LITIJIHE JIEXIJIHE

北京市职工高中文化课课本

# 立体几何
# 解析几何

北京出版社



北京市职工高中文化课课本

# 立体几何
# 解析几何

北 京 出 版 社

北京市职工高中文化课课本

立体几何
解析几何

北京出版社出版
(北京崇文门外东兴隆街51号)
北京市新华书店发行
农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 7印张 142,000字
1984年9月第1版 1984年9月第1次印刷
印数 1—80,000
书号：7071·1032 定价：0.65元

# 说　明

本课本是根据《北京市职工高中数学教学纲要》（试行草案）中立体几何与解析几何两部分的要求编写而成的．供职工高中文化课教学使用．

为适应职工教学的实际情况，本课本，把每三节课作为一个教学单位，配备一个习题．习题中实线上面的是课堂练习题，实线下面的是课外作业题．各节课的内容，教师可以根据学员实际情况适当掌握，习题也可以做适当的调换或补充．每章之后的小结和复习题是供复习使用的．

限于编辑水平，错误或缺点在所难免，敬希批评指正．

北京市成人教育研究室

一九八四年三月

# 目　录

# 第一章　空间直线和平面

## 一　平　　面

### 1.1　平面

在日常生活中，常见的桌面、黑板面、平静的水面以及纸板等，都给我们以平面的形象．但这样的平面不过是几何里平面的一部分，几何里的平面是无限扩展的．

那么，我们怎样把平面的形象在纸面上画出来呢？通常画平行四边形来表示平面（图 1-1）．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 1-2）．这样看起来立体感强一些．

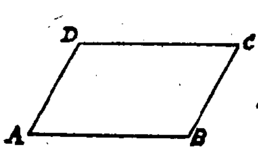
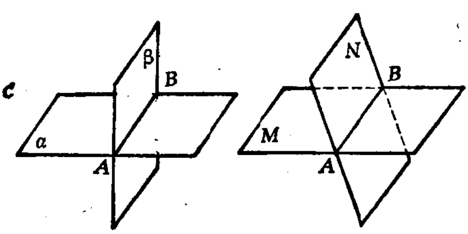



图 1-1




甲　　乙

图 1-2

平面通常用一个大写英文字母M、N、P等或小写希腊字母$\alpha$、$\beta$、$\gamma$等来表示　如平面M、平面$\alpha$等，也可用表

示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示．如平面 AC 或平面 DB(图 1-1)。

### 1.2 平面的基本性质

人们在生产与生活实践中，已经总结出关于平面的三个基本性质．我们把它当作公理，作为进一步推理的基础．

**公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内**(图 1-3)。

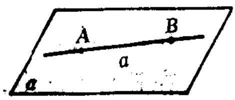


图 1-3

这时，我们说直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，或者说平面 $\alpha$ 经过直线 $a$。

**公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线**(图 1-4)。

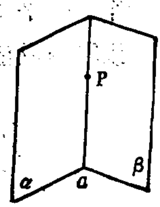


图 1-4

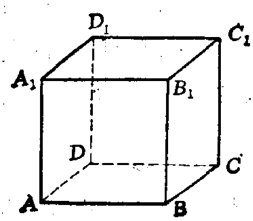


图 1-5

如图 1-5，平面 $A_1B$ 与平面 $C_1B$ 有公共点 $B$，就有公共线 $B_1B$．我们就说平面 $A_1B$ 与平面 $C_1B$ 相交，交线是 $B_1B$。

**公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面**(图 1-6)。

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

通常，我们把公理 3 说成“不在同一直线上的三点确定一个平面”，这里的“确定”就是“有且只有”的意思.

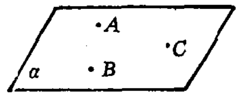


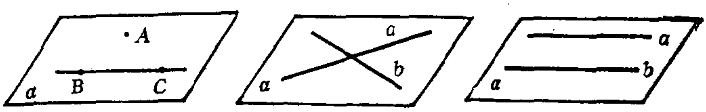

图 1-6

根据上述公理，可得出下面的推论：

**推论 1　经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面**(图 1-7 甲).

**推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面**（图1-7 乙).

**推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面**（图1-7 丙).




甲　　乙　　丙

图 1-7

**例**　两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内.

**已知**：直线 $AB$、$BC$、$CA$ 两两相交，交点分别为 $A$、$B$、$C$(图 1-8).

**求证**：直线 $AB$、$BC$、$CA$ 共面.

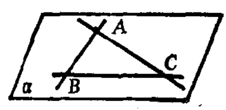



图 1-8

**证明**：

∵　直线 $AB$ 和 $AC$ 相交于 $A$ 点，

∴　直线 $AB$ 和 $AC$ 确定一个平面 $\alpha$ (推论 2).

∵　点 $B$ 在 $AB$ 上，点 $C$ 在 $AC$ 上，

∴　点 $B$ 和点 $C$ 都在平面 $\alpha$ 内。

∴　$BC$ 在平面 $\alpha$ 内(公理 1)。

因此，直线 $AB$、$BC$、$CA$ 都在平面 $\alpha$ 内，即它们共面。

## 1.3　空间图形的直观图的画法

和平面几何不同，在纸上画空间图形时，不是画它的真实形状，而是画它的直观图．要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法．下面举例说明它的画法．

**例 1**　画水平放置的正六边形的直观图(图 1-9)。

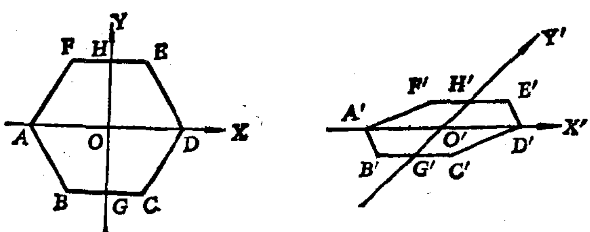



图 1-9

**画法：**(1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 $AD$ 所在的直线为 $X$ 轴，取对称轴 $HG$ 为 $X$ 轴．画对应的 $X'$ 轴、$Y'$ 轴，使 $\angle X'O'Y'=45°$。

(2) 以点 $O'$ 为中心，在 $X'$ 轴上取 $A'D'=AD$，在 $Y'$ 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$。以点 $H'$ 为中点画 $F'E'$ 平行于 $X'$ 轴，并等于 $FE$；再以 $G'$ 为中点画 $B'C'$ 平行于 $X'$ 轴，并等于 $BC$。

(3) 连接 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$. 所得的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

注意：图画好后，要擦去辅助线.

上面画直观图的方法叫斜二测画法，这种画法的规则是：

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 $OX$，$OY$，画直观图时，把它画成对应的轴 $O'X'$、$O'Y'$，使 $\angle X'O'Y'=45°$（或 $135°$）. 它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中平行于 $X$ 轴或 $Y$ 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 $X'$ 轴或 $Y'$ 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 $X$ 轴的线段，在直观图中保持原长；平行于 $Y$ 轴的线段，取其原长的一半.

**例 2** 画水平放置的正五边形的直观图（图 1-10）.

**画法：**(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取对角线 $BE$

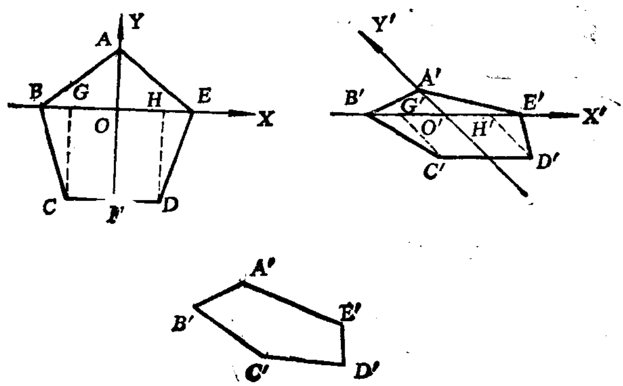



图 1-10

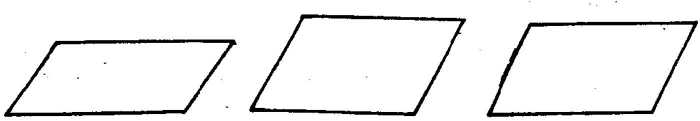
所在的直线为$X$轴，取对称轴$AF$为$Y$轴分别过点$C$、$D$作$CG \parallel OY$，$DH \parallel OY$，与$X$轴分别交于$G$、$H$。画对应的$X'$轴和$Y'$轴，使$\angle X'O'Y'=135°$。

(2) 以点$O'$为中点，在$X'$轴上截取$G'H'=GH$，在$X'$轴的同一侧画线段$C'G' \parallel O'y'$，$D'H' \parallel O'Y'$。并使$C'G'=\frac{1}{2}CG$，$D'H'=\frac{1}{2}DH$；在$X'$轴的另一侧的$Y'$轴上取一点$A'$，使$O'A'=\frac{1}{2}\mathrm{OA}$；以点$O'$为中心，在$X'$轴上截取$B'E'=BE$。

(3) 连接$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$。所得的五边形$A'B'C'D'E'$就是正五边形$ABCDE$的直观图。

## 习 题 一

1. 能不能说一个平面长6米，宽3米？为什么？
2. 用字母来表示下列平面：



（第2题）

3. 三角形、梯形是否一定是平面图形？
4. 画水平放置的正方形的直观图。
5. 下面说法正确吗？为什么？
   (1) 线段$AB$在平面$\alpha$内，直线$AB$不全在平面$\alpha$内；
   (2) 平面$\alpha$和$\beta$只有一个公共点。

6. 填空：

(1) ________的三点确定一个平面；

(2) 两条________直线确定一个平面；

(3) 有一个公共点的两个平面相交于______的一条直线。

7. 设 $A$、$B$、$C$、$D$ 中没有任何三点在一直线上，那么这四点最多能确定几个平面？最少能确定几个平面？

8. 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？

9. 一条直线与两条平行直线都相交，证明：这三条直线在同一平面内。

10. 对已知直线外一点与该条直线上的三点分别画三条直线．证明：这三条直线在同一个平面内。

11. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定的平面图形吗？为什么？

12. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图。

## 二 空间两条直线

### 1.4 两条直线的位置关系

观察图 1-11，我们发现，$AB$、$A'B'$ 在同一平面内，且互相平行；$AB$ 与 $B'B$ 在同一平面内相交于 $B$ 点；$AB$ 与 $CC'$ 不在同一平面内，既不平行也不相交，我们把不在同一平面内的既不平行也不相交的两条直线叫做**异面直线**。

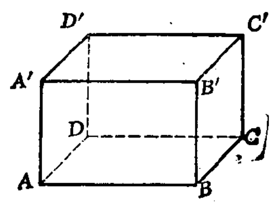
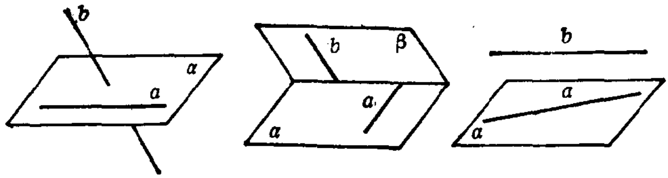


图 1-11

画异面直线时，可画成如图 1-12 所示，以显示它们在不同的平面内。




甲　　　　乙　　　　丙

图 1-12

这样，我们得到了空间不重合的两条直线的位置关系：

(1) 相交直线——在同一平面内且有唯一的公共点；

(2) 平行直线——在同一平面内且没有公共点；

(3) 异面直线——不在同一平面内且没有公共点。

**例**　平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线。

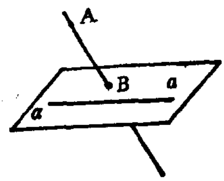



图 1-13

**已知**：直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，点 $A$ 不在平面 $\alpha$ 内，点 $B$ 不在直线 $a$ 上，点 $B$ 在平面 $\alpha$ 内(图 1-13)。

**求证**：直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线。

**证明**：假设直线 $AB$ 与 $a$ 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 $B$ 和直线 $a$。

$\because$ 点 $B$ 不在直线 $a$ 上，经过点 $B$ 与直线 $a$ 只能有一个平面 $\alpha$，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 应在平面 $\alpha$ 内。

$\therefore$ 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内。这与已知点 $A$ 不在 $\alpha$ 平面矛盾。

$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 是异面直线.

### 1.5 平行直线

在平面几何里，我们曾学过："在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么，这两条直线也互相平行".对于空间的三条直线，实际上也有这样的性质，我们把它作为公理.

**公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.**

**例**　已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不共面的四边形)，$E$、$H$ 分别是边 $AB$、$AD$ 的中点，$F$、$G$ 分别是边 $CB$、$CD$ 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$. 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明：如图 1-14，连接 $BD$.

$\because$ $EH$ 是 $\Delta ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH \parallel BD$ 且 $EH=\frac{1}{2}BD$.

又在 $\Delta BCD$ 中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $FG \parallel BD$ 且 $FG=\frac{2}{3}BD$.

根据公理 4，$EH \parallel FG$.

$\because$ $FG>EH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

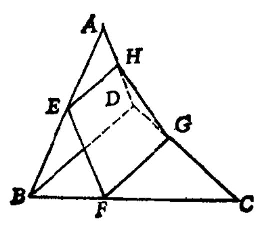


图 1-14

**定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.**

**已知**：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，且方向相同.

**求证**：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

**证明**：对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情况，在平面几何中已经证明. 下面我们证明两个角不在同一平面内的情况.

如图 1-15，在 $AB$、$A'B'$、$AC$、$A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$、$AE = A'E'$，连接 $AA'$、$DD'$、$EE'$、$DE$，$D'E'$.

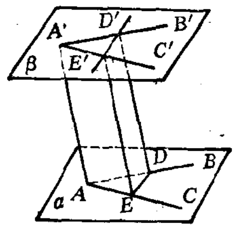


图 1-15

$\because$ $AB \parallel A'B'$、$AD = A'D'$，

$\therefore$ $AA'D'D$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AA' \stackrel{\parallel}{=} DD'$.

同理 $AA' \stackrel{\parallel}{=} EE'$.

根据公理 4 得 $DD' \parallel EE'$.

又可得 $DD' = EE'$，

$\therefore$ 四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形.

$\therefore$ $ED = E'D'$. 可得 $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$.

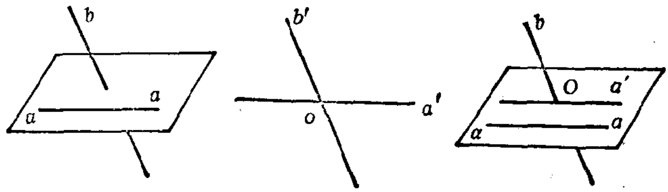
$\therefore$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

把上面两个角的两边反向延长，就得出下面的推论.

**推论 如果两条相交直线和另外两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.**

## 1.6 两条异面直线所成的角

直线 $a$、$b$ 是异面直线（图 1-16 甲）. 经过空间任意一点 $O$，分别引直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$（如图 1-16 乙），由于两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，两组直线所成




甲　　　乙　　　丙

图 1-16

的锐角(或直角)相等．所以直线 $a'$ 和 $b'$ 所成的锐角(或直角)的大小，只由直线 $a$、$b$ 的相互位置来决定，与点 $O$ 的选择无关．我们把直线 $a'$ 和 $b'$ 所成的锐角(或直角)叫做**异面直线 $a$ 和 $b$ 所成的角**．

为了简便，点 $O$ 常取在两条异面直线中的一条上．例如，取在直线 $b$ 上，然后经过 $O$ 点作 $a' \parallel a$．那么 $a'$ 和 $b$ 所成的角就是异面直线 $a$、$b$ 所成的角(图 1-16 丙)．

如果两条异面直线所成的角是直角，我们说这**两条异面直线相互垂直**．

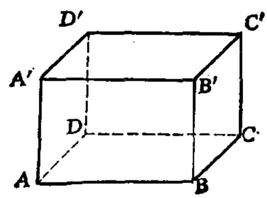



图 1-17

图 1-17 的正方体的棱 $A'A$ 和 $B'C'$ 所在的直线是两条异面直线．直线 $A'B'$ 都和它们垂直相交．我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线**．

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做**两条异面直线的距离**．图 1-17 中的线段 $A'B'$ 的长度就是异面直线 $A'A$ 和 $B'C'$ 的距离．

**例**　设图 1-17 中的正方体的棱长为 $a$．