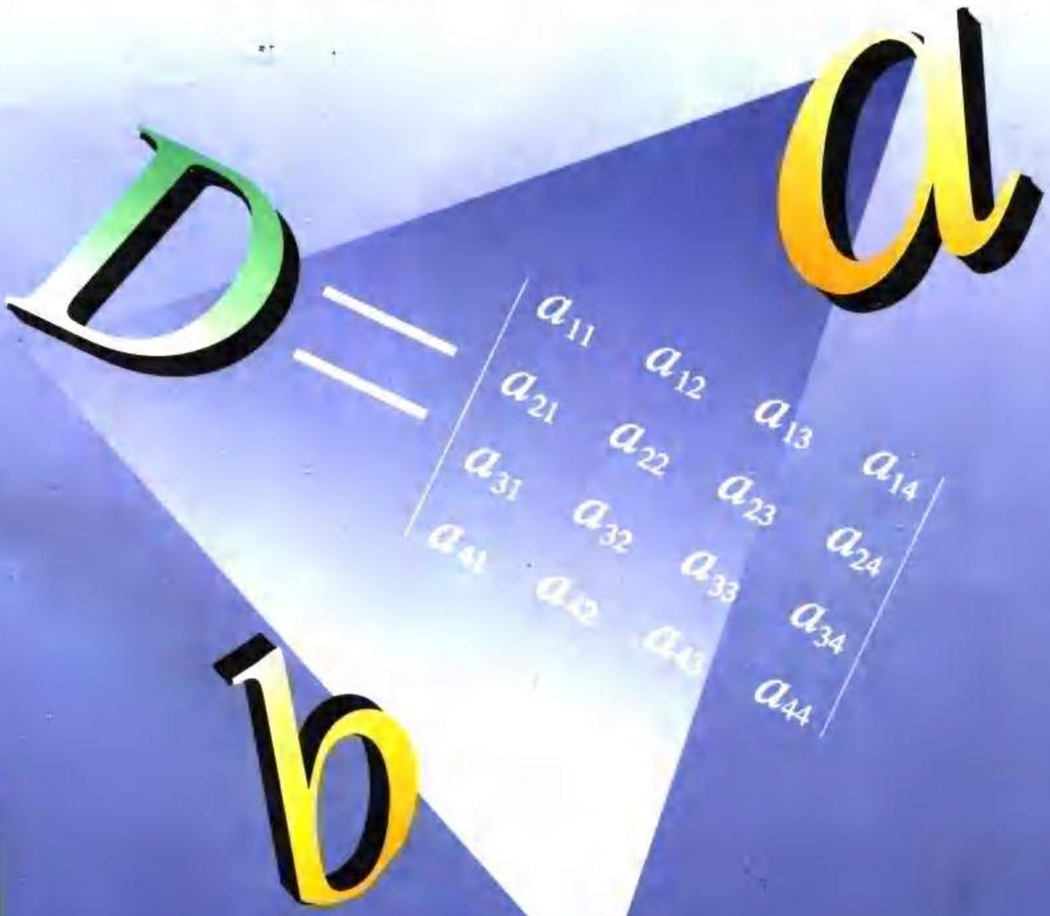
高等院校财经类专业核心课程

经济数学基础(二)

线性代数

解题思路和方法

主　编　袁荫棠
副主编　刘书田
编写者　王新民　范培华



世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

线性代数题思路和方法 / 王新民，范培华编著.—北京：
世界图书出版公司北京公司，1998.2
(经济数学基础；2 / 袁荫棠，刘书田主编)
ISBN 7-5062-3665-6

I. 线… II. ①王… ②范… III. 线性代数-解题 IV. 0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 01681 号

书　　名：经济数学基础(二)　线性代数（解题思路和方法）
主　　编：袁荫棠　　副主编：刘书田
责任编辑：孔彦
出　　版：世界图书出版公司北京公司
印　　刷：河北香河新华印刷有限公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司（北京朝内大街 137 号，100010）
销　　售：各地新华书店
开　　本：787 × 1092mm　1/16　　印张：13.5　　字数：33 万字
版　　次：1998 年 2 月第 1 版　　1998 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：00001-10000
书　　号：7-5062-3665-6/F · 48
定　　价：16.00 元

前　　言

《经济数学基础》是高等学校财经类专业的核心课程之一，应广大读者学习该课程的需要，我们编写了本套书。

全书有以下特点：(1)以大纲为准　书中每章前面均写有〈要求与说明〉，它摘自国家教委颁布的《经济数学基础》教学大纲，强调读者应以教学大纲要求为准进行学习；(2)紧密结合教材　全书内容和章节编排都紧密结合教材，又比教材更加有条理、更加深入、更易于理解和掌握。在每节之前，不仅先概括主要概念、定理、公式等基本内容，而且还归纳出一些在理解概念与掌握方法时所需要的结论，正是这些结论往往在解题过程中能起到事半功倍的作用；(3)例题精析　本书例题的选择广泛和有代表性，以充分达到教学大纲的要求。在例题中，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有选自全国高教自考、全国文凭考试、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的试题，而且还有作者根据多年教学实践自己编写的大量有启发性和指导性的例题。这些例题构思新颖、方法灵活。不仅有一般的计算题、应用题和证明题，还有填空题和选择题等。为适应不同读者的需要，在例题的编排上，注意到了难易结合，既有基本题，也有一定难度的综合题。对于所选例题，以内容为准进行归类，不仅指出同类题的解题思路和程序，并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误，读者可以举一反三，触类旁通；(4)配有习题　在每章之后均配有习题供读者练习，在较系统地指导读者"怎样进行思考"之后，读者在这里可以进行基本训练，以增强自己解决问题的能力，并检验自己对所学知识掌握的程度。

读者阅读此书，可以开阔眼界，增强分析问题、解决问题和参加应试的能力。全书可以作为财经类和管理类学生学习期间和研究生考前的学习辅导书，也可以作为授课教师的参考书。对于参加成人教育和自学考试的读者，也不失为一本有指导价值的读物。

经统一策划和集体讨论之后，全书分别由教学经验丰富的教师执笔，并由袁荫棠(中国人民大学)任主编，刘书田(北京工业大学)任付主编。全书由《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册组成，其中，《微积分》分册由葛振三(一至四章)和刘书田(五至十章)编写；《线性代数》分册由范培华(第一章)和王新民(二至六章)编写；《概率统计》分册由袁荫棠(一至三章)和范培华(四至七章)编写。

全书在成书过程中，得到了北京大学王其文、中国人民大学胡显佑、张学贞、中央财政金融大学单立波、北京工业大学赵惠斌、刘国忠、北京商学院侯文起、中央电视大学冯泰、厦门大学陈亚贞、上海财经大学朱幼文、中南财经大学袁勇行、东北财经大学龚兆仁、苏州大学程庆云、湖南财经学院苏醒、西安石油学院肖筱南等各位专家与教授的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

书中如有不妥之处，恳请读者指正。

编者

1997 年 6 月

目　　录

第一章　行列式

要求与说明

1　理解 n 阶行列式的定义及其性质.

2　掌握用行列式的定义、性质和有关定理去计算较简单的 n 阶行列式的方法.

3　掌握克莱姆法则.

§ 1.1　n 阶行列式

一　基本概念

1　排列

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 **n 级排列**

例如,由自然数 $1,2\cdots,n$ 可组成的 n 级排列,其总数共有 $n!$ 个,因为排列的第一个数可在 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个,共有 n 种取法,第二个数只能在余下的 $n-1$ 个数中再任取一个,共有 $n-1$ 种取法,依次类推,第 n 个数只有一种取法,故所有的排列为 $n(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$.

2　逆序与逆序数

在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,如果较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面,即 $i_t>i_s$,称这一对数 i_ti_s 构成一个**逆序**.

在一个排列中,逆序的总数称为它的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,一个 4 级排列 4132,41,43,42,32 各构成一个逆序,所以逆序数为 4,即 $\tau(4132)=4$.

3　奇排列与偶排列

如果排列的逆序数为奇数,则称它为**奇排列**.如果排列的逆序数为偶数,则称它为**偶排列**

因为 $\tau(4132)=4$,所以排列 4132 是一个偶排列.

4　对换

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若将其中两个数 i_s 与 i_t 互换位置,其余各数位置保持不变,就得到另一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,称这样的一个变换为**对换**,记为 (i_si_t).

二　n 阶行列式的定义

n 阶行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取正号.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,则乘积

$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取负号.即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式有时也简记为 $|a_{ij}|$.

三　有关的定理与结论

1 **【定理 1】** 任意一个排列经过一次对换后,改变其奇偶性.

2 **【定理 2】** n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

因此,n 阶行列式又可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

3　n 阶行列式共有 $n!$ 项,其中带正号的项与带负号的项各占一半.

4　若一个行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

四　几个特殊的行列式

1　上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

2　下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

3

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & \iddots & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1\,2}\cdots a_{1n}$$

4　设 A、B 分别是 m 阶和 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| \qquad (**)$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.主对角线上的各元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots n)$ 称为主对角线元素.从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**.

说明　本节要求掌握 n 阶行列式的定义及用定义计算简单的行列式,特别是行列式中每一项前符号的确定,即逆序数的求法.

【例 1】　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

分析　按行列式定义,每一项都是取自不同行不同列的 4 个元素的乘积,共有 4! 项.但此行列式中有很多零元素,因此有的项为零,故只需找出不含零元素的项.不妨设各个字母表示的都是非零元素。于是在第 1 行中有两个非零元素 a_{11} 和 a_{12},当第 1 行取 a_{11} 时,第 2 行只能取 a_{23}(a_{21} 与 a_{11} 同列,故不能取).第 3 行只能取 a_{32},第 4 行只有 a_{44},即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是其中的一项.另外,当第 1 行取 a_{12} 时,第 2 行可以取 a_{21} 或 a_{23},但当第 2 行取 a_{23},第 3 行只能取零元素,故第 2 行只可以取 a_{21},第 3 行取 a_{33} 第 4 行取 a_{44}.即另一非零项为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

解　$D = (-1)^{\tau(1324)} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + (-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

$= -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

【例 2】　计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ & & \iddots & & \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解　由前面所讲特殊类型行列式可直接得到

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

【例 3】　证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

证　由行列式定义知,它的每一项都是取自不同行不同列的 5 个元素的乘积.在第 1 列中只有两个非零元素 a_{11} 和 a_{21},当第 1 列取元素 a_{11} 时,第 2 列只能取 a_{22},而第 3 列所能取的只有零元素,故这一项为零.同理,当第 1 列取 a_{21} 时,这一项也为零.行列式其他项也都含有零因子,所以 $D=0$.

【例 4】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&0&a_n\\0&0&\cdots&0&0&a_{n-1}&0\\a_1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&a_2&\cdots&0&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{n-3}&0&0&0\\0&0&\cdots&0&a_{n-2}&0&0\end{vmatrix}$$

解 此行列式按行看，每行只有一个非零元素．按列看，每列也只有一个非零元素，这些元素又都处于不同行不同列．所以它们的乘积构成行列式的一项，若按行的顺序排列，此项可表示为 $a_na_{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-2}$．其逆序数为 $(n-1)+(n-2)$．所以

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)}a_na_{n-1}a_1\cdots a_{n-2}=-a_1a_2\cdots a_n$$

【例 5】 计算

$$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}$$

解 D 中不为零的项用一般形式表示为

$$a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{n-11}a_{nn}$$

逆序数 $\tau(n-1,n-2,\cdots 1,n)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

故 $D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$

小结 以上例题都是用行列式定义进行计算的．其特点是行列式中含有较多的零元素．不含零因子的项只有少数几项．关键是处理好每项前的符号，求出逆序数．一般方法是按行序排好，计算列排列的逆序数．当然，按列序排好，计算行的逆序数也一样．对于一般的行列式，用定义计算几乎是不可能的．因此，我们下面将介绍行列式的性质及利用行列式的性质计算行列式．

【例 6】 计算

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix}a_{1j_1}&a_{1j_2}&\cdots&a_{1j_n}\\a_{2j_1}&a_{2j_2}&\cdots&a_{2j_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{nj_1}&a_{nj_2}&\cdots&a_{nj_n}\end{vmatrix}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有的 n 级排列求和

解 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} D$$

而在所有的 n 级排列中，奇排列与偶排列各占一半，所以在和式中，带正号的 D 与带负号的 D 个数相等，因此所有行列式的和等于零.

§1.2 行列式的性质

一 行列式的性质

【性质 1】 将行列式的行、列互换，行列式的值不变. 即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D^T$.

上述性质说明，行列式的行和列地位是相同的. 也就是说，对于“行”成立的性质，对于“列”也一定成立.

【性质 2】 行列式的两行(列)互换，行列式反号.

推论 若行列式有两行(列)完全相同，则行列式为零.

【性质 3】 行列式一行(列)的公因子可以提出. 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 若行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式为零.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式为零.

【性质 4】 行列式中若某一行(列)是两组数的和，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列)分别为对应的两个加数之一，其余的各行(列)与原来行列式的相应各行(列)相同. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【性质 5】 把行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上，行列式不变. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

说明　性质 5 在计算行列式时使用最多，但在使用时要特别注意，只能将某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去，而不能把某一行(列)乘以常数 k 后，而将另一行(列)加起来.

【例 1】　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

分析　这个行列式关于主对角线对称，即形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

称为对称行列式.在此题中，由于各行元素的和相等，若把各列的元素都加到第 1 列，则可以提出公因子，使第 1 列都变成 1，然后再化成三角形即可求出其值.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{①}+(\text{②}+\text{③}+\text{④})^{*}]{} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{③}-2\times\text{②} \\ \text{④}+\text{②}}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

说明　此行列式可以推广到 n 阶.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

请读者按上述方法计算，先把行列式的 2 至 n 列都加到第 1 列.提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$，第 1 列都变成了 1，然后把第 1 行的 (-1) 倍加到其他各行.这样，在第 1 列除第 1 行上有非零元素外，其他均为零.

* 以后为书写方便，在行列式计算过程中，把所进行的变换写在等号上下方.等号上方表示行变换，下方表示列变换.如 $\xlongequal{\text{③}-2\times\text{②}}$，表示把第 2 行的 (-2) 倍加到第 3 行上去，余者类推.

【例 2】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{③}-(x+y)\times\text{①}]{\text{②}-x\times\text{①}} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & y-x \\ 0 & -x & -y \end{vmatrix}(*)$$

$$\xlongequal{\text{③}+\frac{x}{y}\times\text{②}} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & y-x \\ 0 & 0 & \frac{x}{y}(y-x)-y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)(xy-x^2-y^2) = -2(x^3+y^3)$$

说明 此题若不用上述方法化成三角形,而由 * 式开始即用三阶行列式计算会更简单,我们所以要用前面方法解,是为了练习化为三角形行列式的方法.

【例 3】 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}]{} \begin{vmatrix} 1+x & -x & -x & -x \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{①}+\frac{1}{x}\times\text{②}-\frac{1}{y}\times\text{③}+\frac{1}{y}\times\text{④}]{} \begin{vmatrix} x & -x & -x & -x \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

【例 4】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

分析 利用行列式性质把第 1 列的(-1)倍加到各列,整理化简可去掉其他各列的平方项.

解

$$D \xlongequal[\substack{③-① \\ ④-①}]{②-①} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[④-3\times②]{③-2\times②} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

说明 最后一步等于零,是因为第 3 列与第 4 列成比例,初学者往往不能马上认识到这一点.

【例 5】 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

证法一

$$\begin{aligned} 左 &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

上面最后一步是对两个行列式进行列的对换而得到的.因为每个行列式都进行了两次列的对换,因此符号不改变.

证法二

$$左 \xlongequal{①+②+③} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(a_1+b_1+c_1) & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2(a_2+b_2+c_2) & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal[③-①]{②-①} 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①+②+③} 2\begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 右$$

【例 6】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

解　从第 2 列至第 n 列都加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\textcircled{1}-j\times\textcircled{1}\\ j=2,\cdots,n}]{}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n-1)!=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)!}{2}$$

【例 7】

$$D=\begin{vmatrix}x_1-m & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

解　将各列均加到第一列

$$D=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2-m & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

$$
= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{\textcircled{i}-\textcircled{1}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}
$$

$$
= (-m)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)
$$

$$
= (-m)^{n} + (-m)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i
$$

小结 用行列式的性质计算 n 阶行列式，主要方法是通过行列变换化成三角形，再用几种特殊类型的行列式得出其值.但有时化成三角形比较困难，且没有这个必要.下面我们再介绍计算行列式的另一种方法，即降阶法，把行列式按一行或一列展开，n 阶行列式可以降到 $n-1$ 阶.

§1.3 行列式按行(列)展开

一 几个定义

定义 1 在 n 阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来顺序构成的一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**.记作 M_{ij}.

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定义 2 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中，任意选定 k 行、k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按原来的顺序组成的一个 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 **k 阶子式**.

在 D 中划去 k 行、k 列后，余下的元素按原来顺序组成的一个 $n-k$ 阶行列式 N，称为 **k 阶子式 M 的余子式**.

如果 k 阶子式 M 在 D 中所在的行和列的标号分别为 $i_1, i_2, \cdots i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots j_k$，则称

$$
A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N
$$

为 **k 阶子式 M 的代数余子式**.

二 行列式按一行(列)展开

【定理】 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

这个定理的重要性在于把计算 n 阶行列式转化为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式.若 a_{ij} 中有较多的零元素,则计算量可以大大减少.

推论　n 阶行列式 D 的任意一行(列)的元素与另一行(列)对应的代数余子式乘积的和等于零.即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\qquad(i\neq s)$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\qquad(j\neq t)$$

三　拉普拉斯定理

【定理】　在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n$),由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\qquad(t=C_n^k)$$

其中 A_i 是 k 阶子式 $Mi(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式.

显然,拉普拉斯定理取一阶子式时即为前面所述的行列式按一行展开定理.

由此定理,可得出前面($**$)式.

四　范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

【例 1】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -11 & 3 & 5 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -7 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 2 & 4 & 9 \\ 10 & -8 & 3 & 4 & 19 \end{vmatrix}$$

分析　此题可以用前面的方法化成三角形,但工作量比较大.若按一行或一列展开,需要计算 5 个四阶行列式,也很繁.为此,先利用行列式的性质把一行或一列化成含尽量多的零元素,然后再按这一行或列展开.

解

$$D \xlongequal[④-2\times③,⑤-3\times③]{①-3\times③,②+③} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & -6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{③-2\times① \\ ④-4\times①}]{②+①} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 2 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 9 & 2 & 22 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 0 & -20 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -4 & -20 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -120$$

【例 2】

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$$

解　把第 1 列的(-1)倍加到其他各列,得

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ x_2+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n+1 & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{cases} x_1+1 & n=1 \\ x_1-x_2 & n=2 \\ 0 & n \geqslant 3 \end{cases}$$

说明　此行列式的结果往往就写成 $D=0$,实际应考虑 n 的不同取值.

【例 3】

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

分析　此行列式任何一行(列)的任何倍数加到另一行(列)上去,都不可能使一行(列)出现多个零元素.因此,我们考虑拆成两个行列式之和.

解

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

其中