▲高等学校教学参考书▼

空间解析几何简明教程

吴光磊 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

空间解析几何简明教程

吴光磊编

人民教育出版社

本书主要内容有：空间直角坐标、平面和直线，向量代数，二次曲面，正交变换和仿射变换等。

本书可供综合大学和高等师范院校数学专业用作教学参考书。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

空间解析几何简明教程

吴光磊编

人民教育出版社（北京沙滩后街）

浙江洛舍印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·076　开本 787×1092 1/32　印张 3 2/16

字数 77,000　印数 92,501-97,000　定价(5)￥0.26

1966年5月第1版　1983年2月浙江第6次印刷

引　言

事物的存在和发展都有形式和数量这两个方面．这就是数学研究的对象：形和数．数的基本特征是可以进行运算．最简单的是代数运算，如四则运算、开方等，它们有简单而明确的法则，如分配律、移项变号等．用这些法则就能够把一部分概念推理变成符号演算，把一部分心算变成笔算．一些算术难题在代数中就可以列成方程，给出一般性的简易解法．这说明代数运算是非常有力而又简便的方法．

解析几何的特点就是用代数方法来研究一些几何图形，解决一些几何问题．为此，很自然的想法是首先在几何与代数之间架上桥梁，把它们沟通起来；由此几何问题就可以转化成代数问题，这就是坐标法的基本思想．

另一方面，不通过坐标，也可以在几何中建立向量运算，直接把代数运算引到几何中来．向量运算常常能够更简捷地解决一些几何问题，这就是向量代数的作用．

本书的内容概括地讲就是：用代数方法讨论一些简单的图形和变形的性质．所谓代数方法就是坐标法和向量运算，简单的图形和变形是指直线、平面、二次曲面和正交变换以及仿射变换．这些东西在代数、分析、力学、物理和一些工程技术中都是很有用的，它们所反映的事物在生活和生产实践中也是常见的；这些东西是学习其他课程和解决某些实际问题的基础．

目　录

第一章　空间直角坐标、平面和直线

解析几何的基本方法是坐标法．坐标法中的主要问题是用数表示点，用方程表示图形．空间中最简单的图形是点、线、面，它们的位置通常是用距离和方向确定的．因此，在空间解析几何开头这一章里，我们首先要建立点的坐标，随后就导出平面和直线的方程，并讨论计算有关的距离和方向等问题．

距离是几何中最原始的数量．测定距离要用一个长度单位．在本书中，我们**假定**：在空间中已经给定了一个长度单位，所有的距离都是对于这个给定的单位来讲的．

§1．空间直角坐标

1．点的坐标

问题是要在空间中用数来确定点的位置．我们知道，在平面上，一个点的位置可以由该点到两条互相垂直的直线的距离来确定．同样地，在空间中，一个点的位置可以由该点到三个互相垂直的平面的距离来确定．

在空间中，任取一个点 O 并从点 O 画出三条互相垂直的轴（取定方向的直线），把这三条轴排定一个次序，依次记做 OX，OY，OZ．这样就构成一个（**直角**）**坐标系**，记做 $[O;X,Y,Z]$．点 O 叫做**原点**．三条轴 OX, OY, OZ 都叫做**坐标轴**，并依次叫做 X 轴、Y 轴和 Z 轴．由每两条坐标轴所决定的平面都叫做**坐标平面**；按照坐标平面所包含的坐标轴，分别叫做 YZ **平面**、ZX **平面**和 XY **平面**，它们依次垂直于 X 轴、Y 轴和 Z 轴．

一个坐标平面把空间分割成两部分，和它垂直的那条坐标轴

所指向的那一部分叫做这个坐标平面的**正面**，另一部分叫做它的**反面**．我们**规定**：从一个坐标平面到它正面一点的距离是正的，到反面一点的距离是负的．

现在来看空间中一个点P的位置．点P与坐标平面YZ, ZX, XY的距离(有正负)依次是三个实数x, y, z，它们依次对应于三条坐标轴，因而也随着排定了次序．象这样排定次序的三个数叫做一个三元数组，记做(x, y, z)．给定了(x, y, z)，点P的位置就定住了．因此，(x, y, z)叫做点P对于坐标系$[O;\ X, Y, Z]$的**坐标**．显然，一个点的坐标也可以依次看做从原点到它在各坐标轴上的垂足的距离．

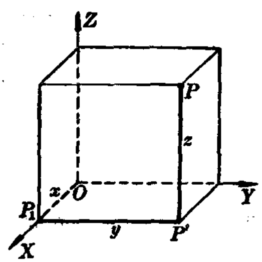


图 1.1

点P的第三个坐标z就是从P在XY平面上的垂足P'到P的距离．因PP'平行于Z轴，故P的第二个坐标y就是从P'在X轴上的垂足P_1到P'的距离．因P_1也是P在X轴上的垂足，故P的第一个坐标x就是从O到P_1的距离．由此可见，P的坐标可以表成一条折线$OP_1P'P$，叫做P的**坐标折线**．要确定点P的坐标，也就是要从P开始画出它的坐标折线来．要从坐标(x, y, z)定出点来，也就是要从原点开始画出坐标折线来．三个坐标依次表示折线各边的方向和长度．

这样，取定了一个坐标系以后，一个点唯一地确定了一个三元数组；反过来，一个三元数组也唯一地确定一个点．这就是说，一个坐标系在点与三元数组之间建立了一个一一的对应关系．坐标是(x, y, z)的点P常简记做$P(x, y, z)$．

显然，在一个坐标平面上的点有一个坐标是0，在一根坐标轴上的点有两个坐标是0，原点的坐标全是0．例如，对于ZX平面

上的点，第二个坐标是 0；对于第二个坐标轴上的点，第一和第三个坐标都是 0；等等.

从坐标折线用勾股定理可以看出，点 $P(x, y, z)$ 与原点的距离是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2. 坐标系的平移

坐标总是对于坐标系来讲的．当坐标系变动的时候，一个定点的坐标一般是要改变的．现在来看一看：当坐标系 $[O; X, Y, Z]$ 各坐标轴的方向都不变而原点 O 变成 P_0 的时候，一个点 P 的坐标是怎样改变的．这时，$[O; X, Y, Z]$变成了 $[P_0; X', Y', Z']$，这叫做坐标系的平移．因坐标轴的方向不变，故各坐标平面经过一个平行移动．设 P_0 和 P 对于 $[O; X, Y, Z]$ 的坐标各为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z)，P 对于 $[P_0; X', Y', Z']$ 的坐标为(x', y', z')．现在的问题是要找出这些坐标之间的联系.

一个点的坐标就是从该点到坐标平面的距离(带正负号)．从一个点到一个水平的平面的距离就是从平面算起的高度．显然，当这个平面上下移动一段距离(向上为正、向下为负)时，高度的变化就是减去这段距离．水位标竿出水高度的变化就是这种情况．由此可见，当一个坐标平面平行移动时，对应坐标的变化就是减去了移动的距离.

现在，坐标平面平行移动的距离各为 x_0, y_0, z_0，所以

$$\begin{cases} x'=x-x_0, \\ y'=y-y_0, \\ z'=z-z_0. \end{cases}$$

这就是当坐标系平移时点的坐标的变化规律，简单地说就是减去新原点的坐标.

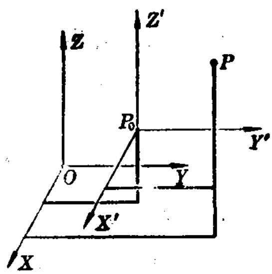


图 1.2

由此可见，两个点的坐标差当坐标系平移时保持不变.

现在来看 P_0 与 P 两点间的距离 $|P_0P|$. 从坐标系 $[P_0; X', Y', Z']$ 中看，这就是点 P 与原点 P_0 的距离，而 P 在这个坐标系中的坐标是 (x', y', z')，所以

$$|P_0P| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

转换到坐标系 $[O; X, Y, Z]$ 中去，就得到

$$|P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

这就是用坐标计算距离的公式.

例 1 在 X 轴上找出一点 P，使它与点 $P_0(4, 1, 2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解 要找的点 P 在 X 轴上，设它的坐标是 $(x, 0, 0)$. 问题就是把 x 求出来. 按给定的条件，$|P_0P| = \sqrt{30}$，即

$$\sqrt{(x-4)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30},$$

$$(x-4)^2 = 25,$$

$$x = 9, \quad -1.$$

所以，要找的点是 $(9, 0, 0)$ 或 $(-1, 0, 0)$.

例 2 对于固定的坐标系，当线段平行移动时，端点的坐标差保持不变.

证 先让坐标系与线段一块儿平行移动，这时，端点的坐标显然不变，因而端点的坐标差也不变. 然后再把坐标系平移回到原位，这时端点的坐标差仍不变. 总的结果就是，坐标系的位置没有动，只有线段平行移动了，而端点的坐标差不变.

§2. 怎样表示方向

1. 方向数

一个点的位置通常是用方向和距离确定的. 要问目标在哪儿，就是要明确它的方向和距离. 从一个点顺着一个方向看出去，

所能看到的点形成一条射线．因此，通常都用射线来表示方向．当射线平行移动的时候，它的方向保持不变．用射线表示方向时，射线的起点可以任意取．

在一个坐标系 $[O; X, Y, Z]$ 中，有一个现成的原点 O，因此常用从原点出发的射线表示方向．于是，原点以外的任意一点 P 都表示一个方向，就是从 O 到 P 的方向．这时，点 P 的坐标 (x, y, z) 就叫做这个方向的一组**方向数**．射线 OP 上其他的点也都表示这同一个方向，它们的坐标都是这同一个方向的方向数．当 P 在射线 OP 上变动的时候，方向数的变化是同时乘上一个正数．当然，一组方向数不能全是 0．方向数为 (x, y, z) 的方向，常简称为方向 (x, y, z)．

现在来求从一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到一点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的方向的方向数，问题在于 P_1 不必是原点．经过线段 P_1P_2 的平行移动把 P_1 搬到原点去．这时假设 P_2 被搬到 P_2'，那末 P_2' 的坐标 (x_2', y_2', z_2') 就是所求的一组方向数．因为线段平行移动时端点坐标的差保持不变，所以

$$
\begin{aligned}
x_2' &= x_2' - 0 = x_2 - x_1,\\
y_2' &= y_2' - 0 = y_2 - y_1,\\
z_2' &= z_2' - 0 = z_2 - z_1.
\end{aligned}
$$

于是，$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 是从点 (x_1, y_1, z_1) 到点 (x_2, y_2, z_2) 的方向的一组方向数．

2. 方向余弦

射线 OP 与坐标轴 OX，OY，OZ 依次形成三个角 α, β, γ．这三个角确定了从 O 到 P 的方向，叫做这个方向的**方向角**．由点 $P(x, y, z)$ 在各坐标轴上的垂足可以看出：

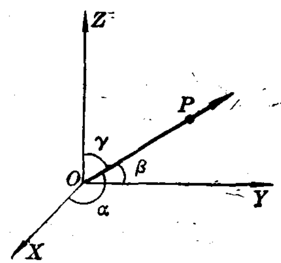


图 1.3

$$x=|OP|\cos\alpha,$$
$$y=|OP|\cos\beta,$$
$$z=|OP|\cos\gamma.$$

这就是方向数与方向角之间的关系.

方向角的余弦叫做**方向余弦**. 显然，方向余弦也是一组方向数，这就是$|OP|=1$时的方向数. 所以，方向余弦就是用与原点距离为1的点表示方向. 因此，一个方向的方向余弦是唯一确定的，并且方向余弦的平方和总是1：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

这是一组方向余弦或方向角所必须满足的条件.

例如：

$$0^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.$$

这就是说，$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$表示一个与原点距离为1的点，也就是说，它们是某一个方向的方向余弦；易见，这个方向的方向角是$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

又如：

$$\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{6}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\neq1.$$

这说明$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$不是任何方向的方向余弦；也就是说，没有一条射线依次与坐标轴的夹角会是$\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{6}$.

与原点距离为1的点形成一个球面. 所以方向余弦也可以说是用一个球面上的点来表示方向. 在天文上就是这样，用一个所

谓天球上的点表示星体的方位.

从方向数很容易定出方向余弦来. 例如对于点 $P(x, y, z)$所表示的方向, 方向数为(x, y, z), 方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OP|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|OP|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|OP|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

当然, 这也就是把方向数的平方和化成1.

3. 两方向间的角度

设给定两个方向的方向余弦各为(l_1, m_1, n_1)与(l_2, m_2, n_2), 要求出它们之间的角度 θ. 把这两组方向余弦看做与原点距离为1的两个点 E_1 与 E_2 的坐标, 那末 θ 就是射线 OE_1 与 OE_2 的夹角. 由余弦定律,

$$|E_1E_2|^2=1+1-2\cos\theta.$$

由两点间距离的公式,

$$\begin{aligned}|E_1E_2|^2&=(l_1-l_2)^2+(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2\\&=1+1-2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2).\end{aligned}$$

于是

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$

这就是由方向余弦计算角度的公式.

两个方向或两条射线间的角度不是唯一确定的, 可以是 θ 也可以是 $2\pi-\theta$. 为确定起见, 我们规定: 两个方向间的角度要取在0与 π 之间, 即

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

这样, 角度就由它的余弦唯一确定了.

由角度的公式可以看出，两个方向垂直的条件是对应方向数的乘积之和为 0.

§3. 平面的方程

1. 平面的法式方程

决定平面的一个简单方法是用一个点和一个方向：经过一个点并垂直于一个方向有唯一的一个平面. 与一个平面垂直的方向叫做它的**法向**. 一个平面正好有两个并且是相反的法向.

在空间中，点的坐标可以毫无限制地取任意数值. 在平面 π 上，点的坐标要满足一定的条件；这就是平面 π 的方程，它是用一个点的坐标来表示这个点在平面 π 上.

现在我们要导出一个平面 π 在一个直角坐标系 $[O;\ X,\ Y,\ Z]$ 中的方程. 为此，首先要明确平面与坐标系间的联系.

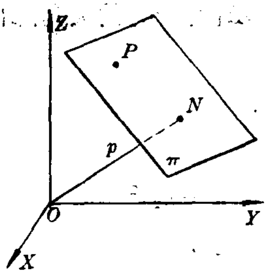


图 1.4

原点 O 在平面 π 上有一个确定的垂足 N. $p=|ON|$ 就是平面与原点的距离，$p\geqslant 0$. $p=0$ 表示平面经过原点. 如果 $p\neq 0$，从 O 到 N 的方向就确定了，它垂直于平面并且从原点指向平面，设它的方向余弦为 (l, m, n). 当 $p=0$ 时，我们用 (l, m, n) 表示平面的任意一个法向的方向余弦. 这样，N 的坐标就是 (pl, pm, pn). 方向余弦 (l, m, n) 和距离 p 完全确定了平面 π 对于坐标系的位置；从坐标系上看，说给定了一个平面，就是说给定了这些东西.

说点 $P(x, y, z)$ 在平面 π 上，就是说：若 $P\neq N$，则从 N 到 P 的方向垂直于 π 的法向. 用坐标来讲，这就是说

$$l(x-pl)+m(y-pm)+n(z-pn)=0.$$

整理一下，记住方向余弦的平方和等于 1，得到

$$lx+my+nz-p=0.$$

这就是平面π的方程；显然，点N的坐标也满足这个方程. 这种方程叫做平面的**法式方程**.

所以，一个平面的法式方程是关于点的直角坐标的一个一次方程，一次项的系数是平面法向的方向余弦，常数项变号是平面与原点的距离. 当平面不经过原点时，一次项的系数所表示的法向从原点指向平面，法式方程是唯一确定的；当平面经过原点时，对应于两个法向，就有两个法式方程，系数只差一个负号.

法式方程是一种特殊的一次方程，它的特点是：一次项系数的平方和等于 1，常数项不大于 0，即

$$l^2+m^2+n^2=1, \quad p\geqslant 0.$$

法式方程的推导说明：关于点的直角坐标的每个这种方程都表示一个经过点(pl, pm, pn)并垂直于方向(l, m, n)的平面.

例如：一次方程

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z-1=0$$

就是一个法式方程. 而方程

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+1=0$$

与

$$x+y+z=0$$

都不是法式方程.

2. 平面的一般方程

把法式方程乘上任意的非 0 常数，所得到的方程当然表示同一个平面，但是一般就不再是法式方程了. 那末，一个一般的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

是否也表示一个平面呢?

要回答这个问题，只要看这个方程是否能化成法式方程就行了．这就是说要把一次项系数的平方和化成1，并使常数项不大于0. 为此，只要把方程用$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$(选取与D相反的正负号)除一下就行了:

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(Ax+By+Cz+D)=0,$$

其中

$$\pm D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\leqslant 0.$$

因为方程是一次的，一次项的系数不能全为0，所以这个除法是能行的.

于是，一个关于点的直角坐标的一次方程表示一个平面．这就叫做平面的**一般方程**.

把一般方程除上一次项系数的平方和的平方根，并选取与常数项相反的正负号，就得到法式方程．因此，一次项系数是法向的方向数.

两个平面平行就是说有相同的法向，从它们的一般方程看，这就是说，对应的一次项系数成比例.

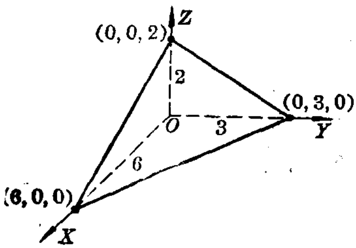
一个平面顶多有两个法式方程，并且它们只差一个负号．因此，两个一般方程表示同一个平面的条件是：它们只差一个常数因子.

一般方程中，某个系数是否为0，有明显的意义．常数项是0就表示平面经过原点．因此，把方程的常数项抹掉就相当于把平面平移到原点上去.

方程中z的系数为0，就表示把平面平移到原点上以后要经过Z轴，这就是说平面平行于Z轴.

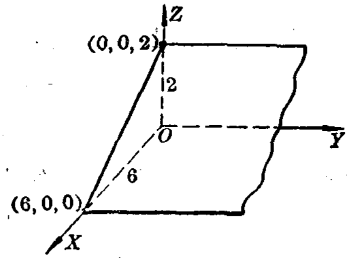
在作图中要表示一个平面，通常是画出它与坐标轴的交点和

与坐标平面的交线. 当然不必把这些都画出来, 只要能够决定平面就行了. 例如下面的图形:



$x+2y+3z-6=0$

图 1.5



$x+3z-6=0$

图 1.6

读者可以想一想: 抹掉方程的一个一次项, 对平面的位置有什么影响, 你能把这种情况清楚地、完全地写出来吗? 试试看.

例 1 一个平面经过点 $P_1(3, -2, 1)$ 并且垂直于 P_1 与点 $P_2(6, 2, 7)$ 的连线, 求它的方程.

解 从 P_1 到 P_2 的方向垂直于平面, 这个方向的一组方向数是 $(3, 4, 6)$. 因此, 平面的方程可以写成

$$3x+4y+6z+D=0.$$

因平面经过 P_1, 故

$$3\times3+4\times(-2)+6\times1+D=0,\quad D=-7.$$

所以平面的方程是

$$3x+4y+6z-7=0.$$

例 2 一个平面经过三点 $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(-2, 1, 2)$ 与 $P_3(-3, 3, 1)$, 求它的方程.

解 设平面的方程是

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因平面经过 P_1, P_2, P_3, 故

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ -2A+B+2C+D=0, \\ -3A+3B+C+D=0. \end{cases}$$

从后两个方程减去第一个方程，得

$$-3A+C=0,$$

$$-4A+2B=0.$$

因此 $C=3A$, $B=2A$. 代入第一个方程，得

$$A+2A+3A+D=0,$$

即 $D=-6A$. 因方程必须是一次的，故 $A\neq0$. 取 $A=1$，得平面的方程为

$$x+2y+3z-6=0.$$

例 3　一个平面经过点 $P_1(4,-3,-2)$，垂直于平面

$$x+2y-z=0 \text{ 和 } 2x-3y+4z-5=0,$$

求它的方程.

解　设平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

给定的条件就是

$$\begin{cases} 4A-3B-2C+D=0, \\ A+2B-C=0, \\ 2A-3B+4C=0. \end{cases}$$

从后两个方程消去 A，得 $7B-6C=0$，即 $B=\frac{6}{7}C$. 代入第二个方程得 $A+\frac{12}{7}C-C=0$, 即 $A=-\frac{5}{7}C$. 因方程是一次的，故 $C\neq0$.

取 $C=-7$，得 $A=5, B=-6$. 代入第一个方程得

$$D=-4\times5+3\times(-6)+2\times(-7)=-52.$$

于是所求的方程为

$$5x-6y-7z-52=0.$$