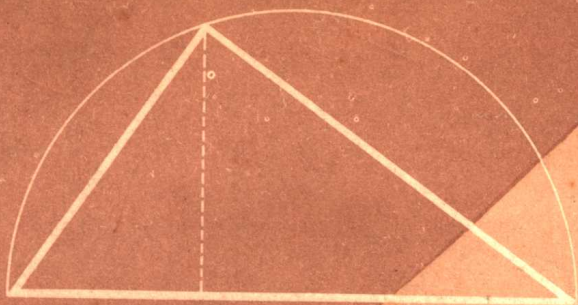
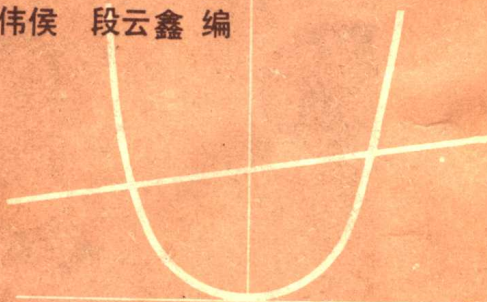




中等数学习题集

第二册

翟连林 陈伟侯 段云鑫 编



科学出版社

中等数学习题集

第二册

瞿连林 陈伟侯 段云鑫 编

科学出版社

1982

内 容 简 介

为帮助读者复习和巩固中学学过的数学基础知识,提高运算、逻辑思维和空间想象能力,本书编者根据多年参加全国和北京市的数学教材的编写和教学实践所积累的资料,以及从国内外大量有关资料中所精选的题目,编选了这套习题集。这本是第二册。

本书按新教学大纲(草案)所规定的内容,除包括传统的代数、几何、三角外,还增加了微积分、概率和逻辑代数初步的题目,渗透了集合、对应等数学思想。全集共精选两千五百多个题组,分四册出版。全部习题分甲组题(复习巩固题)和乙组题(提高题),并在每章之后附有答案或提示。

本书可供中等学校(包括普通中学、工农业余中学、中师、中专、中技等)师生、大专院校(包括师范院校、工农业余大学、电视大学等)低年级学生以及广大知识青年参考和自学用。其中乙组题亦可作为中学数学课外活动小组的参考资料。

中 等 数 学 习 题 集

第 二 册

翟连林 陈伟侯 段云鑫 编

责任编辑 徐一帆

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年9月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1982年3月第三次印刷 印张: 10

印数: 731,761—805,260 字数: 229,000

统一书号: 13031·1384

本社书号: 1915·13-1

定 价: 0.80 元

前 言

在参加全国中小学通用教材的编写工作和教学实践中,我们深感编写一套适合中等数学水平读者需要的《中等数学习题集》是非常必要的。因此,我们参照教育部1978年颁布的全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)和新编的中学数学通用教材,以及《工农业余中学数学教学大纲》(试行草案)和新编的教材,编写了这套习题集。这套习题集是从我们多年参加教材编写和教学工作中所积累的题目中,以及从国内外许多有关资料中选编而成的。目的在于帮助读者复习和巩固在中学学过的数学基础知识,提高运算能力、逻辑思维能力 and 空间想像能力。

这套习题集按大纲所规定的教学内容,采取分科编排的方法,分四册出版。第一册包括:第一篇代数;第二册包括:第二篇平面几何,第三篇立体几何;第三册包括:第四篇平面三角,第五篇平面解析几何;第四册包括:第六篇概率统计和逻辑代数初步,第七篇微积分初步,第八篇综合题。

这套习题集的特点是采取题组的形式,引导读者由简到繁、由具体到抽象地进行思维和演算,以便掌握解题方法,提高分析问题和解决问题的能力。全部习题还根据难易程度分成甲组题和乙组题。为便于读者自学,全部题目都给出提示或答案,对于稍难的题目给出了解题的主要步骤或方法(每题只给一种方法)。

该习题集在最后定稿工作中,我们请了五十三位有丰富教学经验的中学教师(包括北京市特级教师、模范教师)、出版

12AB15/53

社编辑和大学教授进行了认真的校核、审阅,他们提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。

这套习题集是利用业余时间编写的。由于时间仓促,水平又低,错误和不妥之处在所难免,望读者批评、指正。

翟连林 陈伟侯 段云鑫

一九八〇年一月于北京

这套习题集用下列字母表示相应的数集:

N ——自然数集

I ——整数集

R ——有理数集

$\bar{R}$ ——无理数集

D ——实数集

C ——复数集

目 录

前言

第二篇 平面几何

第一章 三角形	I
甲组题	I
一、线段和角(1) 二、全等三角形与等腰三角形(3) 三、三角形的边和角(6) 四、直角三角形(9) 五、三角形的主要线段(13) 六、三角形的面积(15) 七、成比例的线段(16) 八、相似三角形(19)	
乙组题	21
提示或答案	30
第二章 四边形	86
甲组题	86
一、梯形、四边形(86) 二、平行四边形(89) 三、矩形、菱形和正方形(91) 四、相似形和位似变换(92)	
乙组题	94
提示或答案	99
第三章 圆	124
甲组题	124
一、圆的基本性质(124) 二、直线与圆的位置关系(127) 三、圆与圆的位置关系(131) 四、正多边形、弓形和扇形(134)	
乙组题	138
提示或答案	146

第三篇 立体几何

第一章 直线和平面	194
甲组题	194
一、平面的基本性质(194) 二、两直线的位置关系(195) 三、直线和平面位置关系(196) 四、平面和平面的位置关系(199)	

乙组题.....	204
提示或答案.....	208
第二章 多面体.....	230
甲组题.....	230
一、棱柱(230) 二、棱锥 (232) 三、棱台(235)	
乙组题.....	238
提示或答案.....	243
第三章 旋转体.....	271
甲组题.....	271
一、圆柱(271) 二、圆锥(273) 三、圆台(275) 四、球(277)	
乙组题.....	279
提示或答案.....	285

第二篇 平面几何

第一章 三角形

甲 组 题

一、线段和角

1. 在直线 l 上,按指定方向依次取点 A 、 B 、 C 、 D ,且使 $AB:BC:CD = 2:3:4$.
 - (1) 若 AB 的中点 M 与 CD 的中点 N 的距离是 2.4 厘米,求 AB 、 BC 及 CD 的长;
 - (2) 若在 l 上再依次取点 E 、 F 、 G ,使 AE 的中点是 D , BF 的中点是 E , CG 的中点是 F ,求 $CD:DE:EF:FG$ 的比值.
2. M 是线段 AB 的中点, P 在 MB 上.
 - (1) 证明: $PM = \frac{1}{2}(PA - PB)$;
 - (2) 证明: $PA^2 - PB^2 = 2AB \cdot PM$;
 - (3) 若 P 在 AM 上,那么类似于 (1) 和 (2) 的结论是什么?
 - (4) 若 P 在 AB 的延长线上呢?
3.
 - (1) 一个角的补角等于它的余角的三倍,求这个角;
 - (2) $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle COA$ 和 $\angle BOD$ 都是它的相邻的余角,求 $\angle COD$;
 - (3) $\angle AOB = 66^\circ$, $\angle COA$ 和 $\angle BOD$ 都是它的邻补角,求 $\angle COD$;

- (4) 将(2)中的 60° 改为锐角 α , 求 $\angle COD$;
- (5) 将(3)中的 66° 改为锐角 β , 求 $\angle COD$.
4. 射线 OA 与 OB 的夹角为 60° , 射线 OM 平分这个 60° 的角, 又知 $\angle COA = 20^\circ$.
- (1) 求 $\angle COM$;
- (2) 若射线 ON 平分 $\angle COM$, 求 $\angle AON$;
- (3) 若射线 OC' 和 OC 关于直线 OM 对称, 求 $\angle COC'$.
5. $\angle AOB = 50^\circ$, 在射线 OA 上任意取一点 P , 作 $PC \parallel OB$, $PD \perp OB$, 分别求直线 OA 与 PC 、 OA 与 PD 所夹的锐角.
6. (1) 船停在海面上, 从船上, 看, 灯塔的方位角是北偏东 30° , 那么, 从灯塔看, 船的方位角是多少?
- (2) 船停在海面上 C 处, 从船上, 看, 灯塔 A 位于北偏西 48° , 灯塔 B 位于北偏东 15° , 从灯塔 A 看, 灯塔 B 位于东偏北 20° , 求 $\triangle ABC$ 的三个内角.
7. 已知 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$.
- (1) 若 $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, 那么 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 有什么关系?
- (2) 若 $OA \perp O'A'$, $OB \perp O'B'$, 那么 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 有什么关系?
8. 若一直线与两平行直线相交, 证明:
- (1) 同位角的平分线互相平行;
- (2) 内错角的平分线互相平行;
- (3) 同旁内角的平分线互相垂直.
9. 如图 1-1, 已知 $AM \parallel CN$, 证明:
- (1) $\angle MAB + \angle ABC + \angle BCN = 360^\circ$;
- (2) $\angle MAE + \angle AEF + \angle EFC + \angle FCN = 540^\circ$.
10. (1) 已知直线 l 及线段 AB , 在 l 上求作一点 M , 使 $MA = MB$;

(2) A 、 B 、 O 三点不在同一直线上, 过 O 作与 A 、 B 等距离的直线;

(3) A 、 B 、 C 三点不在同一直线上, 求作与这三点等距离的直线.

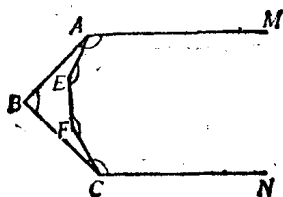


图 1-1

二、全等三角形与等腰三角形

11. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并指出它们是否正确:

(1) 若 x 被 15 整除, 则 x 被 5 整除;

(2) 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$;

(3) 平行四边形的对角线互相平分;

(4) 若从三角形某顶点引出的高线与过此点的内角平分线重合, 则夹此角的两边相等.

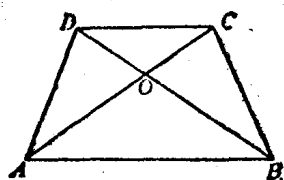


图 1-2

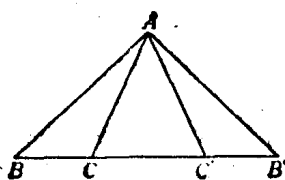


图 1-3

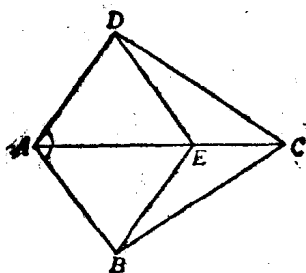


图 1-4

12. (1) 如图 1-2, $AD = BC$, $AC = BD$,

求证: $\triangle AOD \cong \triangle BOC$;

(2) 如图 1-3, $AB = AB'$, $AC = AC'$,

求证: $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$;

(3) 如图 1-4, $\angle BAC$

$= \angle DAC$, $BA = DA$, E 为 AC 上任意一点,

求证: $\triangle DEC \cong \triangle BEC$;

(4) A 、 O 、 B 三点共线, C 、 O 、 D 三点共线, $OA = OC$,

$OB = OD$, M 为 BD 的中点, 求证: $MA = MC$.

13. $\angle XOY < 90^\circ$, 在 OX 上取点 A' 、 B , 在 OY 上取点 A 、 B' , 且 $A'B' \perp OX$, $AB \perp OY$, $OA = OA'$, 设 AB 与 $A'B'$ 交于 I , 求证:

(1) $\triangle IA'B \cong \triangle IAB'$; (2) OI 平分 $\angle XOY$.

14. 在等边三角形 ABC 中, 在边 AB 、 BC 、 CA 上分别取点 A' 、 B' 、 C' , 使 $AA' = BB' = CC'$, 且 CA' 与 AB' 、 AB' 与 BC' 、 BC' 与 CA' 分别交于点 D 、 E 、 F .

(1) 证明: $\triangle ABB' \cong \triangle CAA' \cong \triangle BCC'$;

(2) 证明: $\triangle DEF$ 仍是等边三角形;

(3) 仿(1)将每三个全等的三角形作为一组, 一共能找到多少组?

15. 在 $\triangle ACD$ 中, $AC:AD = 1:2$, 在边 AD 上取一点 E , 使 $AE:ED = 1:3$, 求证: $CE = \frac{1}{2} CD$.

16. 以 $\square ABCD$ 的边 BC 、 CD 为底边, 向外作等边三角形 BEC 、 CFD , 求证: $\triangle AEF$ 是等边三角形.

17. 以 $\triangle ABC$ 的三边为底边, 向 $\triangle ABC$ 外作等边三角形 $AC'B$ 、 $BA'C$ 、 $CB'A$, 求证: $AA' = BB' = CC'$.

18. 以四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 为底边, 向四边形外作等边三角形 AEB 及 CFD , 又以 BC 为底边向四边形内作等边三角形 BGC , 证明: $GE = AC$, $GF = BD$.

19. C 是线段 AB 上任意一点, 分别以 AC 和 CB 为底边, 向 AB 的同一侧作正三角形 ADC 及 CEB , 连 AE 交 CD 于 M , 连 BD 交 CE 于 N , 证明: $MN \parallel AB$.

20. 一直线与两平行直线 AB 及 CD 交于 E 及 F , $\angle AEF$ 的平分线交 CD 于 M , $\angle BEF$ 的平分线交 CD 于 N , 则 $MF = FN$.
21. 正方形 $ABCD$ 的顶点 C 落在和它大小相同的正方形 $PQRS$ 的中心上, 若 $ABCD$ 绕 C 转动, 那么它们重叠部分的面积有何变化?
22. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, M 为底边上任意一点, 作直线 $MP \parallel BA$, 交 CA 于 P , 作直线 $MQ \parallel CA$, 交 BA 于 Q .
 (1) 求证: 四边形 $APMQ$ 的周长是一个定值;
 (2) 若 M' 在底边 BC 的延长线上, 四边形 $AP'M'Q'$ 的周长有与 (1) 类似的性质吗?
23. 在 $\triangle ABC$ 中, 顶点 B 在边 AC 上的射影为 D , 顶点 C 在边 AB 的射影为 E , 求证: DE 的垂直平分线一定经过底边 BC 的中点.
24. 在 $\triangle ABC$ 中, 过内角平分线的交点 O 作平行于边 BC 的直线, 分别交 AB 、 AC 于 M 、 N .
 (1) 证明: $MN = BM + CN$;
 (2) 若 O' 是 $\angle B$ 的平分线和 $\angle C$ 的外角平分线的交点, 那么, 与 (1) 类似的结论是什么?
 (3) 若 O'' 是 $\angle B$ 的外角平分线和 $\angle C$ 的外角平分线的交点, 那么, 与 (1) 类似的结论是什么?
25. 在 $\triangle ABC$ 中, 顶点 A 在 $\angle B$ 的外角平分线上的射影为 E , 在 $\angle C$ 的外角平分线上的射影为 F .
 (1) 求证: $EF \parallel BC$;
 (2) 若 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, 求 EF 的长.
26. 在 $\triangle ABC$ 中, 顶点 A 在 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分线上的射影分别为 M 、 N .
 (1) 求证: $MN \parallel BC$;

- (2) 若 $AB = c, BC = a, CA = b$, 求 MN 的长.
27. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, C 在 AB 上的射影为 D .
- (1) $\angle A$ 的平分线与 CD, CB 分别交于 E, F , 求证:
 $CE = CF$;
- (2) 点 B 关于直线 CD 的对称点是 B' , 过 B' 作与 CB' 垂直的直线交 CA 于 G , 求证: $GA = GB'$.
28. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C, AH \perp BC$, B 关于 AH 的对称点是 B' , 则 $B'C = AB$.

三、三角形的边和角

29. 根据下列条件, 求等腰三角形的三个内角:
- (1) 一角为另一角的两倍; (2) 两角之差为 30° .
30. 根据下列条件, 求多边形的各外角及内角:
- (1) 三角形的三外角度数之比为 $2:3:4$;
- (2) 四边形的四外角度数之比为 $1:2:3:4$.
31. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 100^\circ$, 求:
- (1) $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线的交角 α ;
- (2) $\angle B$ 的平分线与 $\angle C$ 的外角平分线的交角 β ;
- (3) $\angle B$ 的外角平分线与 $\angle C$ 的外角平分线的交角 γ ;
- (4) 若 $\angle A = m$, 分别求 (1)、(2)、(3) 中的 α, β, γ .
32. M 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 连结 MA, MB, MC .
- (1) 证明: $MC + MB < CA + AB$;
- (2) 证明: $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < MA + MB$
 $+ MC < AB + BC + CA$;
- (3) 若点 M 在 $\triangle ABC$ 的边上, (1) 和 (2) 是否都正确?
- (4) 若点 M 在 $\triangle ABC$ 的外面, (1) 和 (2) 是否都正确?
33. 证明:

(1) 三角形底边上的中线,小于两腰之和的一半,大于两腰之和与底边之差的一半;

(2) 三角形三中线之和小于它的周长,大于它周长的 $\frac{3}{4}$;

(3) 三角形的三条高线之和小于它的周长.

34. (1) 动点 M 位于 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分线 l 上,若 M 与 A 不重合,求证: $MB + MC > BA + AC$;

(2) 村庄 A 与村庄 B 位于一条小河之两侧,若河岸彼此平行,要架设一座与河岸垂直的桥,桥址应如何选择,才使 A 与 B 之间距离最短?

(3) 若 A 与 B 之间隔着两条河,河岸彼此平行,上述问题应如何解决?

35. 在 $\triangle ABC$ 中,求证:

(1) 若 $AB > AC$, 则 $\angle C > \angle B$;

(2) 若 $\angle C > \angle B$, 则 $AB > AC$;

(3) 若任何两边都不相等,则边的大小顺序与所对角的大小顺序一致.

36. 在 $\triangle ABC$ 中,在底边 BC 的所在直线上取点 D 、 E ,使 C 位于 B 与 D 之间, B 位于 E 和 C 之间,且 $CA = CD$, $BA = BE$,求证:

(1) 若 $AB > AC$, 则 $AE > AD$;

(2) 若 $AE > AD$, 则 $AB > AC$.

37. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $AC > A'C'$.

(1) 证明: 若 $\angle A \geq 90^\circ$, 则 $BC > B'C'$;

(2) 若 $\angle A < 90^\circ$, 能不能断定 $BC > B'C'$?

38. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, 求证:

(1) 若 $\angle A > \angle A'$, 则 $BC > B'C'$;

(2) 若 $BC > B'C'$, 则 $\angle A > \angle A'$.

39. 在 $\triangle ABC$ 中 (图 1-5), $AB = AC$, D 为 BC 边上一点, 且 $BD > DC$.

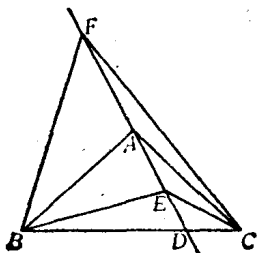


图 1-5

(1) 若 E 为射线 AD 上任意一点, 求证: $BE > EC$;

(2) 若 F 为直线 AD 上任意一点, 且使 A 在 D 与 F 之间, 求证: $BF < CF$.

40. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 作 C 关于 AB 的对称点

C' , 作 B 关于 AC 的对称点 B' , 求证:

(1) $BB' > CC'$; (2) AB 边上的高小于 AC 边上的高.

41. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D , E 为 DA 上任意一点, 求证:

(1) $BD > DC$; (2) $BE > EC$;

(3) $AB - AC > EB - EC$.

42. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, D 为 BC 的中点, 在 AB 、 AC 上分别取 E 、 F , 使 $BE = CF$, 求证: $\angle DEF > \angle DFE$.

43. 在 $\triangle ABC$ 中, 过顶点 A 的中线, 内角平分线及高线分别与 BC 边交于 M 、 E 、 H , 求证: $AM \geq AE \geq AH$.

44. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, M 为 BC 的中点, 证明: $\angle MAC > \angle MAB$;

(2) 若 O 为直线 l 外一点, A 为 O 在 l 上的射影, 从点 A 开始按同一方向在 l 上顺次取点 B 、 C 、 D 、 E 、 $\dots$, 使 $AB = BC = CD = DE = \dots$, 证明:

$\angle AOB > \angle BOC > \angle COD > \dots$.

45. $\triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c , 对应的三条中线为 m_a 、 m_b 、 m_c .

m_c , 求证:

(1) $a < 2m_a \Leftrightarrow \angle A < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

(2) $a = 2m_a \Leftrightarrow \angle A = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

(3) $a > 2m_a \Leftrightarrow \angle A > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

四、直角三角形

46. 如图 1-6. $AC \perp CB$, $CD \perp AB$, $AC = l$, $CB = m$,
 $CD = h$, $AD = t$,

$DB = s$.

(1) $t = 27$, $s = 3$, 求 l ,

h, m ;

(2) $m = 15$, $s = 9$, 求 t ,

h, l ;

(3) $h = 8$, $t = 16$, 求 s ,

m, l ;

(4) 已知 t, s , 求 $S_{\triangle ABC}$;

(5) 已知 l, s , 求 h, m, t .

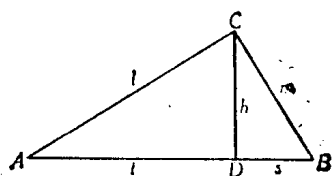


图 1-6

47. (1) 直角三角形两直角边之比为 3:7, 斜边上的高为 42

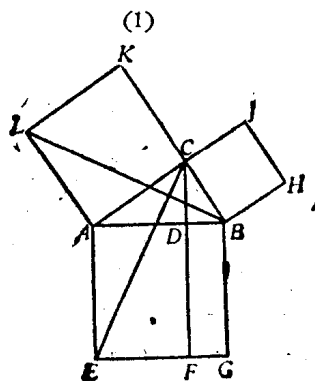


图 1-7

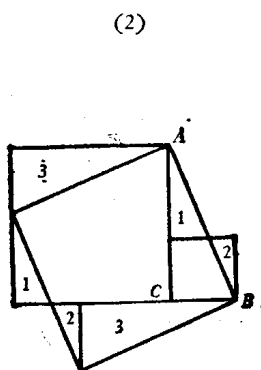


图 1-8

厘米,求两直角边的长及它们在斜边上的射影;

(2) 直角三角形的周长为 $2p$, 斜边上高为 h , 求边长.

48. 利用图 1-7 和图 1-8 证明勾股定理.

49. 如图 1-9~1-14, $AC \perp CB$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, 分别就下列图形求圆 O 的半径 R .

(1)

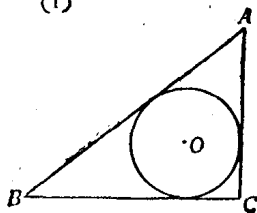


图 1-9

(2)

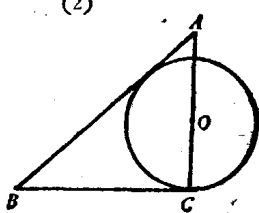


图 1-10

(3)

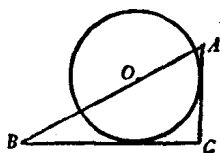


图 1-11

(4)

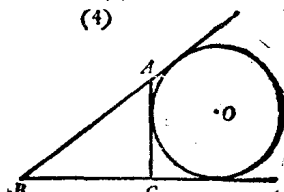


图 1-12

(5)

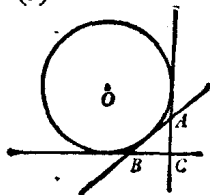


图 1-13

(6)

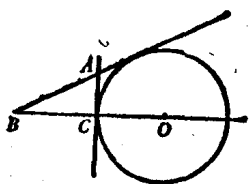


图 1-14

50. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 C 在直线 AB 上的射影 D 位于 A 和 B 之间, 且 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CD = h$, 求证:

(1) 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle ACB = 90^\circ$;

(2) 若 $CD^2 = AD \cdot DB$, 则 $\angle ACB = 90^\circ$;

(3) 若 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$;