创新版奥林匹克竞赛丛书

Olympic Games

中国华罗庚学校数学课本

高二年级

总策划 何 舟
本册主编 张志朝

最新理念

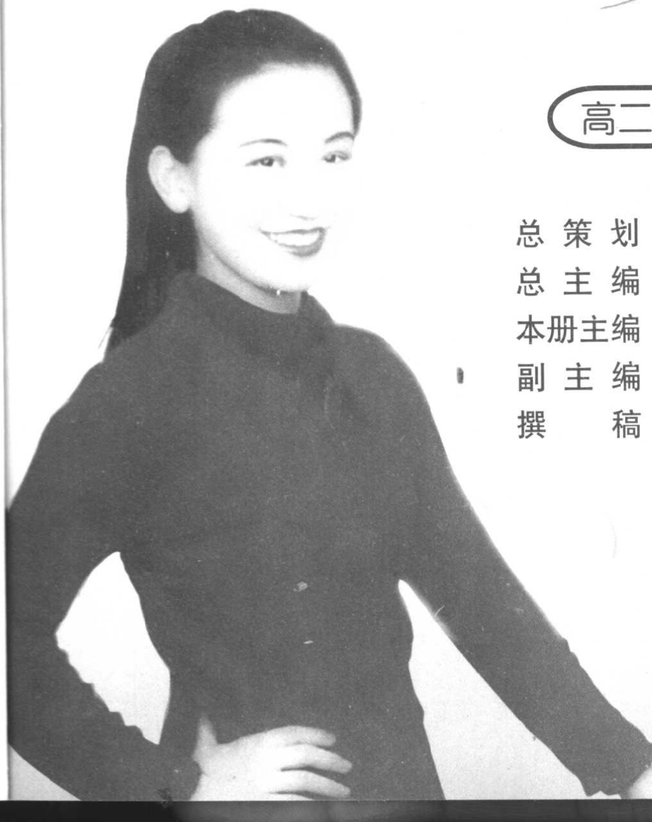
最强阵容

最优结构

吉林教育出版社

中国华罗庚学校数学课本

高二年级



总策划 何舟

总主编 马传渔

本册主编 张志朝

副主编 曾宪安

撰稿 花文明 陈丽琴 徐伟

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号
封面设计：杨　蕙
责任编辑：王世斌　孔庆义

创新版

奥林匹克竞赛丛书

中国华罗庚学校数学课本

高二年级

总 策 划　何　舟
本册主编　张志朝

★

吉林教育出版社 出版 发行
山东汶上新华印刷有限公司印刷　新华书店经销

★

开本：880×1230 毫米　1/32　印张：10.625　字数：338 千字
2002 年 6 月吉林第 1 版　2002 年 6 月山东第 1 次印刷
本次印数：15000 册

ISBN 7－5383－4338－5/G·3959
定价：13.80 元

总主编的话

第31、35届I.M.O.选题委员会委员
南京大学数学系教授、享受国务院政府津贴　马传渔

由我国著名数学家华罗庚、苏步青两位教授于1956年负责举办的全国部分省、市高中数学竞赛,为我国数学竞赛拉开了序幕。历经近50年方方面面的努力，各层次的数学竞赛已在全国开展得红红火火、蓬蓬勃勃，它为开发广大学生的智力，为培养数学奥林匹克师资队伍，为国际数学奥林匹克(I. M. O.)选拔人才,为早期发现与培养现代杰出科技苗子产生了巨大的作用。

为缅怀华罗庚教授的光辉业绩，弘扬华罗庚教授的敬业精神，全国最早由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办了北京市华罗庚学校，经过近20年的发展，小学、初中、高中三个层次的华罗庚学校已遍布全国各地，各种版本华罗庚学校的教材已相映生辉,令人目不暇接。我们这套《中国华罗庚学校数学课本》丛书，愿为漫步在数学奥林匹克殿堂中的广大读者铺路。

本丛书体现了知识点的增加、知识面的扩大和知识框架的更新，强化了新世纪教学思想的介绍与渗透，突出了数学方法的总结和应用，具有可读性、启迪性和实用性。

1. 本丛书是一套**规范的系列奥林匹克培训**

No. 1109

教材,小学包含 1~6 年级 6 个分册,中学包含初一到高三年级 6 个分册,共计 12 本。本丛书不仅体现了小学、初中、高中三个层次内容上的衔接,而且强调了解题方法上的衔接。

2. 本丛书**源于教学**,系参照现行中小学《数学教学大纲》编写而成,既覆盖了相应教材中的各个知识点,与现行教材同步,又增添了不少解题方法的篇章。

3. 本丛书**高于教学**,紧扣各级数学竞赛大纲,每册读本既详尽地介绍各级数学竞赛的内容和题型,又由浅而深地引入竞赛中经常使用的各种数学思想和数学方法。本书"**本章小结**"栏目,对每章相关的知识点、解题方法、问题的规律、应用的范围、伸展与拓广、创新与灵感作了总结与提炼。

4. 本丛书以趣例引入,具有浓厚的**趣味性**;以生活实例作背景介绍数学内容,具有广泛的**应用性**;以探索性、操作性范例作展示,具有丰富的**启迪性**,能激发广大中小学生学习数学的兴趣。

5. 本丛书注意到**与各级数学竞赛接轨**,强调数学技能与解题能力的循序渐进的训练与培养,"**探究过程**"栏目中所提供的实例题意新颖、内容丰富,十分贴近各级数学竞赛试题,能帮助数学特长生在数学竞赛中获胜,为个别数学特长生冲刺奥林匹克金牌架设桥梁。

6. 本丛书由名牌大学**数学教授**、**命题专家**、**特级教师**、**学科带头人**、**奥林匹克教练员**编写而成,既可作为一本课外读物,也可作为数学辅导书及数学培训班、数学兴趣小组的试用教材与参考书,还可作为中小学教师培训奥林匹克的教本。

"千里之行,始于足下。"愿《中国华罗庚学校数学课本》陪伴广大数学爱好者在汗水中积累知识,在灵感中启迪智慧,在玩乐中迎接成功。

中国华罗庚学校数学课本

编　委　会

结识名师

张志朝

江苏省中学数学特级教师，江苏省有突出贡献的中青年专家，国家数学奥林匹克高级教练员，中国数学学会会员。从事数学教学工作 20 年中，始终在教学第一线，进行数学课堂教学和数学教学研究，教学成果显著。在《数学通报》《中学数学》等省级以上刊物发表论文 38 篇，多篇论文获省优秀论文一等奖；出版专著五本，主编、参编教辅用书 20 多本。1997 年获江苏省红杉树“教育奖”金奖，1998 年获（中国）教育基金会第四届香港柏宁顿“孺子牛教育奖金球奖”，是江苏省第二批“333 工程”培养对象，2000 年还被推荐为政府特殊津贴候选人。

目录

第十一章　特殊四面体

第十二章　排列与组合

第十三章　二项式定理

第十四章　概　率

华罗庚学校

第一章 不等式的证明

不等式的证明一般没有固定的程序，其证明方法因题而异，灵活多样，技巧性也强．一个不等式的证法有时不止一种，一种证法也可能要用好几个技巧．但基本思路总是把原来的不等式变为明显成立的不等式．常见的证法有：比较法、综合法、分析法、放缩法、换元法、反证法与逐步调整法等．对于自然数命题的不等式也可采用数学归纳法证明．

不等式的证明问题具有一定的综合性．在证明不等式时，不仅要熟练掌握不等式的性质和常用的证明方法，还应适当掌握一些代换与放缩的技巧．

第一节 比较法

根据实数的有序性，在证明不等式 $A>B$ 或 $A<B$ 时，直接把 $A-B$ 与 0 比较大小，或把 $\frac{A}{B}$（A、$B\in(0,+\infty)$]与 1 比较大小，最后推演出结论．这种方法称为比较法，它立足基础，是证明不等式的基础方法，不容忽视．

探究目标

1．**掌握作差比较法**

能根据不等式的定义 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，理解证明不等式的作差比较法．掌握作差比较法证明不等式的方法：作差，对差式因式分解或配方以判断差式的符号，根据差式符号证明被减式与减式的大小关系．

2．**掌握作商比较法**

能根据不等式的性质 $a>b>0\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$ 且 $b>0$，理解证明不等式的作商比较法．掌握作商比较法证明不等式的方法：作商，通过商与 1 的大小比较，在分母符号确定的前提下，证明分子与分母的大小关系．

3．在证明具体的不等式时，能根据要证的**不等式的特点**，对是否能采用**比较法证明**作出判断与选择．

探究过程

比较两个实数的大小是用实数的运算来定义的，有：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b<$

$0 \Leftrightarrow a < b$；$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$；$a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$ 且 $b > 0$.这是用比较法证明不等式的理论依据.

建议:1. 若不等式两端是以和差为主的代数式,则往往采用作差法来证明.

2. 对于两端都是指数幂的形式(两边均是正的)的不等式,宜采用作商法来证明.

3. 在作差法中,对差的符号的判定;在作商法中,对商与 1 的大小比较,都是该题的给分点.故应对确定符号与确定与 1 的大小比较的理由逐一阐述.

讨论:比较法的基本好处是:能变定性推理为定量计算,能变放缩技巧为恒等变形.采用比较法证明不等式最重要的步骤是变形,变形中一定要设法出现已知条件,并且常作分解因式或配方等便于判别符号的恒等变形.

证明:1. 利用作差法证明不等式的一般步骤是:(1)作差;(2)变形,可以利用分解因式、配方、判别式等手段;(3)确定符号.

2. 作商法的一般步骤是:(1)作商;(2)变形,一般利用指数函数的性质进行变形;(3)确定与 1 的大小关系.

例 1 设△ABC 的三边分别为 a,b,c,求证:$4(ab+bc+ca) > (a+b+c)^2$.

证明:∵

$$\begin{aligned}&4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2\\&=2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\\&=(ab+ac-a^2)+(ab+bc-b^2)+(bc+ca-c^2)\\&=(b+c-a)a+(a+c-b)b+(a+b-c)c,\end{aligned}$$

又∵ a,b,c 为△ABC 的三边,

∴ $a,b,c>0, b+c-a>0, c+a-b>0, a+b-c>0$.

∴ $(b+c-a)a+(a+c-b)b+(a+b-c)c>0$,

即 $4(ab+bc+ca)>(a+b+c)^2$.

例 2 对 $-1<a<b<1$,求证:$\frac{a}{1+a^2}<\frac{b}{1+b^2}$.

证明:由题意,得

$$\begin{aligned}&\frac{a}{1+a^2}-\frac{b}{1+b^2}\\&=\frac{a(1+b^2)-b(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\\&=\frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}.\end{aligned}$$

∵ $-1<a<b<1$,

∴ $a-b<0, 1-ab>0$.

∴ $\frac{a}{1+a^2}-\frac{b}{1+b^2}=\frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}<0$.

故
$$\frac{a}{1+a^2}<\frac{b}{1+b^2}.$$

例3 设 $x,y,z\in\mathbf{R},a,b,c\in(0,+\infty)$. 求证：$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{a+c}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx)$.

证明：作差，记 $A=\frac{b+c}{a}x^2+\frac{a+c}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2-2(xy+yz+zx)$.

因为 $a,b,c\in(0,+\infty)$，所以

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{b}{a}x^2+\frac{a}{b}y^2-2xy\right)+\left(\frac{c}{a}x^2+\frac{a}{c}z^2-2zx\right)+\left(\frac{c}{b}y^2+\frac{b}{c}z^2-2yz\right)\\&=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{b}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{c}}z\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}y-\sqrt{\frac{b}{c}}z\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

故
$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{a+c}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

例4 给定正整数 a,b,n，且 $a>1,b>1,n>1$. A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数，A_{n-1}、A_n、B_{n-1}、B_n 呈如下形式：

$A_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0}$，$A_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0}$(按 a 进制写出)，

$B_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0}$，$B_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0}$(按 b 进制写出)，

其中 $x_n\neq 0,x_{n-1}\neq 0$. 证明：当 $a>b$ 时，有 $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$.

证明：因为 $A_n>0,B_n>0$，只须证 $A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n>0$.

而
$$A_n=x_na^n+x_{n-1}a^{n-1}+\cdots+x_0,$$
$$A_{n-1}=x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_0.$$

故有
$$A_n=x_na^n+A_{n-1}.$$

同理
$$B_n=x_nb^n+B_{n-1}.$$

于是
$$\begin{aligned}&A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n\\&=(x_na^n+A_{n-1})B_{n-1}-A_{n-1}(x_nb^n+B_{n-1})\\&=x_n(a^nB_{n-1}-b^nA_{n-1})\\&=x_n[a^n(x_{n-1}b^{n-1}+x_{n-2}b^{n-2}+\cdots+x_0)-b^n(x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_0)]\\&=x_n[x_{n-1}(a^nb^{n-1}-a^{n-1}b^n)+x_{n-2}(a^nb^{n-2}-a^{n-2}b^n)+\cdots+x_0(a^n-b^n)].\end{aligned}$$

由于 $a>b$，所以 $a^nb^{n-k}>a^{n-k}b^n(1\leqslant k\leqslant n)$.

又因为 $x_n>0,x_{n-1}>0,x_{n-2}\geqslant 0,\cdots,x_0\geqslant 0$，故可得 $A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n>0$，命题得证.

例5 已知 $n>1$,求证:$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$.

证明:∵ $$n>1,$$

∴ $$\log_n(n+1)>0,\log_{n+1}(n+2)>0,$$

且 $$\frac{\log_n(n+1)}{\log_{n+1}(n+2)}=\frac{\lg^2(n+1)}{\lg n\cdot\lg(n+2)}$$
$$>\frac{\lg^2(n+1)}{\left[\frac{\lg n+\lg(n+2)}{2}\right]^2}$$
$$=\left[\frac{2\lg(n+1)}{\lg n+\lg(n+2)}\right]^2$$
$$=\left[\frac{\lg(n+1)^2}{\lg n(n+2)}\right]^2$$
$$=\left[\frac{\lg(n^2+2n+1)}{\lg(n^2+2n)}\right]^2>1,$$

∴ $$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2).$$

例6 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,若 $0<x<1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解:∵ $$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{(1+x)}(1-x)|$$
$$=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}$$
$$=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1,$$

∴ $$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

例7 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in(0,+\infty)$,求证:$a_1^{a_1}\cdot a_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{a_n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$

证明:由于要证不等式关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 具有对称性,故可设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$,于是 $a_1-a_2,a_1-a_3,\cdots,a_1-a_n,\cdots,a_{n-1}-a_n$ 都是非负数,并且$\frac{a_1}{a_2},\frac{a_1}{a_3},\cdots,\frac{a_1}{a_n},\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n}$都不小于 1.

故 $$\left[\frac{a_1^{a_1}\cdot a_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{a_n}}{(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}}\right]^n$$
$$=\frac{a_1^{na_1}\cdot a_2^{na_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{na_n}}{(a_1a_2\cdots a_n)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$$

$$= a_1^{(a_1-a_2)+(a_1-a_3)+\cdots+(a_1-a_n)} a_2^{(a_2-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_2-a_n)} \cdots$$
$$a_n^{(a_n-a_1)(a_n-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}$$
$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{a_1-a_2}\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{a_1-a_3}\cdots\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{a_1-a_n}\cdots\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{a_{n-1}-a_n} \geqslant 1.$$

因此，$a_1^{a_1}\cdot a_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{a_n} \geqslant (a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$.

拓展练习

1. 求证：$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.
2. 已知 $x,y\in(0,+\infty)$，求证：$(x^2+y^2)^3>(x^3+y^3)^2$.
3. 已知：$a_1,a_2,\cdots,a_n\in(0,+\infty)$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m<n$.

   求证：$$n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$$
   $$\geqslant m\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}-\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}\right).$$
4. 已知：$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，令 $s=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$s'=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$. 求证：$s'\leqslant s$.
5. 已知 $a,b,c>0$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.
6. 证明：$2001^{2002}>2002^{2001}$.

第二节　综合法与分析法

在证明不等式时，我们常通过等式或不等式的变形，将其转化为容易的、熟知的不等式，从而说明原不等式成立；或者从容易的，熟知的不等式入手，经过一系列的变形导出要证明的不等式.

1. 综合法

从一个正确的不等式出发，根据不等式的性质对该不等式作一系列变形，直至推出所求证的不等式，即由条件出发推出结论.

2. 分析法

在证明过程中执果索因，从结论出发找命题成立的充分条件，直到找到明显成立的不等式为止，这种方法叫做分析法. 在具体进行时，可以找充要条件，或找必要条件再验证步步可逆.

探究目标

1. 掌握均值不等式及它的各种等价式.

2. 对于能够采用综合法证明的不等式能熟练的由“因”导“果”，即从已知条件出发，依据不等式性质、函数性质、重要不等式等逐步推进，证得所要证明的不等式.

3. 学会“分析”，能执“果”索“因”，学会从欲证的不等式出发层层推求使之成立的充分条件，直至推出已知不等式为止.

探究过程

作为“公式”的不等式，常用的有：

1. $a\in\mathbf{R}$，则 $a^2\geqslant 0$.
2. $a,b\in(0,+\infty)$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，等号成立的充要条件是 $a=b$.
3. $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，等号成立的充要条件是 $a=b$.
4. $a,b,c\in(0,+\infty)$，$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，等号成立的充要条件是 $a=b=c$.
5. $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

用分析法证明“若 A 成立，则 B 成立”的模式是：欲证命题 B 为真，只需证 B_1 为真，从而又只需证 B_2 为真，从而又……只需证 A 为真，今已知 A 为真，故 B 为真. 用符号简化，即是 $B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\cdots\Leftarrow B_n\Leftarrow A$.

建议：1. 在应用均值不等式证明时，一定要注意以下两点：

(1)考虑字母或字母的组合是否为正；

(2)考虑等号能否成立.

2. 在探索不等式的证明时，将综合法与分析法结合起来使用，能迅速找到不等式证明的有效途径.

例1 设 a,b,c 为非负实数，求证：$\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

证明：
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(a+b+c)^2&=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\&\geqslant\frac{1}{3}(3ab+3bc+3ca)\\&=ab+bc+ca\\&=\left(\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc\right)+\left(\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ca\right)+\left(\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca\right)\\&\geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

例2 已知：$m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\geqslant 2$，$x_1\in(0,+\infty)$，$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=1$.

证明：$(m+x_1)(m+x_2)\cdots(m+x_n)\geqslant(m+1)^n$.

证明：∵ $m+x_i=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m个1}+x_i$