 1,\\ 1, & \text{当 } \rho(x,\ y)>1.\end{cases}$$

这里的 ρ_1 与 ρ_2 都满足度量公理.（复习題.）

設 $(S,\ \rho)$ 是一个度量空間，而且 A 是 S 的一个子集. 用記号 $\rho|A\times A: A\times A\to R^1$ 表示 ρ 限制在 $A\times A$ 上；它显然满足三条度量公理，所以 $(A,\ \rho|A\times A)$ 还是一个度量空間，叫作 $(S,\ \rho)$ 的一个**子空間**，簡記为 $(A,\ \rho)$，或甚至于記为 A. 凡遇到 $A\subset S$，而說 A 是 $(S,\ \rho)$ 的子空間时，所指的就是 $(A,\ \rho|A\times A)$.

度量空間的子空間还是度量空間. 欧几里得空間的子空間是度量空間，但不一定是欧几里得空間.

要想从已知的度量空間作出新度量空間，除去作子空間外，还可作积空間. 設 $(S_1,\ \rho_1)$ 与 $(S_2,\ \rho_2)$ 是两个度量空間. 命

$$S=S_1\times S_2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1\in S_1,\ x_2\in S_2\},$$

$$\rho((x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2))=[\rho_1^2(x_1,\ y_1)+\rho_2^2(x_2,\ y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易験証$(S,\ \rho)$是一个度量空間;叫作$(S_1,\ \rho_1)$与$(S_2,\ \rho_2)$的**积空間**,記作$(S_1,\ \rho_1)\times(S_2,\ \rho_2)$. 例如 $E^n=E^1\times E^{n-1}=(E^1)^n$, $n>1$.

积空間$(S,\ \rho)^n$ 中的函数可以看作是 n 元函数.

欧几里得空間的点是用实数来作坐标的. 实数虽然不能用来刻划一般的度量空間的点,但能用来刻划度量空間的两点的远近.

1.2 定义 設 a 是度量空間 $X=(S,\ \rho)$ 的任一点, ε 是任一正数. X 中的、满足不等式

$$\rho(x,\ a)<\varepsilon$$

的点 x 的集合,叫作点 a 的、在 X 中的一个**球形邻域**,記作$U(a,\varepsilon)$.

在不会引起混淆时,只說 $U(a,\ \varepsilon)$是 a 的一个球形邻域,而省略不提"在$(S,\ \rho)$中的".

建議讀者作出例 1.2 中 $n=2$, 3 时的球形邻域.

1.3 定理 度量空間 $X=(S,\ \rho)$的点与它們的球形邻域具有下列二性质:

1° 每一点 x 都有球形邻域,点 x 的每一球形邻域都包含 x;

2° 如果点 x 属于两个球形邻域 $U(x_i,\ \varepsilon_i)$的交集, $i=1$, 2, 則 x有一球形邻域$U(x,\ \varepsilon)\subset$ 这交集.

証 明 性质1°是明显的. 要証性质 2°, 只要取 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,x_i)$, $i=1$, 2. 事实上,設 y 是 $U(x,\ \varepsilon)$的任一点. 然后

$$\rho(x,\ y)<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,\ x_i),$$

即有 $\rho(x_i,\ y)<\varepsilon_i$; 因而 $y\in U(x_i,\ \varepsilon_i)$. ▌

在性质 2° 的陈述与証明中,并未排斥 $x_1=x_2$, 或 $x_1=x_2$ 而且 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

习 题

1. 試証：Hilbert 空間 E^ω 的任二点 x 与 y 有一“中点” z，即点 z 使得

$$\rho(x, z)=\rho(y, z)=\frac{1}{2}\rho(x, y).$$

但度量空間不必有此性质；試用欧几里得平面 E^2 的一个子空間为例說明.

2. 試証：度量空間中任意一个三角形的两边的长度之差不大于第三边的长度.

3. 設 S 是一个集合，而且 $\{A_\alpha\}$ 是 S 的一族子集，这里的下标 α 所取的值的个数可以是有限或无穷. 試証 de Morgan 公式：

$$S-\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha(S-A_\alpha),$$

$$S-\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(S-A_\alpha).$$

4. 設 $f: S\to T$ 是从集合 S 到集合 T 的单值对应. 試証：对于 T 的任一子集 B，

$$ff^{-1}(B)\subset B,$$
$$f^{-1}(T-B)=S-f^{-1}(B).$$

2. 四个基本概念：开集、閉集、閉包、收斂序列

本节从球形邻域出发，介紹度量空間的一些重要的子集.

2.1 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集. 如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$，則 A 叫作 X 的**开集**.

如果 A 的一点 a 有一个球形邻域 $\subset A$，則点 a 叫作 A 的、在 X 中的一个**內点**. A 的、在 X 中的內点的全体，叫作 A 的、在 X 中的**內部**，記作 $\operatorname{Int} A$.

在不会引起混淆时，例如在 X 已經給定时，我們也把“X 的开

集"，"在 X 中的一个內点"，"在 X 中的內部"等句子中的"X 的"或"在 X 中的"省略不提.

从定义立刻知道

2.1.1 命题 A 是开集 $\Leftrightarrow A$ 是若干球形邻域的并集.（复习题.）

2.1.2 命题 $\operatorname{Int} A$ 是开集.

定义 1.2 与 2.1 中的球形邻域都是指以正实数为半徑的球形邻域. 如果只限于用以正有理数为半徑的球形邻域，則得到开集的一个新定义. 設 $A \subset X$. 容易驗証：

2.1.3 命题 A 根据定义 2.1 是 X 的开集 $\Leftrightarrow A$ 根据新定义是 X 的开集.（复习题.）

2.2 定义 度量空間 X 的一个子集 A 叫作 X 的**閉集**，如果 A 在 X 中的余集 $X-A$ 是 X 的**开集**.

例 2.1 如果把集合 $A=\{x \mid 0<x<1\}$ 看作是直綫 E^1 的子集，則 A 是 E^1 的开集. 如果把 A 看作是平面 E^2 的子集，則 A 既不是 E^2 的开集，又不是 E^2 的閉集.

2.3 定理 度量空間 X 的开集具有下列三性质：

1° X 与空集 $\varnothing$ 是开集；

2° 两个开集的交集是开集；

3° 任意多个开集的并集是开集.

証 明 性质 1° 与 3° 是明显的. 現在証明性质 2°.

如果两个开集 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 是空集，則从性质 1°，它是开集. 如果 $A \cap B$ 非空集，設点 x 是它的任一点. 因为 A 与 B 都是开集，点 x 是它們的內点；从定义 2.1，x 有一邻域*) $U(x, \varepsilon_1) \subset A$，一邻域 $U(x, \varepsilon_2) \subset B$；因而 $U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2) = A \cap B$. 从定理 1.3 中的 2°，$x$ 有一邻域 $U(x, \varepsilon) \subset U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2)$

*) 本章中出現的"邻域"都是球形邻域的簡称.

$\subset A\cap B$. [实际上，如果取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，則 $U(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon_1)\cap U(x, \varepsilon_2)$.] 再从定义 2.1, x 是 $A\cap B$ 的內点；因为 x 是 $A\cap B$ 的任一点，所以 $A\cap B$ 是开集. ▌

2.4 定理 度量空間 X 的閉集具有下列三性质：

1° X 与空集 $\emptyset$ 是閉集；

2° 两个閉集的并集是閉集；

3° 任意多个閉集的交集是閉集.

証 明 由于 de Morgan 公式 (§1 中习题 3)，本定理与定理 2.3 二者中之一是另一个的直接推論. ▌

例 2.2 有限子集是閉集；特别地，独点集(单独一点所成的集合)是閉集. 直綫 E^1 的开集 $A=\{x|0<x<1\}$ 是无穷多个閉集的并集. 試举例說明：无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中，极限概念是連續性概念的基础. 現在要把它推广到度量空間.

2.5 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集，而且点 $x\in X$. 如果 x 的、在 X 中的每一球形邻域都包含 $A-\{x\}$ 的一个点*⁾，則 x 叫作 A 的、在 X 中的一个**聚点**. A 与它的、在 X 中的全体聚点的并集，叫作 A 的、在 X 中的**閉包**，記作 $\bar{A}$. 如果 $\bar{A}=X$，則把 A 叫作 X 的**稠密子集**.

例 2.3 設 $X=E^1$. 如果 $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$，則点 $x=\frac{1}{n}\in A$，但非 A 的聚点，点 $x=0\bar{\in} A$ 而是 A 的聚点. 如果 $A=\{x|0\leqslant x<1\}$，点 $x=0$ 与 $x=1$ 都是 A 的聚点，但前者 $\in A$，后者 $\bar{\in} A$. 如果 A 是 E^1 的有理点的集合，則 E^1 的每一点都是 A 的聚点，而且 $\bar{A}=E^1$.

从定义 2.5 容易驗証：

2.5.1 命題 X 的有限子集无聚点；

*⁾ 如果 $x\bar{\in} A$，則 $A-\{x\}$ 就是 A.

2.5.2 命題 如果 X 的无穷子集 A 的每二点的距离都大于一个固定的正数，则 A 无聚点；

2.5.3 命題 对于任意 $A\subset X$，$\overline{A}$ 是閉集；

2.5.4 命題 A 是閉集 $\Leftrightarrow \overline{A}=A$.（复习題.）

2.6 定理 度量空間的子集与它們的閉包具有下列四个性质：

1° $\overline{\emptyset}=\emptyset$;

2° $A\subset\overline{A}$;

3° $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$;

4° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

証 明 从定义 2.5 立刻有性质 1° 与 2°.

現在証明性质 3°：$\overline{\overline{A}}$ 的任一点 x 必 $\in\overline{A}$. 从定义 2.5，$x\in\overline{\overline{A}}\Rightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 包含 $\overline{A}$ 的一点 y；$y\in\overline{A}\Rightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 包含 A 的一点. 从定理 1.3 中的性质 2°，可取 $W(y)\subset U(x)$；然后知 x 的每一邻域 $U(x)$ 包含 A 的一点. 再从定义 2.5，这就 $\Rightarrow x\in\overline{A}$.

性质 4° 的一部分：$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$，是下面事实的明显推論：$A\cup B\supset A\Rightarrow\overline{A\cup B}\supset\overline{A}$. 所以剩下要証明的是性质 4° 的另一部分：$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$，即 $\overline{A\cup B}$ 的任一点 x 如果 $\overline{\in}\overline{A}$，则 $\in\overline{B}$.

我們用反証法来証明这一部分. 設在 $x\overline{\in}\overline{A}$ 的情形下，同时还有 $x\overline{\in}\overline{B}$. 从定义 2.5，$x$ 有一邻域 $U(x)$ 不包含 A 的点，与一邻域 $V(x)$ 不包含 B 的点；从定理 1.3 中的性质 2°，x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$，因而不包含 $A\cup B$ 的点；这与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾. ▌

注意，性质 2° 与 3° $\Rightarrow\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

现在我們指出子集的閉包与收斂点序列的极限点之間的关系．先重复我們习知的定义．

2.7 定义 設 X 是一个度量空間．設 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点序列，a 是 X 的一点．如果对于点 a 的每一个球形邻域 $U(a, \varepsilon)$，存在一个自然数 N，使得 $x_n \in U(a, \varepsilon)$，对于所有 $n>N$，点 a 叫作这**序列的一个极限点**，或者說这序列**收斂**，**收斂到点** a．

序列 $\{x_n\}$ 收斂到点 a 的条件，也可以用度量函数 ρ 来表示为 $\lim \rho(a, x_n)=0$．

下面的三个命題的証明留給讀者．后两个命題将来时常引用，値得特别注意．

2.7.1 命題 度量空間 X 中的一个收斂序列只有唯一的一个极限点．（复习題．）

2.7.2 命題 度量空間 X 的一点 a 是 X 的一个子集 A 的聚点 $\Leftrightarrow A-\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点所組成的点序列，以 a 为极限点．（习題 4．）

2.7.3 命題 如果**序列** $\{x_n\}$ 由完全不同的点組成，而且无穷**子集** $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ 以 a 为一个聚点，則序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列收斂到点 a．（习題 5．）

在本节結束前我們指出二点間的距离这一概念的三个常用的推广．第一，度量空間 X 的二子集 A 与 B 間的距离：

$$\rho(A, B)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 或 } B \text{ 是空集；}\\ \inf\{\rho(x, y) \mid x\in A,\ y\in B\}, & \text{当 } A \text{ 与 } B \text{ 都非空集．}\end{cases}$$

第二，X 中一点 x 到一子集 A 的距离 $\rho(x, A)$；它是第一个的特别情形．第三，X 的一子集 A 的直徑：

$$d(A)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 是空集；}\\ \sup\{\rho(x, y) \mid x,\ y\in A\}, & \text{当 } A \text{ 非空集．}\end{cases}$$

容易看出，$x \overline{\in} A \nLeftrightarrow \rho(x, A) > 0$；$A \cap B = \emptyset \nLeftrightarrow \rho(A, B) > 0$．值得注意的是：

2.7.4 命題 如果 $A \neq \emptyset$，則 $x \overline{\in} \overline{A} \Rightarrow \rho(x, A) > 0$．(复习題．)

习 題

1．設 f 是欧几里得空間 E^n 中的連續函数．試証满足 $f>0$ ($f=0$ 或 $f \geqslant 0$) 的点集是 E^n 的开(閉)子集．

2．試証 $\operatorname{Int} A$ 是 A 所包含的所有的开集的并集．因而它是 A 所包含的最大开集．

3．試証 $\overline{A}$ 是所有包含 A 的閉集的交集．因而它是包含 A 的最小閉集．

4．試証命題 2.7.2．

5．試証命題 2.7.3．

3．連續映射·拓扑映射

第一节开始时我們說过，要想定义連續函数，必須先定义空間．現在已有了度量空間，我們将进而定义度量空間之間的、与連續函数相应的映射．

3.1 定义 設 X 与 Y 都是度量空間，$f: X \to Y$ 是一个从 X 到 Y 的对应，而且点 $x_0 \in X$．如果給定任一邻域 $U(f(x_0), \varepsilon)$，都存在一邻域 $U(x_0, \delta)$，使得 $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$，則說 f **在点 x_0 处連續**．如果 f 在 X 的每一点处連續，則說 f **在 X 中連續**；这时候 $f: X \to Y$ 叫作一个**連續映射**或簡称为**映射**．X 与 Y 分别叫作 f 的定义空間与值空間．

当 $Y = E^1$ 时，映射 f 通常叫作連續实值函数，或簡称**連續函数**．