ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

# 高等数学练习与习题

П·Е 塔科 А·Г 波波夫 Т·Я 科热夫尼科娃 著

瞿正良 董雨滋 张亚光 译

（上册）

山西人民出版社

# 译　序

本书《ВЫСШАЯ МАТЁМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ》在苏联已出版三次，我 …… 数出版社》一九八〇年版翻译的。一九八二 ……

全书内容丰富，包 …… 学（其中有线性代数，概率论，复变函数，常微分方程，偏微分方程及线性规化等）选题新颖，讲解透彻。对于内容的有关章节，作者注重基本概念的讲解，基本技能的培养和训练。“有讲有练”。这对于培养大专学生，自学青年，认真掌握数学这门重要学科的有关知识，有很大的指导意义和参考价值。

在翻译中，我们对原书中一些内容的先后秩序作了适当变动。同时，对原书中的部分内容，如近似计算，偏微分方程，微积运算等内容作了删改未译入本书中。这主要考虑到目前我国大部分高等工科院校，未开此方面的课。再则，由于本书分上，下两册，篇幅较长，如果译入无疑书价太贵。平面解析几何下放到中学，翻译时亦未选入。特请读者谅解。

从翻译到出版的全过程中，曾得到太原重机学院关心这一工作的同志的大力支持，热情帮助，在此深深感谢。

最后，需要指出的是，由于我们水平有限，错误一定难免，敬请读者指出。谢谢。

译者　一九八二年十月

# 目　录

# 第一章　矢量代数初步

## §1 空间直角坐标

在空间中给定一个笛卡儿直角坐标系$O-xyz$，那末空间中的一点$M$具有横坐标$x$，纵坐标$y$和立坐标$z$，就用$M(x, y, z)$表示这点。

两点$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$之间的距离，　由公式：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

确定。

特别是点$M(x, y, z)$到原点$O$的距离为：

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2}$$

端点是点$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$的线段被点$C(x, y, z)$以$\lambda$定比分，则点$C$的坐标公式是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

特别是线段中点坐标为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{4}$$

**231.**　已知点$M_1(2, 4, -2)$和$M_2(-2, 4, 2)$。在直线$M_1M_2$上求点$M$使此点以$\lambda=3$定比分线段$M_1M_2$

**解：**利用定比分线段公式，可得：

$$x_M=\frac{2+3(-2)}{1+3}=-1, \quad y_M=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4, \quad z_M=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1$$

于是所求点为$M(-1, 4, 1)$。

**232.**　已知三角形三顶点$A(1, 1, 1)$，$B(5, 1, -2)$和$C(7, 9, 1)$求角$A$的平分线和$CB$边交点$D$的坐标。

**解：**先求角$A$的两邻边的边长。

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=10$$

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=5$$

于是$\frac{|CD|}{|DB|}=2$，这是因为角分线把对边$CB$分成两部分之比等于两邻边之比。于是有

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},\quad y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{11}{3},\quad z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=-1$$

于是所求点为 $D(\frac{17}{3},\ \frac{11}{3},\ -1)$。

233. 在$ox$轴上找一点，使此点到点$A(2,\ -4,\ 5)$和点$B(3,\ 2,\ 7)$等距。

解：设$M$是所找之点。因为此点在$ox$轴上，因此它的坐标为$(x,\ 0,\ 0)$。又因为 $|AM|=|BM|$所以有

$$|AM|=\sqrt{(x-2)^2+(-4)^2+5^2},\quad |BM|=\sqrt{(x-3)^2+2^2+7^2}$$

由此归结为一个二次方程

$$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53 \qquad \text{解之得} x=-1.7$$

故所求点为$M(-1.7,\ 0,\ 0)$。

234. 已知点$A(3,\ 3,\ 3)$和$B(-1,\ 5,\ 7)$，求点$C$和$D$的坐标，此两点把线段$AB$分成相等的三部分。

235. 已知三角形三个顶点：$A(1,\ 2,\ 3)$，$B(7,\ 10,\ 3)$和$C(-1,\ 3,\ 1)$。证明角$A$是纯角。

236. 求以点$A(2,\ 3,\ 4)$，$B(3,\ 1,\ 2)$和$C(4,\ -1,\ 3)$为顶点的三角形重心坐标。

237. 到点$A(3,\ 1,\ 4)$和点$B(-4,\ 5,\ 3)$等距的点$M$，以怎样的关系定比分$oy$轴上从原点到点$C(0,\ 6,\ 0)$的线段。

238. 在$oz$轴上求一点，使此点距点$M_1(2,\ 4,\ 1)$和$M_2(3-,\ 2,\ 5)$等距。

239. 在$xoy$平面上找一点，使此点到$A(1,\ -1,\ 5)$，$B(3,\ 4,\ 4)$和$C(4,\ 6,\ 1)$等距。

## §2 矢量和矢量的最简单的运算

在空间$oxyz$中的一个自由矢量$\mathbf{a}$(即不变长度和方向可以移动到空间的任意一点上)可以表作如下形式：

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

矢量$\mathbf{a}$的这种表示法称为它的按坐标轴分解的分量形式和。此地$a_x$，$a_y$，$a_z$是矢量$a$在相应坐标轴上的投影(或称为矢量$\mathbf{a}$的坐标)，而$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$是三个坐标轴的单位矢量。

矢量$a_x\mathbf{i}$，$a_y\mathbf{j}$和$a_y\mathbf{k}$是矢量$\mathbf{a}$在三个坐标轴上的分矢量。

矢量$\mathbf{a}$的长度（模）用$a$或$|\mathbf{a}|$表示并由公式$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_y^2}$来确定。

矢量$\mathbf{a}$的方向可由矢量$\mathbf{a}$和三个坐标轴即$ox$，$oy$，$oz$轴的正向所夹的角$\alpha$，$\beta$和$\gamma$确定。这些角的余弦(所谓矢量的方向余弦)可由下面公式给出：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_y^2}};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\mathbf{a}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\mathbf{a}}$$

矢量的方向余弦有关系：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

如果矢量 **a**和 **b** 由它们的分量形式和给出，那么这两个矢量的和与差由下面公式确定：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x+b_x)i+(a_y+b_y)j+(a_z+b_z)k$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(a_x-b_x)i+(a_y-b_y)j+(a_z-b_z)k$$

我们知道，起点相同的矢量**a**和**b**的和表示一矢量，此矢量是以**a**，**b**矢量为边的平行四边形的一条对角线，这矢量的起点就是**a**，**b**矢量的起点。矢量**a**和**b**的差也表示一矢量，此矢量是以**a**，**b**矢量为边的平行四边形的另一条对角线。这个差矢量的起点和终点分别是**b**矢量的终点和**a**矢量的终点。(图1)

任意多个矢量的和可按多边形法则求得(图2)。

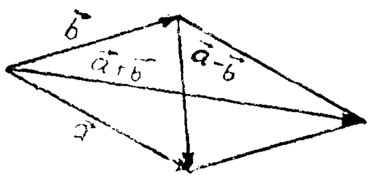


图1

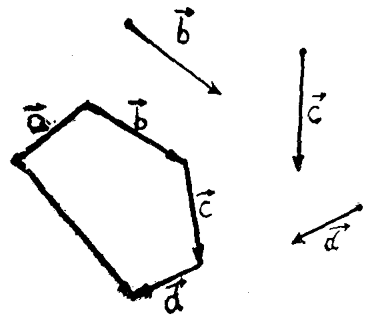


图2

矢量**a**和数$m$的乘积可由下面公式确定

$$m\mathbf{a}=ma_xi+ma_yj+ma_zk$$

我们知道矢量**a**和$m$**a**平行(共线)，如果$m>0$，它们方向相同，如果$m<0$它们方向相反。

特别是，如果 $m=\frac{1}{a}$，那末矢量$\frac{1}{a}$**a**就变成**a**的单位矢量，方向和矢量**a**一致，用$\mathbf{a}_0$表示。于是 $\mathbf{a}_0=\frac{\mathbf{a}}{a}$或者$\mathbf{a}=a\mathbf{a}_0$

起点在原点，终点是点$M(x, y, z)$的矢量OM称为点$M$的矢径，用$\mathbf{r}(M)$表示或简单写作**r**。因为矢量OM坐标就是点$M$的坐标，因此**r**的分量形式和为

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

以点$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$为起点和终点的矢量**AB**可以写作$\mathbf{AB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，这里$\mathbf{r}_2$是点$B$的矢径，$\mathbf{r}_1$是点$A$的矢径。于是矢量**AB**的分量形式和为

$$\mathbf{AB}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

它的长度就是点$A$和$B$之间的距离：

$$|\mathbf{AB}|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

由上面的公式，矢量**AB**的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d},\qquad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d},\qquad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}$$

240. 点$M$和$N$把三角形$ABC$的一边$AB$分成相等的三部分即$|AM|=|MN|=|NB|$。如果$\mathbf{CA}=\mathbf{a}$ $\mathbf{BC}=\mathbf{b}$，求矢量$\mathbf{CM}$。

解：我们有$\mathbf{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，于是$\mathbf{AM}=\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3}$。因为$\mathbf{CM}=\mathbf{CA}+\mathbf{AM}$，

则 $$\mathbf{CM}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3}=\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}。$$

241. 直线$AM$是三角形$ABC$中，角$A$的平分线，点$M$在$BC$边上。如果$\mathbf{AB}=\mathbf{b}$，$\mathbf{AC}=\mathbf{c}$，求矢量$\mathbf{AM}$。

解：我们有$\mathbf{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$。根据角平分线的性质知$\dfrac{|BM|}{|MC|}=\dfrac{b}{c}$即$\dfrac{|BM|}{|BC|}=\dfrac{b}{b+c}$，由此得$\mathbf{BM}=\dfrac{b}{b+c}(\mathbf{c}-\mathbf{b})$，又因$\mathbf{AM}=\mathbf{AB}+\mathbf{BM}$，则$\mathbf{AM}=\mathbf{b}+\dfrac{b}{b+c}(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\dfrac{b\mathbf{c}+c\mathbf{b}}{b+c}$。

242. 已知三角形$ABC$三顶点的矢径为$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$和$\mathbf{r}_3$，求此三角形中线交点的矢径。

解：有$\mathbf{BC}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$，$\mathbf{BD}=1/2(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)$（$D$是$BC$边的中点），$\mathbf{AB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，
$\mathbf{AD}=\mathbf{BD}+\mathbf{AB}=(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1)/2$，$\mathbf{AM}=\frac{2}{3}\mathbf{AD}$（$M$是中线的交点），
即$\mathbf{AM}=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1)$，这样就有$\mathbf{r}=\mathbf{OM}=\mathbf{r}_1+\mathbf{AM}=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)$。

243. 求矢量$\mathbf{a}=20\mathbf{i}+30\mathbf{j}-60\mathbf{k}$的长度和它的方向余弦。

解：有 $a=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=70$

$$\cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7},\quad \cos\beta=\frac{3}{7},\quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}。$$

244. 如果已知点$A(1, 3, 2)$和$B(5, 8, -1)$，求矢量$\mathbf{AB}$。

解：矢量$\mathbf{AB}$在坐标轴上的投影为点$B$和$A$的对应坐标的差：

$$a_x=5-1=4,\qquad a_y=8-3=5,\qquad a_z=-1-2=-3$$

于是 $$\mathbf{AB}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}。$$

245. 已知三角形$ABC$，点$M$把$BC$边分作$\dfrac{|BM|}{|MC|}=\lambda$。如果$\mathbf{AB}=\mathbf{b}$，$\mathbf{AC}=\mathbf{c}$，求$\mathbf{AM}$。

246. 已知$\mathbf{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$，$\mathbf{BC}=-4\mathbf{a}-\mathbf{b}$，$\mathbf{CD}=-5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$，证明$ABCD$是一个梯形。

247. 如果$\mathbf{a}=\mathbf{AB}+\mathbf{CD}$，且$A(0, 0, 1)$，$B(3, 2, 1)$，$C(4, 6,5)$和$D(1,6,3)$求矢量$\mathbf{a}$在坐标轴上的投影。

248. 求矢量$\mathbf{a}=m\mathbf{i}+(m+1)\mathbf{j}+m(m+1)\mathbf{k}$的长度。

249. 已知三角形$ABC$顶点的矢径：$\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_B=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$和$\mathbf{r}_C=\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$，证明三角形$ABC$是等边三角形。

250. 计算矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}-\frac{1}{5}(4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+3\mathbf{k})$的模和方向余弦。

251. 已知点$M_1(1, 2, 3)$和$M_2(3, -4, 6)$，求矢量$\mathbf{M_1M_2}$的长度和方向。

252. 已知矢量$\mathbf{a}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$。求矢量$\mathbf{b}$，如果$b=a$，$b_y=a_y$和$b_x=0$。

253. 已知点$M$的矢径分别和$oy$轴，$oz$轴的交角为$60°$和$45°$，又它的长等于8。如果点$M$的横坐标是负的，求点$M$的坐标。

## §3 内积，矢量积，混合积

1 内积。两个矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的内积是一个数，它等于这两矢量长度和它们夹角$\phi$的余弦的连乘积：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=ab\cos\phi$$

内积的性质

1° $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2$，或$\mathbf{a}^2=a^2$

2° 如果$\mathbf{a}=0$或$\mathbf{b}=0$或$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，则$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

3° $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$　　（交换律）

4° $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$　　（分配律）

5° $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

坐标轴上单位矢量的内积：

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1,\qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$

设矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{d}$，由分量形式和给出：$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$，那末它们的内积由下面公式确定：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_1+z_1z_2$$

2 矢量积。矢量$\mathbf{a}$对矢量$\mathbf{b}$的矢量积是一个矢量$\mathbf{c}$，此矢量可由下法确定(图3)

1)矢量$\mathbf{c}$的模等于以$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$为邻边的平行四边行的面积($c=ab\sin\phi$，$\phi$是矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的夹角)。

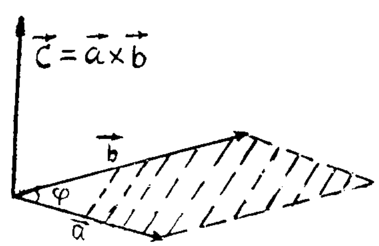


图 3

2)矢量$\mathbf{c}$垂直于矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$。

3)矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$组成右手系。

矢量$\mathbf{a}$对矢量$\mathbf{b}$的矢量积用$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$表示。

矢量积的性质

1° $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,即矢量积不满足交换律。

2° 如果$\mathbf{a}=0$或$\mathbf{b}=0$或$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，则$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$。

3° $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

4° $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$　（分配律）

坐标轴上单位矢量$i$，$j$，$k$的矢量积：

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times k=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}$$

矢量$\mathbf{a}=x_1i+y_1j+z_1k$和$\mathbf{b}=x_2i+k_2j+z_2k$的矢量可由行列式确定：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

3 混合积　矢量$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$对矢量$\mathbf{c}$的内积，即$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$称为三矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$的混合积。此三矢量的混合积的绝对值等于以这三矢量为棱的平行六面体的体积。

混合积的性质

1°　三矢量的混合积等于零，如果：

*a*)有一矢量为零矢量；

*b*)有两 矢 量 平 行（共线)；

*c*)三矢量平行于同一平面(共面)

2°　在混合积中调换符号“×”和“·”的位置即$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，混合积不变。由此性质混合积写作$\mathbf{abc}$

3°　$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}$

4°　任意交换两个矢量的位置，混合积只改变符号：

$$\mathbf{bac}=-\mathbf{abc},\quad \mathbf{cba}=-\mathbf{abc},\quad \mathbf{acb}=-\mathbf{abc}$$

如果三矢量以分量形式的和给出，即

$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$　　$\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$　　$\mathbf{c}=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$，则

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

从混合积的性质可推出矢量共面的充要条件是$\mathbf{abc}=0$

以 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$ 为棱的平行六面体体积 $V_1=|\mathbf{abc}|$ 由$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$组成的四面体的体积 $V_2=\dfrac{1}{6}|\mathbf{abc}|$。

254.　求矢量$\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$和$\mathbf{b}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$的内积。

解：易得$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\cdot2+4\cdot(-5)+7\cdot2=0$，故$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。

255.　已知矢量$\mathbf{a}=m\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=4i+mj-7k$，求$m$使$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。

解：这两矢量的内积为：　　　　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4m+3m-28$

因为$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，故$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$　　　　由此得$7m-28=0$，即$m=4$。

256.　如果$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，且$a=2$，$b=3$，计算$(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$

解：我们有$(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=10\mathbf{a}^2-5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+6\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-3\mathbf{b}^2$

$$=10a^2-3b^2=40-27=13$$

257.　求矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$和$\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$间的夹角。

解：因为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\phi$，则 $\cos\phi=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$　于是有$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\cdot6+2\cdot4+3(-2)=8$，

$$a=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14},\quad b=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$$

$$于是\cos\phi=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\frac{2}{7},\quad \phi=\arccos\frac{2}{7}$$

258. 求矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$的单位矢量$\mathbf{a}_0$。

解：先求出$\mathbf{a}$的长度： $|\mathbf{a}|=\sqrt{1+4+4}=3$， 因为$\mathbf{a}_0=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$

$$则\mathbf{a}_0=\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

259. 求矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$的矢量积。

解：有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&3&5\\1&2&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}$$

即 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-7\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$。

260. 求由矢量$\mathbf{a}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$和$\mathbf{b}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$为邻边的平行四边形面积。

解：先求$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\6&3&-2\\3&-2&6\end{vmatrix}=14\mathbf{i}-42\mathbf{j}-21\mathbf{k}$$

因为二矢量的矢量积的模等于以此二矢量为邻边平行四边形的面积。

故 $S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49$

261.计算以点$A(1,1,1)$，$B(2,3,4)$和$C(4,3,2)$为顶点的三角形面积。

解：先求矢量$\mathbf{AB}$和$\mathbf{AC}$。

$$\mathbf{AB}=(2-1)\mathbf{i}+(3-1)\mathbf{j}+(4-1)\mathbf{k}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{AC}=(4-1)\mathbf{i}+(3-1)\mathbf{j}+(2-1)\mathbf{k}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

再求 $\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}=-4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ 因为三角形$ABC$的面等于以$\mathbf{AB}$，$\mathbf{AC}$为邻边平行四边形面积的一半。

故 $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|=\frac{1}{2}=\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

262. 若$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$，$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\frac{\pi}{6}$。计算以$\mathbf{a}+3\mathbf{b}$和$3\mathbf{a}+\mathbf{b}$为邻边的平行四边形面积。

解：首先有

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=3\cdot 0+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\cdot 0$$

$$=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}\qquad (\text{因为}\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0,\ \mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

于是 $$S=8|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=4\ 。$$

363。 求矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$和$\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$的混合积。

解： $$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&3&-1\\1&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=26+5+2=33。$$

264。 证明三矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$共面。

解：因为 $$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}=\begin{vmatrix}2&5&7\\1&1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$=8-15+7=0$$ 故三矢量共面。

265。 计算以点$A(2,\ 2,\ 2)$，$B(4,\ 3,\ 3)$，$C(4,\ 5,\ 4)$和$D(5,\ 5,\ 6)$为顶点的四面体的体积。

解：先求矢量$\mathbf{AB}$，$\mathbf{AC}$和$\mathbf{AD}$

$$\mathbf{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{AC}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{AD}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

再计算它们的混合积：

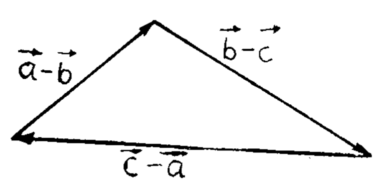
$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}\cdot\mathbf{AD}=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=7$$

因此所求四面体的体积 $V=\frac{7}{6}$。

266。 计算$(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$。

解：因为 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ 则这三矢量共面(图19)于是它们的 混 合 积等于零。即

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$$




4 图

267。 如果$a=4$，$b=6$且$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\frac{\pi}{3}$计算$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的内积。

268。 计算二矢量$\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$之间的夹角。

269。 当$m$为何值时，矢量$\mathbf{a}=m\mathbf{i}+\mathbf{j}$和$\mathbf{b}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$垂直。

270. 如果$a=1$，$b=2$，$c=3$且$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}})=(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}})=\frac{\pi}{3}$

计算矢量$2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$和$5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+7\mathbf{c}$的内积。

271. 若$F=2$，$S=5$且$(\widehat{\mathbf{F},\mathbf{S}})=\frac{\pi}{6}$，计算力$\mathbf{F}$沿位移$\mathbf{S}$做的功。

272. 求互相垂直的二矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$的单位矢量。

273. 若$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$，$\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$且三矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$长度相等，两两夹成的角也相等，求$\mathbf{c}$。

274. 已知矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$和$\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，求$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$分别在对方矢量上的投影。

275. 已知平行四边形$ABCD$三个顶点的矢径顺次为$\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_B=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_C=7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$，求第四个顶点$D$的矢径。

276. 如果$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}>0$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}>0$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}>0$，$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}<0$，$\mathbf{b}\cdot\mathbf{j}<0$，$\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}<0$，证明矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$不可能垂直。

277. 证明对任意实数$m$，三矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+m\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+(m+1)\mathbf{k}$和$\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+m\mathbf{k}$不能共面。

278. 不为零的实数$x_1$，$x_2$，$x_3$，$y_1$，$y_2$，$y_3$。$z_1$，$z_2$，$z_3$能满足方程吗？

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{aligned} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2&=0 \\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3&=0 \\ x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3&=0 \end{aligned}$$

279. 求矢量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$和$\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$的矢量积。

280. 计算以点$A(2,\ 2,\ 2)$，$B(4,\ 0,\ 3)$和$C(0,\ 1,\ 0)$为顶点的三角形面积。

281. 求三矢量$\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$和$\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$的混合积。

282. 证明矢量$\mathbf{a}=7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}+8\mathbf{k}$，$\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$共面。

283. 计算顶点为$A(0,\ 0,\ 1)$，$B(2,\ 3,\ 5)$，$C(6,\ 2,\ 3)$和$D(3,\ 7,\ 2)$的四面体的体积。

284. 在上题中计算垂直于边界面$BCD$的四面体的高。

285. 证明四点$A(5,\ 7,\ -2)$，$B(3,\ 1,\ -1)$，$C(9,\ 4,\ -4)$和$D(1,\ 5,\ 0)$共面。

# 第二章　空间解析几何

## §1 平面和直线

1.平面。1)矢量形式的平面方程为

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$$

此地 $\mathbf{r}=xi+yj+zk$——是平面上任一点 $M(x,\ y,\ z)$ 的矢径；$\mathbf{n}=\cos\alpha i+\cos\beta j+\cos\gamma k$——是从原点到此平面垂直矢量的单位矢量；$\alpha$，$\beta$，$\gamma$——是此垂直矢量(起点在原点)和坐标轴 $ox$，$oy$，$oz$ 正向的夹角，而 $p$——是此垂直矢量的长度(模)。

上述方程写为坐标形式是

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{1}$$

(平面的法式方程)

2)所有平面方程均具有形式：

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

此地 $A^2+B^2+C^2\neq0$(平面的一般式方程)这里的系数 $A$，$B$ 和 $C$ 可看作垂直于此平面的某个矢量 $N=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$(平面的法矢量)。若要把平面的一般式方程化成法式方程，只须在(2)式两端同乘一法化因子 $\mu=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^1+C^2}}$ 根号前的符号要与 $D$ 的符号相反。

3)特殊情况下平面的位置。

$A=0$；平面平行于 $ox$ 轴，$B=0$；平面平行于 $oy$ 轴。$C=0$；平面平行于 $oz$，$D=0$；平面过坐标原点。

$A=B=0$ 平面平行于 $xoy$ 平面。(即与 $oz$ 轴垂直)

$A=C=0$ 平面平行于 $xoz$ 平面。(即与 $oy$ 轴垂直)

$B=C=0$ 平面平行于 $yoz$ 平面。(即与 $ox$ 轴垂直)

$A=D=0$ 平面过 $ox$ 轴，$B=D=0$ 平面过 $oy$ 轴，$C=D=0$ 平面过 $oz$ 轴。

$A=B=D=0$，平面与 $xoy$ 平面重合($z=0$)

$A=C=D=0$ 平面与 $xoz$ 平面重合($y=0$)

$B=C=D=0$ 平面与 $yoz$ 平面重合($x=0$)

如果在平面方程(2)中，系数 $D\neq0$，用 $-D$ 除等式两端，平面方程就化成形如

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{3}$$

的截距式方程。（这里$a=-\frac{D}{A}$， $b=-\frac{D}{B}$， $c=-\frac{D}{C}$）$a$，$b$，$c$分别是平面与横轴，纵轴和立轴交点的坐标。

4)二平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D=0$之间的夹角$\phi$由公式确定：

$$\cos\phi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{4}$$

平面平行条件是：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{5}$$

平面垂直的条件是：

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{6}$$

5)点$M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离，由公式确定：

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A_2+B_2+C_2}} \tag{7}$$

6)过点$M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$且和已知矢量$\mathbf{N}=Ai+Bj+Ck$垂直的平面方程为：

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0 \tag{8}$$

此方程也叫做点法式方程。

7)对任意值$\lambda$，方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{9}$$

确定了一个平面。此平面经过下面两个平面的交线，$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ （Ⅰ） $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ （Ⅱ），方程(9)称为平面束方程。如果平面（Ⅰ）与（Ⅱ）互相平行，那末平面束方程(9)是为平行于这两个平面的一族平面。

8)经过给定三点$M_1(\mathbf{r}_1)$，$M_2(\mathbf{r}_2)$和$M_3(\mathbf{r}_3)$的平面方程(此处$\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$，$\partial_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_3=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$)可由三矢量$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$共面的条件得到。这里$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$是所求平面上任一点的矢径。

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0$$

改写为坐标形式是：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

386　把平面方程$2x+3y+6z+21=0$化成法式方程。

**解**：先求法化因子(因为$D=21>0$，故根号前取负号)

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=-\frac{1}{7}.$$

于是法式方程为 $$-\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-3=0$$

287　求点$M_0(3,\ 5,\ -8)$到平面$6x-3y+2z-28=0$的距离。

解：利用公式(7)可直接得到

$$d=\frac{|6.3-3.5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}$$

288　求经过点$M(2,\ 3,\ 5)$且和矢量 $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$垂直的平面方程。

解：直接用平面的点法式方程(8)可得

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0\text{即}4x+3y+2z-27=0$$

289　求过点$M(2,\ 3,\ -1)$且平行于平面$5x-3y+2z-10=0$的平面方程。

解：经过点$M(2,\ 3,\ -1)$的平面方程为

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$$

所求平面的法矢量就是给定平面的法矢 量$\mathbf{n}=\{5,\ -3,\ 2\}$，于是$A=5$，$B=-3$，$C=2$故所求平面方程为

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0\text{即}5x-3y+2z+1=0。$$

290　由点$P(2,\ 3,\ -5)$向三个坐标面做垂线，求过三垂足的平面方程。

解：易知三垂足为$M_1(2,\ 3,\ 0)$，$M_2(2,\ 0,\ -5)$和$M_3(0,\ 3,\ -5)$。利用(10) 可写出所求平面的方程

$$\begin{vmatrix} x-2 & k-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{即}\ 15x+10y-6z-60=0$$

291　求过点$A(5,\ 4,\ 3)$而和三坐标轴所截线段相等的平面方程。

解：用平面的截距式方程(4)，不过这里$a=b=c$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

把点$A$的坐标代入上述方程中，得$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$，由此得$a=12$。故所求方程为

$$x+y+z-12=0$$

292　求过点$M(3,\ 2,\ 1)$且过两平面 $x+y+5z-1=0$，$2x+3y-z+2=0$交线的平面方程。

解：用平面束方程(9)：