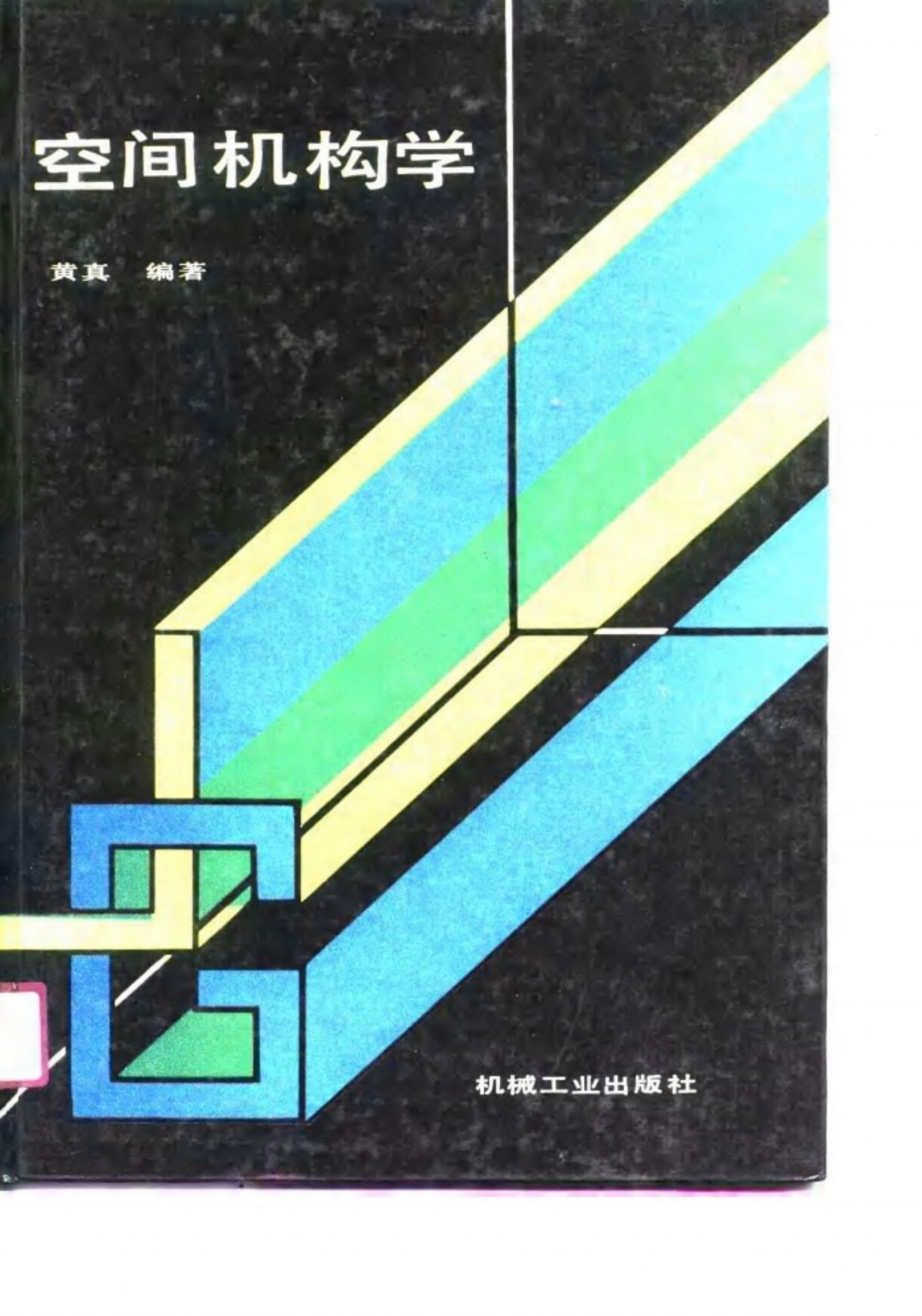


# 空间机构学

黄真 编著



机械工业出版社

TH112

30

3

# 空间机构学

黄真 编著

*Info for*



机械工业出版社



763265

## 内 容 简 介

本书包括空间单闭环机构及机器人机构运动学的正反解，空间单闭环机构及机器人机构的螺旋理论分析，空间机器人机构的动力学问题，影响系数理论和空间多环机构学等四个部分。

本书主要介绍了对研究空间机构及机器人机构有重要指导意义的美国学者Duffy的球面解析理论，和他参与并推广的螺旋理论，以及 Tesar 教授的影响系数理论，和这些理论的最新发展。

在本书的后部着重介绍了以影响系数理论建立的空间多环机构学，讨论了广泛适用于并联式机器人、多足步行机、多臂机器人、多台机器人协同工作等等多环系统中存在的共同的机构学问题。

本书可供机械设计、机器人研究的工程技术人员，以及高等学校机械设计专业的教师、研究生使用，也可供相应专业的本科生参考。

## 空 间 机 构 学

黄 真 编 著

责任编辑：晏章华 版式设计：冉晓华

封面设计：刘 代 责任校对：肖新民

责任印制：王国光

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub>·印张 17<sup>1</sup>/<sub>4</sub>·插页 2·字数 424 千字

1991年5月北京第一版·1991年5月北京第一次印刷

印数 0,001—2,530·定价：17.00元

ISBN 7-111-02556-3/TH·416

## 前 言

本书内容前半部分取材于作者1982年至1984年在美国佛罗里达大学智能机器人中心留学期间收集到的Duffy和Tesar教授的著作和论文。后半部分为作者近年来在空间多环机构学上的研究成果。

Duffy教授的球面解析理论分类科学、方法细致，系统完整。他几乎求解了所有的单环机构，不仅给出求解的步骤与公式，而且给出许多计算实例和结果线图。既有理论价值，又有实用参考意义。他近年还从事螺旋理论的研究，螺旋理论对于机器人运动、受力的分析是很有用的工具，例如他关于特殊位形的分析很有特色。尤其是这两个理论还存在进一步发展的广阔余地。在Duffy工作的基础上，我国机构学研究人员解决了二十多年前机构学界提出的机构学的“球穆朗玛问题”——空间单闭环 $7R$ 机构的求解。在梁崇高教授的支持下，已将这项工作的一部分编入本书，为本书增加了光彩。

对于机构分析，Tesar多年采用的影响系数理论是研究不断变化运动着的机构的本质和内在联系的非常有用的工具。我们从Tesar的工作已往看到在多自由度机构、串联式机械手的研究工作，是如此简单巧妙，富有新意，并预感此影响系数理论本身，以及它的应用一定会远远超出现有的水平。可惜这些有深度的理论，有发展前景的学派国内介绍不多，了解的人很少。因此作者欲将这方面的工作介绍给国内广大读者，希望有助于推动我国机构学的研究水平，为我国社会主义建设事业作出贡献。

关于影响系数，这个概念在机构学中过去就有，Tesar将它拓宽了一些。它本身是一个高度抽象的概念。从哲学上说概念的抽象就能在更广泛的覆盖面上和更深刻的程度下把握事物的本质。机构的影响系数概念是深刻地把握了机械运动系统的机构学实质。基于这个认识，我们在研究空间多环机构时在国家自然科学基金的支持下，应用影响系数理论较顺利地解决了多方面的研究课题，并初步形成有特点的空间多环机构学理论。此理论为新型的并联式机器人的研究，为多足步行机的研究，以及为多臂多手协同工作中出现的多环问题的研究打下了基础。在平面机构中影响系数理论的应用也收到好的效果，以解析法分析机构的速度、加速度时，不用再建立方程一次、两次求导。

本书的第一章至第五章介绍空间机构分析的球面解析理论；第六章至第九章介绍螺旋理论；第十章、第十一章为空间机构动力学部分；第十二章至第十四章为机构分析的影响系数理论及空间多环机构学。

全书承北京邮电学院梁崇高教授悉心审阅，提出了许多宝贵意见。作者谨向梁教授表示衷心的感谢。

由于时间和水平的限制，本书必然存在不少缺点、错误和考虑欠妥之处。作者诚恳希望读者、朋友和各方面专家不吝赐教，给以批评指正。

编著者 于秦皇岛燕山大学

1989年10月

# 目 录

<p>第一章 球面解析理论基础 ..... 1</p> <p>  § 1-1 球面三个基本公式 ..... 1</p> <p>  § 1-2 球面多边形的环路方程 ..... 6</p> <p>  § 1-3 球面多边形右坐标系公式及外角变换 ..... 10</p> <p>  § 1-4 球面多边形环路方程 ..... 12</p> <p>  § 1-5 球面多边形的半角公式 ..... 15</p> <p>  § 1-6 空间复多边形的环路方程 ..... 18</p> <p>第二章 空间复多边形的对偶方程 ..... 22</p> <p>  § 2-1 对偶角和对偶方程 ..... 22</p> <p>  § 2-2 空间复多边形的对偶方程 ..... 24</p> <p>  § 2-3 空间复三角形及复四边形的对偶次级余弦公式 ..... 25</p> <p>  § 2-4 空间复五边形的对偶次级余弦公式 ..... 27</p> <p>  § 2-5 空间复六边形的对偶次级余弦公式 ..... 28</p> <p>  § 2-6 空间复七边形的对偶次级余弦公式 ..... 30</p> <p>  § 2-7 空间复多边形的对偶次级半角公式 ..... 31</p> <p>第三章 空间单环机构和机器人串联手臂 ..... 33</p> <p>  § 3-1 机构及机器人手臂的组成元素 ..... 33</p> <p>  § 3-2 空间机构的自由度 ..... 36</p> <p>  § 3-3 单环机构的等值球面机构及其分类 ..... 39</p> <p>  § 3-4 串联式机器人机构及其闭合回路的建立 ..... 43</p> <p>  § 3-5 机器人手部位置分析正解 ..... 45</p> <p>  § 3-6 机器人手臂的极限距离 ..... 46</p> <p>  § 3-7 机器人机构速度和加速度分析 ..... 50</p> <p>第四章 球面机构和空间一组二组机构分析 ..... 52</p> <p>  § 4-1 球面4R机构分析 ..... 52</p> <p>  § 4-2 空间第一组机构的解法和RCCC<sup>(1)</sup>机构分析 ..... 56</p>	<p>  § 4-3 空间一组五杆RCPCR<sup>(1)</sup>机构分析 ..... 58</p> <p>  § 4-4 空间一组六杆RRP RPC<sup>(1)</sup>机构分析 ..... 60</p> <p>  § 4-5 空间一组七杆RRPPRR<sup>(1)</sup>机构分析 ..... 62</p> <p>  § 4-6 空间第二组机构的解法和RCRCR<sup>(2)</sup>机构分析 ..... 64</p> <p>  § 4-7 空间二组六杆RRRPCR<sup>(2)</sup>机构分析 ..... 69</p> <p>  § 4-8 空间二组曲柄滑块机构的解法和RRRPCP<sup>(1*)</sup>机构分析 ..... 71</p> <p>  § 4-9 空间二组七杆RPPRRR<sup>(2)</sup>机构分析 ..... 72</p> <p>第五章 空间三组四组机构分析 ..... 76</p> <p>  § 5-1 空间第三组RCRRRR<sup>(3)</sup>机构分析 ..... 76</p> <p>  § 5-2 空间第三组RRRRRC<sup>(3)</sup>机构分析 ..... 80</p> <p>  § 5-3 空间第四组机构和RSSR机构分析 ..... 84</p> <p>  § 5-4 空间RRRR-R-RR机构分析 ..... 87</p> <p>  § 5-5 空间一般7R机构分析 ..... 90</p> <p>第六章 螺旋理论基础 ..... 97</p> <p>  § 6-1 点线面的齐次表示 ..... 97</p> <p>  § 6-2 点线面相互关系及两直线的互矩 ..... 101</p> <p>  § 6-3 线矢量及旋量 ..... 104</p> <p>  § 6-4 旋量的代数运算 ..... 105</p> <p>  § 6-5 空间机构及机器人开链机构的Plücker坐标 ..... 108</p> <p>第七章 空间机构及机器人的螺旋运动方程 ..... 113</p> <p>  § 7-1 刚体的瞬时螺旋运动 ..... 113</p> <p>  § 7-2 刚体上作用的力螺旋 ..... 116</p> <p>  § 7-3 三个刚体的相对运动 ..... 118</p> <p>  § 7-4 机器人开链机构的螺旋运动方程 ..... 121</p> <p>  § 7-5 空间单闭环机构的螺旋运动方程 ..... 124</p> <p>第八章 反螺旋系与空间机构的特殊位形 ..... 126</p>
---	---

## IV

§ 8-1 反螺旋的概念.....	126	§ 12-2 串联开链机构的运动影响系数 .....	202
§ 8-2 反螺旋系.....	128	§ 12-3 机器人机构分析的影响系数法 .....	206
§ 8-3 空间单闭环机构的特殊位形.....	133	§ 12-4 空间单闭环机构分析的影响系数法 .....	213
§ 8-4 机器人开链手臂的特殊位形.....	138	§ 12-5 球面机构分析的影响系数法 .....	217
§ 8-5 螺旋方程的反螺旋解法.....	141	§ 12-6 平面机构分析的影响系数法 .....	219
<b>第九章 正交螺旋系及其应用.....</b>	<b>144</b>	<b>第十三章 空间并联多环机构分析的影响系数法(一) .....</b>	<b>224</b>
§ 9-1 正交螺旋和正交螺旋系.....	144	§ 13-1 并联多环机器人机构的一阶影响系数及速度分析 .....	224
§ 9-2 Gram-Schmidt法求正交基 .....	148	§ 13-2 并联多环机器人机构的二阶影响系数及加速度分析 .....	228
§ 9-3 空间物体被约束的运动.....	151	§ 13-3 并联机器人的拉格朗日动力模型 .....	231
§ 9-4 单环单自由度机构的铰链速度分析.....	154	§ 13-4 具有三角形平台的并联多环机构实例计算 .....	233
§ 9-5 单环机构杆件的瞬时运动螺旋.....	156	§ 13-5 并联空间多环机构动态受力分析 .....	237
§ 9-6 并联多环空间机构的瞬时运动螺旋.....	158	§ 13-6 并联机构位姿误差分析 .....	246
<b>第十章 刚体空间动力学基础.....</b>	<b>160</b>	<b>第十四章 空间并联多环机构分析的影响系数法(二) .....</b>	<b>248</b>
§ 10-1 转动的非惯性系 .....	160	§ 14-1 6-SPS并联多环机构位置分析 .....	248
§ 10-2 非惯性系中点和刚体的运动 .....	164	§ 14-2 空间并联多环机构的特殊位形 .....	253
§ 10-3 刚体的线动量、角动量和动能 .....	166	§ 14-3 空间并联多环机构特殊位形下的特性分析 .....	256
§ 10-4 惯量矩阵的变换及惯量椭球 .....	170	§ 14-4 空间一般非对称多回路机构分析的影响系数法 .....	260
§ 10-5 刚体运动方程式及欧拉方程 .....	175	§ 14-5 步行机超确定输入的能量最优解析 .....	265
<b>第十一章 空间机器人机构的动力学模型.....</b>	<b>178</b>	<b>参考文献.....</b>	<b>270</b>
§ 11-1 空间机构动力学研究概述 .....	178		
§ 11-2 动力学模型的牛顿-欧拉法 .....	180		
§ 11-3 动力学模型的拉格朗日方程法 .....	183		
§ 11-4 动力学模型的高斯原理法 .....	194		
<b>第十二章 影响系数的概念及其在机构分析中的应用.....</b>	<b>198</b>		
§ 12-1 运动影响系数的概念 .....	198		

# 第一章 球面解析理论基础

球面解析理论是本书研究空间机构及机器人机构的理论基础之一。通过球面三角理论导出的环路公式,又推广到空间机构以计算构件的空间方位,这是空间机构分析的最基本问题。本章首先介绍了球面三角的基本概念,引出极三角形。推导了球面基本三角公式,即球面正弦公式、正弦-余弦公式和余弦公式。所导出的正弦、正弦-余弦和余弦公式的左右两边,分别都表示通过球心的单位矢量或单位极矢量的方向余弦。在本章中进一步将一系列球面三角形串接相联,导出了球面多边形的环路方程。环路公式的两边分别也表示单位矢量或单位极矢量的方向余弦。此外,所讨论的半角公式也用来求解由正弦、正弦-余弦公式代换出的一对二次方程的根,求解未知的传动角。最后,相应空间多边形的矢量方程,可以用球面多边形的方向余弦的解析式表示。

## § 1-1 球面三个基本公式

为了研究空间机构,这里先引出两种球面三角形,即球面常三角形和极三角形。并建立球面三角公式,讨论这些公式的几何意义。

### 一、球面三角形和极三角形

与一定点保持等距离的空间点的集合称为球面。通过球心的截面称为中心面或大圆。当球的半径为1单位时称为单位球。一垂直球上圆平面或圆弧平面的直径与球面相交之端点称为圆平面或弧线的极或极点,记以 $P$ 。该直径称为极轴。极轴的正向以右手螺旋规则与弧线的方向保持一致,见图1-1。球面三角形是由球面上三个大圆的劣弧构成的。在这里,三角形边的正向以逆时针方向给定。图1-2所示球面三角形的三个顶点为1、2、3,三个边 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 为三段大圆弧,它们是以球的半径为度量单位。

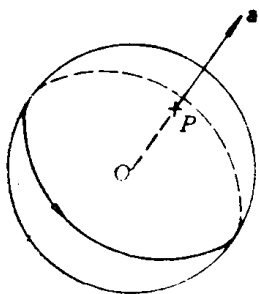


图1-1 大圆与极轴

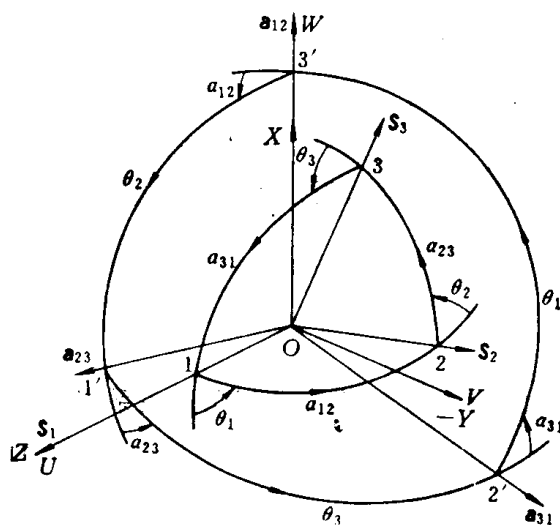


图1-2 球面常三角形与极三角形

球心 $O$ 点至三个顶点之连线成为三个轴线,三轴线方向以三个单位矢量 $S_1$ 、 $S_2$ 和 $S_3$ 表示。三角形的三个外角为 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ ,它们的方向对于单位矢量 $S_1$ 、 $S_2$ 和 $S_3$ 的方向也是按右手螺旋

旋规则决定的。所以球面三角形共有六个几何参数。

对于球面三角形的三个边 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ ，有三个极轴 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 与此三边相垂直。此三极轴交球面于 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 三个点，此三点构成了球面上的第二个三角形，是第一个三角形的极三角形。前者称为后者的常三角形。极三角形的三个边是常三角形的三个外角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 。而极三角形的三个外角是常三角形的三个边 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 。反过来，当然也可以认为 $\triangle 123$ 是 $\triangle 1'2'3'$ 的极三角形，因为 $S_1$ 、 $S_2$ 和 $S_3$ 分别垂直 $\triangle 1'2'3'$ 的三个面 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 。所以它们是互为极三角形的。它们的六个轴 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 及 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 互为极轴。同时它们的边和外角也是相互对应的。当常三角形已知，其极三角形唯一地确定。

球面上两个三角形能完全重合一致称全等。球面上两个全等的三角形它们的六个参数都相等。球面上还有另一种情况，当两球面三角形的六个参数都相等时，它们可能并不能够重合相合，这两三角形称为对称相等。例如在球上三条直径两端的六个点，形成的两个球面三角形就是这种情况。

如果球面三角形的六个元素( $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 、 $a_{31}$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ )中任何三个已知，则三角形完全确定。

## 二、球面三角公式

球面三角公式包括正弦公式，正弦-余弦公式及余弦公式。在这里从几何投影关系可以方便地导出，而且公式推导不受边角大小的限制。下面取一单位球作分析。

在图1-3上，直角坐标系的 $X$ 轴及 $Z$ 轴分别与 $a_{12}$ 及 $S_3$ 轴重合。点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 分别是 $B$ 点在 $YZ$ 平面、在 $Z$ 轴上和和在 $S_2$ 轴上的投影点，所以单位矢量 $OB$ 的方向余弦或 $B$ 点的坐标值可由投影线段 $PB$ 、 $QP$ 和 $OQ$ 表示

$$\begin{aligned} X_{[3]} &= PB \\ Y_{[3]} &= -QP \\ Z_{[3]} &= OQ \end{aligned} \quad (1-1)$$

从图1-3的直角三角形 $\triangle OQB$ 、 $\triangle QPB$ 、 $\triangle ORB$ 和 $\triangle RPB$ 可以看出

$$PB = s_{31}s_1, \text{ 或 } PB = s_{23}s_2 \quad (1-2)$$

这里用简写方式表示正弦及余弦函数。上面的 $s_{31}$ 表示 $\sin a_{31}$ ， $s_1$ 表示 $\sin \theta_1$ ，又如 $c_{31}$ 表示 $\cos a_{31}$ ， $c_1$ 表示 $\cos \theta_1$ ，同时有

$$QP = -s_{31}c_1 \quad (1-3)$$

$$OQ = c_{31}$$

式(1-1)的右边可由直角三角形关系得

$$QP = ORs_{12} - PRc_{12} \quad (1-4)$$

$$OQ = ORc_{12} + PRs_{12}$$

在 $\triangle ORB$ 及 $\triangle RPB$ 中， $OB$ 是单位矢量， $OR = c_{23}$ ， $PR = -s_{23}c_2$ 。将上述关系代入式(1-4)，与式(1-2)、(1-3)一并代入式(1-1)。经整理得到 $B$ 点在坐标系 $XYZ$ 中的三个坐标，即是 $S_3$ 的三个方向余弦。

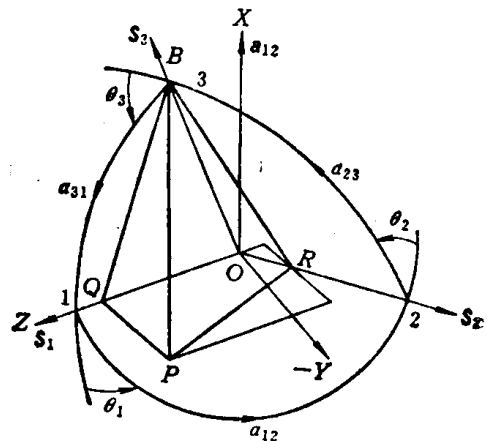


图1-3 矢量 $S_3$ 的方向余弦



$$\begin{aligned}
 X_{(B)}: & \quad s_{23}s_2 = s_{31}s_1 \\
 Y_{(B)}: & \quad -(s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}c_2) = s_{31}c_1 \\
 Z_{(B)}: & \quad c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_2 = c_{31}
 \end{aligned} \tag{1-5}$$

式(1-5)中的三个等式的左边和右边分别都同样地表示单位矢量 $S_3$ 在坐标系 $XYZ$ 中的三个坐标或三个方向余弦。由于表示的是坐标和方向余弦,等式两边不能同乘任何数值,包括负1。同时此三等式又正是球面三角形的正弦公式,正弦-余弦公式和余弦公式。若定义符号 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 、 $\bar{Z}_2$ 为

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_2 &= s_{23}s_2 \\
 \bar{Y}_2 &= -(s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}c_2) \\
 \bar{Z}_2 &= c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_2
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

则三个球面三角公式可以写为简单的形式

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_2 &= s_{31}s_1 \\
 \bar{Y}_2 &= s_{31}c_1 \\
 \bar{Z}_2 &= c_{31}
 \end{aligned} \tag{1-7}$$

注意,这里 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 、 $\bar{Z}_2$ 不是矢量,只是符号,表示的仍是矢量 $S_3$ 的三个方向余弦。

上述球面三角公式在角度 $\alpha_{ij}$ 趋向无穷小时有 $s_{ij} = \alpha_{ij}$ ,  $c_{ij} = 1 - \alpha_{ij}^2/2$ ,球面三角形变成平面三角形。上述三式成为平面三角形的三个相应定理

$$\begin{aligned}
 \alpha_{23}s_2 &= \alpha_{31}s_1 \\
 -(\alpha_{12} + \alpha_{23}c_2) &= \alpha_{31}c_1 \\
 \alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23}c_2 &= \alpha_{31}^2
 \end{aligned} \tag{1-8}$$

由于 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 和 $\bar{Z}_2$ 表示的是方向余弦,其平方和为1

$$\bar{X}_2^2 + \bar{Y}_2^2 + \bar{Z}_2^2 = 1$$

### 三、右坐标系中的方向余弦

上述式(1-5)是 $B$ 点对坐标系 $XYZ$ 的方向余弦。该坐标系的 $X$ 轴垂直 $\alpha_{12}$ 平面, $Z$ 轴与 $\alpha_{12}$ 平面左边的 $S_1$ 轴重合。若称此坐标系为平面 $\alpha_{12}$ 上的左坐标系,式(1-5)就是 $B$ 点对平面 $\alpha_{12}$ 上的左坐标系的方向余弦。 $\alpha_{12}$ 平面( $\perp X$ )也称为基面。

若对常三角形 $\triangle 123$ ,坐标系改取 $X'Y'Z'$ ,使 $X'$ 与 $X$ 重合, $Z'$ 轴在 $\alpha_{12}$ 平面上转至与右边的 $S_2$ 轴重合,见图1-3,则称此坐标系为 $\alpha_{12}$ 平面的右坐标系。 $S_3$ 在此新坐标系中的方向余弦或坐标为

$$\begin{aligned}
 X'_{(B)}: & \quad s_{31}s_1 = s_{23}s_2 \\
 Y'_{(B)}: & \quad s_{12}c_{31} + c_{12}s_{31}c_1 = -s_{23}c_2 \\
 Z'_{(B)}: & \quad c_{12}c_{31} - s_{12}s_{31}c_1 = c_{23}
 \end{aligned} \tag{1-9}$$

式(1-9)所表示的球面正弦、正弦-余弦及余弦公式也简写成为

$$\begin{aligned}
 X'_{(B)}: & \quad X_1 = s_{23}s_2 \\
 -Y'_{(B)}: & \quad Y_1 = s_{23}c_2 \\
 Z'_{(B)}: & \quad Z_1 = c_{23}
 \end{aligned} \tag{1-10}$$

其中符号 $X_1$ 、 $Y_1$ 及 $Z_1$ 被定义为

$$\begin{aligned}
 X_1 &= s_{31}s_1 \\
 Y_1 &= -(s_{12}c_{31} + c_{12}s_{31}c_1)
 \end{aligned} \tag{1-11}$$

$$Z_1 = c_{12}c_{31} - s_{12}s_{31}c_1$$

这里需要注意的是,为了使左右坐标系表示的方向余弦在公式形式上相同,而使右坐标系的式(1-10)及(1-11)中的 $Y'_{[3]}$ 坐标取了负号,换句话说,对右坐标系可以直接应用左坐标系的公式,但 $Y$ 坐标前需冠以负号。

为掌握上述公式角标的规律,这里作一个分析。单位矢量 $S_3$ 的三个坐标有两组公式(1-6)及(1-10),分别以 $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2)$ 和 $(X_1, Y_1, Z_1)$ 表示。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 三公式的定义式的形式为

$$X = ss; \quad Y = -(sc + csc); \quad Z = cc - ssc \quad (1-12)$$

公式的下标决定于球面三角六参数中的两边及其夹角,为写出 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 和 $\bar{Z}_2$ 的定义式,这里 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 的下标2表示两边所夹的角为 $\theta_2$ ,相应 $\theta_2$ 的两邻边就是 $a_{12}$ 和 $a_{23}$ ;由于给出的 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 符号上面带“—”,在公式中表示边角的下角标数字的顺序与自然顺序相反,为3 2 1 3 2 1...

**例1-1** 试展开 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 和 $\bar{Z}_2$ 。

$$\begin{aligned} \bar{X}_2 &= s_{32}s_2 \\ \bar{Y}_2 &= -(sc_{32} + cs_{32}c_2) \\ \bar{Z}_2 &= cc_{32} - ss_{32}c_2 \end{aligned}$$

式中未标明角标的另一个边即是夹 $\theta_2$ 角的另一个邻边 $a_{12}$ ,当把 $a_{12}$ 标上,又考虑到 $a_{22}$ 即是 $a_{23}$ ,所以上式即是式(1-6)。对于上面无“—”的 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ,如 $X_1$ 、 $Y_1$ 、 $Z_1$ ,下角标1表示所夹之角为 $\theta_1$ ,夹 $\theta_1$ 角的两边为 $a_{31}$ 和 $a_{12}$ 。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 上面无“—”表示在公式中,边角的下角标数字的顺序与自然数字顺序相一致,即123123...

**例1-2** 试展开 $X_1$ 、 $Y_1$ 和 $Z_1$ 。

$$\begin{aligned} X_1 &= s_{31}s_1 \\ Y_1 &= -(ss_{31} + cs_{31}c_1) \\ Z_1 &= cc_{31} - ss_{31}c_1 \end{aligned}$$

式中未标明角标的三角函数,即是夹 $\theta_1$ 角的另一个边 $a_{12}$ ,写完全的式子见式(1-11)。

对于 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 三公式本身较为简单,形式为

$$X = ss; \quad Y = sc; \quad Z = c \quad (1-13)$$

当公式左边的 $XYZ$ 的下标给出后,公式右边只决定于一个边和一个角。这边和角两个量可以从 $XYZ$ 的三个定义式中的第一个式,即球面正弦公式推出。这是大家熟悉的关系。第二式为 $Y$ 式其右边下标与第一式相同。第三式只取前两式右边的第一个下标。例如 $\bar{X}_2$ ,其定义式是 $\bar{X}_2 = s_{32}s_2$ 。按正弦公式立即可写出 $\bar{X}_2 = s_{31}s_1$ ,同时有 $\bar{Y}_2 = s_{31}c_1$ ,和 $\bar{Z}_2 = c_{31}$ 。

因为对球面三角形的每一个顶点,有左右两个坐标系,而能形成两组球面三角公式,表示了过该顶点的单位矢量对这两坐标系的两组方向余弦。所以球面三角形的三个顶点有六个坐标系,将能形成六组公式。表1-1表示了三个单位矢量在六个坐标系上的方向余弦。

#### 四、极三角形的解法

对极三角形有类似的三个球面三角公式。由图1-4知,若坐标系 $UVW$ 是这样选取,使 $U$ 轴垂直极三角形的 $\theta_1$ 面, $W$ 轴与 $a_{12}$ 重合, $V$ 轴在 $\theta_1$ 面上。这即是在 $\theta_1$ 面上的右坐标系。矢量 $a_{23}$ 在坐标系 $UVW$ 上的方向余弦为

$$U_{[23]}: U_{31} = s_2s_{12}$$

表1-1 球面三角基本公式

正弦公式	正弦-余弦公式	余弦公式	正弦公式	正弦-余弦公式	余弦公式
$X_1 = s_{23}s_2$	$Y_1 = s_{23}c_2$ ①	$Z_1 = c_{23}$	$\bar{X}_1 = s_{23}s_3$	$\bar{Y}_1 = s_{23}c_3$	$\bar{Z}_1 = c_{23}$
$X_2 = s_{31}s_3$	$Y_2 = s_{31}c_3$ ①	$Z_2 = c_{31}$	$\bar{X}_2 = s_{31}s_1$	$\bar{Y}_2 = s_{31}c_1$	$\bar{Z}_2 = c_{31}$
$X_3 = s_{12}s_1$	$Y_3 = s_{12}c_1$ ①	$Z_3 = c_{12}$	$\bar{X}_3 = s_{12}s_2$	$\bar{Y}_3 = s_{12}c_2$	$\bar{Z}_3 = c_{12}$

① 方向余弦差一负号。

$$-V_{[23]}: V_{31} = s_2c_{12} \quad (1-14)$$

$$W_{[23]}: W_{31} = c_2$$

由于UVW是右坐标系，正弦-余弦公式形式虽然保持不变，但方向余弦相差一负号。公式左边 $U_{31}$ 、 $V_{31}$ 及 $W_{31}$ 的定义式为

$$\begin{aligned} U_{31} &= s_3s_{31} \\ V_{31} &= -(s_1c_3 + c_1s_3c_{31}) \\ W_{31} &= c_1c_3 - s_1s_3c_{31} \end{aligned} \quad (1-15)$$

因为 $U_{31}$ 、 $V_{31}$ 、 $W_{31}$ 是方向余弦，所以它们的平方和等于1

$$U_{31}^2 + V_{31}^2 + W_{31}^2 = 1$$

当然极三角形中，矢量 $a_{23}$ 的方向余弦也可以用左坐标系 $U'V'W'$ 来表示。其中 $U'$ 仍与 $U$ 重合，而 $W'$ 经旋转与 $a_{31}$ 重合，这相当于坐标系绕 $U$ 反转 $\theta_1$ 角，即是在 $\theta_1$ 平面的左坐标系。这时表示单位矢量 $a_{23}$ 的球面正弦，正弦-余弦和余弦公式为

$$\begin{aligned} U'_{[23]}: U_{21} &= s_3s_{31} \\ V'_{[23]}: V_{21} &= s_3c_{31} \\ W'_{[23]}: W_{21} &= c_3 \end{aligned} \quad (1-16)$$

其中符号 $U_{21}$ 、 $V_{21}$ 和 $W_{21}$ 的定义是

$$\begin{aligned} U_{21} &= s_2s_{12} \\ V_{21} &= -(s_1c_2 + c_1s_2c_{12}) \\ W_{21} &= c_1c_2 - s_1s_2c_{12} \end{aligned} \quad (1-17)$$

对极三角形三个轴线单位矢量 $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 共对应六个坐标系，有六组球面三角公式，见表1-2。

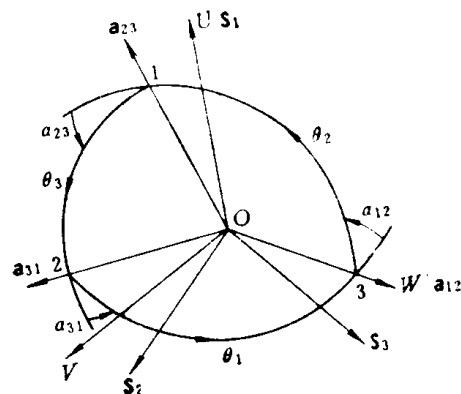


图1-4 极三角形

表1-2 球面极三角形公式

正弦公式	正弦-余弦公式	余弦公式	正弦公式	正弦-余弦公式	余弦公式
$U_{12} = s_3s_{23}$	$V_{12} = s_3c_{23}$ ①	$W_{12} = c_3$	$U_{21} = s_3s_{31}$	$V_{21} = s_3c_{31}$	$W_{21} = c_3$
$U_{23} = s_1s_{31}$	$V_{23} = s_1c_{31}$ ①	$W_{23} = c_1$	$U_{32} = s_1s_{12}$	$V_{32} = s_1c_{12}$	$W_{32} = c_1$
$U_{31} = s_2s_{12}$	$V_{31} = s_2c_{12}$ ①	$W_{31} = c_2$	$U_{13} = s_2s_{23}$	$V_{13} = s_2c_{23}$	$W_{13} = c_2$

① 方向余弦差一负号。

表中三组公式左边符号的定义式与常三角形相同，符号的定义式有相同形式，而且角标的规则也相同。又由于这里已有两个角标，这就表明了数字角标的排列顺序，据此可写为一般形式

$$\begin{aligned}
 U_{ij} &= s_i s_{ij} \\
 V_{ij} &= -(s_j c_i + c_j s_i c_{ij}) \\
 W_{ij} &= c_j c_i - s_j s_i c_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{1-18}$$

前面分别叙述了常三角形及极三角形轴线单位矢量的方向余弦的计算法，这两组公式是建立在两个不同的坐标系 $XYZ$ 和 $UVW$ 上的。如果机构上统一选定的坐标系为 $XYZ$ ，因而就还需要讨论如何将 $UVW$ 坐标系转换到统一的坐标系 $XYZ$ 上。当知道两坐标系间的三个欧拉角，就可以通过坐标变换求得。但考虑到常三角形与极三角形的特殊的内在联系，当适当选取两坐标系时这个变换会变得非常简单。

比较常三角形及极三角形两个坐标系，见图1-5。在常三角形中 $X$ 轴总是垂直球面三角形三个面中的一个，比如 $\alpha_{12}$ ，则 $X$ 轴必与一个极轴 $a_{12}$ 重合；又因 $Z$ 轴总是过一个轴线，如 $S_1$ ， $S_1$ 又必是极三角形的一个面的法线。在 $UVW$ 坐标系中， $U$ 轴与极三角形的一个边垂直，即与常三角形的一个轴重合， $W$ 轴过极三角形的一个轴也必垂直常三角形的一个边。这样若取 $W$ 与 $X$ 轴重合，取 $U$ 轴与 $Z$ 轴重合， $V$ 轴与 $-Y$ 重合，如图1-5所示。当两坐标系呈这样的关系，坐标变换就十分简单

$$\begin{aligned}
 X &= W \\
 Y &= -V \\
 Z &= U
 \end{aligned}
 \tag{1-19}$$

例如单位矢量 $a_{23}$ 在 $XYZ$ 坐标系中的方向余弦可以写为

$$\begin{aligned}
 X_{[23]}: W_{31} &= c_2 \\
 Y_{[23]}: V_{31} &= s_2 c_{12} \\
 Z_{[23]}: U_{31} &= s_2 s_{12}
 \end{aligned}$$

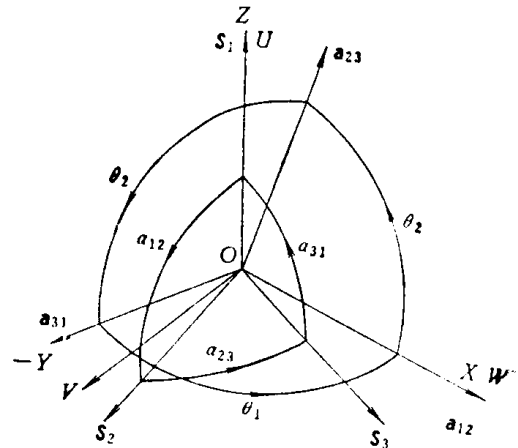


图1-5 两个坐标系的选取

## § 1-2 球面多边形的环路方程

在球面三角形分析的基础上，本节中将把球面三角公式推广至球面 $n$ 边形，即导出球面 $n$ 边形的正弦公式、正弦-余弦公式和余弦公式。由于以下研究的几何图形的边数更多，坐标系的选法也更多。这里为方便以符号 $(A, B)$ 表示坐标系，即括号中的第一个矢量表示 $X$ 轴，第二个矢量表示 $Z$ 轴，也就是选矢量 $A$ 作为 $X$ 轴，选 $B$ 作为 $Z$ 轴，这样坐标系就确定了。由前面球面三角形坐标系的选取知， $Z$ 轴与 $S$ 轴重合，并常使 $X$ 轴与 $\alpha$ 面相垂直，这就是以相应的极轴 $a$ 作为 $X$ 轴，因此坐标系常有 $(a, S)$ 形式。

下面首先分析较简单的球面四边形。

### 一、球面四边形

一个球面四边形1234，如图1-6所示。四个边是 $\alpha_{12}$ 、 $\alpha_{23}$ 、 $\alpha_{34}$ 和 $\alpha_{41}$ ，并以逆时针方向顺序相联，四个外角是 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 和 $\theta_4$ 。位于相邻两平面交线上的四个轴线及其单位矢量是 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 和 $S_4$ 。为了导出球面四边形中某轴线单位矢量的方向余弦，例如 $S_4$ 的方向余弦，先以大圆弧 $\alpha_{12}$ 连接4、2两点，得两三角形 $\Delta 124$ 和 $\Delta 234$ 。从 $\Delta 124$ 看， $S_4$ 在坐标系 $(\alpha_{12}, S_1)$ 中的方向余弦按式(1-5)可写出

$$\begin{aligned}
 s_{42}s_{2'} &= s_{41}s_1 \\
 -(s_{12}c_{42} + c_{12}s_{42}c_2) &= s_{41}c_1 \\
 c_{12}c_{42} - s_{12}s_{42}c_2 &= c_{41}
 \end{aligned} \tag{1-20}$$

由 $\triangle 234$ ,  $S_4$ 对坐标系  $(a_{23}, S_2)$  的三个球面三角公式同样可写得

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_3 &= s_{42}s_2'' \\
 \bar{Y}_3 &= s_{42}c_2'' \\
 \bar{Z}_3 &= c_{42}
 \end{aligned} \tag{1-21}$$

为了从式 (1-20) 和 (1-21) 中消去  $a_{42}$ 、 $\theta_2'$  和  $\theta_2''$ , 考虑到三个外角  $\theta_2'$ 、 $\theta_2''$  和  $\theta_2$  之间存在着下列关系

$$\pi - \theta_2' = \theta_2'' - \theta_2 \tag{1-22}$$

即

$$\theta_2' = \pi - (\theta_2'' - \theta_2)$$

$\theta_2'$  的正弦、余弦函数分别为

$$\begin{aligned}
 s_2' &= s_2'' c_2 - c_2'' s_2 \\
 c_2' &= -(c_2'' c_2 + s_2'' s_2)
 \end{aligned} \tag{1-23}$$

将 (1-23) 式代入 (1-20), 并从新组合

$$\begin{aligned}
 (s_{42}s_2'')c_2 - (s_{42}c_2'')s_2 &= s_{41}s_1 \\
 c_{12}[(s_{42}s_2'')s_2 + (s_{42}c_2'')c_2] - s_{12}c_{42} &= s_{41}c_1 \\
 s_{12}[(s_{42}s_2'')s_2 + (s_{42}c_2'')c_2] + c_{12}c_{42} &= c_{41}
 \end{aligned} \tag{1-24}$$

再将式 (1-21) 代入 (1-24) 就给出了球面四边形的正弦、正弦-余弦和余弦三公式, 它们可表示如下

$$\begin{aligned}
 X_{[4]}: X_{32} &= s_{41}s_1 \\
 Y_{[4]}: Y_{32} &= s_{41}c_1 \\
 Z_{[4]}: Z_{32} &= c_{41}
 \end{aligned} \tag{1-25}$$

式 (1-25) 中左边符号定义为

$$\begin{aligned}
 X_{32} &= \bar{X}_3 c_2 - \bar{Y}_3 s_2 \\
 Y_{32} &= c_{12}[\bar{X}_3 s_2 + \bar{Y}_3 c_2] - s_{12} \bar{Z}_3 \\
 Z_{32} &= s_{12}(\bar{X}_3 s_2 + \bar{Y}_3 c_2) + c_{12} \bar{Z}_3
 \end{aligned} \tag{1-26}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_3 &= s_{34}s_3 \\
 \bar{Y}_3 &= -(s_{23}c_{34} + c_{23}s_{34}c_3) \\
 \bar{Z}_3 &= c_{23}c_{34} - s_{23}s_{34}c_3
 \end{aligned}$$

这样单位矢量  $S_4$  对坐标系  $(a_{12}, S_1)$  的方向余弦就由式 (1-25) 决定。同样有

$$X_{32}^2 + Y_{32}^2 + Z_{32}^2 \equiv 1, Z_{32} \equiv Z_{23} \tag{1-27}$$

需要注意的是, 在式 (1-26) 的左边符号  $X_{32}$ 、 $Y_{32}$  和  $Z_{32}$  的下标为自然数序列的逆序, 所以右边  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  计算也应为逆序, 当只有一个数字时为表示逆序记以  $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ , 上面有“—”。反之, 当左边下标为自然数序列时, 右边亦为自然数的顺序, 当只有一个数字时记为  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ , 上面无“—”。

例1-3 试展开  $X_{34}$ 、 $Y_{34}$  和  $Z_{34}$ 。

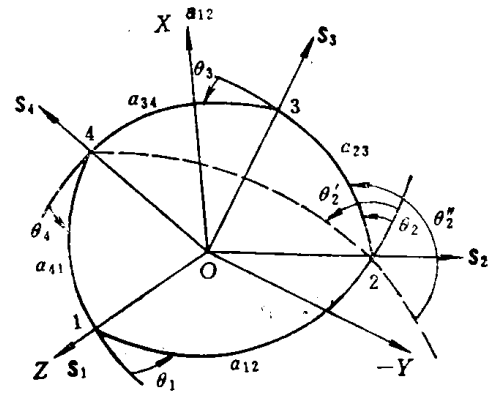


图1-6 球面四边形的解法

其中

$$\begin{aligned} X_{34} &= X_3 c_4 - Y_3 s_4 \\ Y_{34} &= c_{41}(X_3 s_4 + Y_3 c_4) - s_{41} Z_3 \\ Z_{34} &= s_{41}(X_3 s_4 + Y_3 c_4) + c_{41} Z_3 \\ X_3 &= s_{23} s_3 \\ Y_3 &= -(s_{34} c_{23} + c_{34} s_{23} c_3) \\ Z_3 &= c_{34} c_{23} - s_{34} s_{23} c_3 \end{aligned}$$

上述符号规则对球面五、六、七多边形亦适用。

## 二、球面五边形

球面五边形的环路方程可由三角形和四边形的正弦、正弦-余弦和余弦公式导出，见图1-7。这里将五边形分为三角形125及四边形2345两部分。由三角形125，单位矢量 $S_i$ 对坐标系 $(a_{12}, S_1)$ 的球面三公式可写为

$$\begin{aligned} s_{52} s_{2'} &= s_{51} s_1 \\ -(s_{12} c_{52} + c_{12} s_{52} c_{2'}) &= s_{51} c_1 \\ c_{12} c_{52} - s_{12} s_{52} c_{2'} &= c_{51} \end{aligned} \quad (1-28)$$

由四边形2345，按式(1-25)可写得

$$\begin{aligned} X_{43} &= s_{52} s_{2''} \\ Y_{43} &= s_{52} c_{2''} \\ Z_{43} &= c_{52} \end{aligned} \quad (1-29)$$

在此需要消去 $a_{52}$ 、 $\theta_2'$ 和 $\theta_2''$ 。三个外角 $\theta_2$ 、 $\theta_2'$ 和 $\theta_2''$ 之间的关系为

$$\theta_2' = \pi - (\theta_2'' - \theta_2) \quad (1-30)$$

将式(1-30)代入式(1-28)有

$$\begin{aligned} (s_{52} s_{2''}) c_2 - (s_{52} c_{2''}) s_2 &= s_{51} s_1 \\ c_{12} [(s_{52} s_{2''}) s_2 + (s_{52} c_{2''}) c_2] - s_{12} c_{52} &= s_{51} c_1 \\ s_{12} [(s_{52} s_{2''}) s_2 + (s_{52} c_{2''}) c_2] + c_{12} c_{52} &= c_{51} \end{aligned} \quad (1-31)$$

将式(1-29)代入(1-31)得到球面五边形的正弦公式、正弦-余弦公式和余弦公式

$$\begin{aligned} X_{[5]}: X_{432} &= s_{51} s_1 \\ Y_{[5]}: Y_{432} &= s_{51} c_1 \\ Z_{[5]}: Z_{432} &= c_{51} \end{aligned} \quad (1-32)$$

式左边按定义有

$$\begin{aligned} X_{432} &= X_{43} c_2 - Y_{43} s_2 \\ Y_{432} &= c_{12}(X_{43} s_2 + Y_{43} c_2) - s_{12} Z_{43} \\ Z_{432} &= s_{12}(X_{43} s_2 + Y_{43} c_2) + c_{12} Z_{43} \end{aligned} \quad (1-33)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{43} &= \bar{X}_4 c_3 - \bar{Y}_4 s_3 \\ Y_{43} &= c_{23}(\bar{X}_4 s_3 + \bar{Y}_4 c_3) - s_{23} \bar{Z}_4 \\ Z_{43} &= s_{23}(\bar{X}_4 s_3 + \bar{Y}_4 c_3) + c_{23} \bar{Z}_4 \end{aligned} \quad (1-34)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_4 &= s_{45} s_4 \\ \bar{Y}_4 &= -(s_{34} c_{45} + c_{34} s_{45} c_4) \end{aligned} \quad (1-35)$$

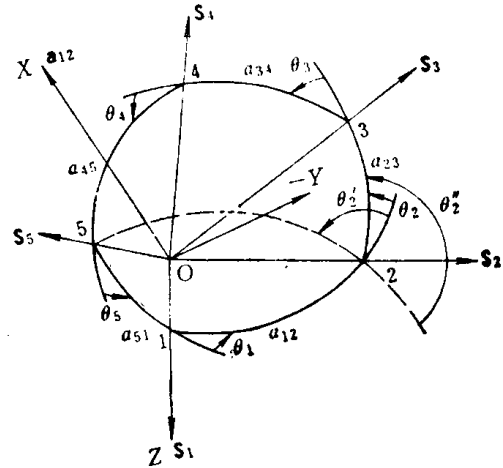


图1-7 球面五边形

$$\bar{Z}_4 = c_{34}c_{45} - s_{34}s_{45}c_4$$

$X_{432}$ 、 $Y_{432}$ 和 $Z_{432}$ 是方向余弦，有

$$X_{432}^2 + Y_{432}^2 + Z_{432}^2 \equiv 1$$

$$Z_{432} \equiv Z_{234}$$

(1-36)

通过上面对四边形和五边形的分析，经归纳可以看到公式形式为

$$X = Xc - Ys$$

$$Y = c(Xs + Yc) - sZ$$

$$Z = s(Xs + Yc) + cZ$$

式左边 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 的下标的最后一位数字是右边正弦或余弦 $\theta$ 角的下标。左边下标的其余数字，是式右边 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 的下标。 $\alpha$ 角的正弦或余弦的下标，是左边下标顺延一位后的数字串的最后两位数字。如式(1-33)左边下标顺延后为4321，给出 $a_{21} (\equiv a_{12})$ ，在(1-34)式左边下标顺延后为432，给出 $a_{32} (\equiv a_{23})$ 。这方法可用于写出多个下标的公式。下面将把上述分析推广到球面 $n$ 边形。

### 三、球面 $n$ 边形

球面 $n$ 边形有 $n$ 个边， $a_{12}$ 、 $a_{23}$ 、 $\dots$ 、 $a_{(n-1)n}$ ； $n$ 边形有 $n$ 个外角， $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\dots$ 、 $\theta_n$ ；有 $n$ 个菱边单位矢量 $S_1$ 、 $S_2 \dots S_n$ 。在 $n$ 边形中首先选坐标系 $(a_{12}, S_1)$ ，即 $X$ 轴垂直 $a_{12}$ 平面， $Z$ 轴与 $S_1$ 重合于笛卡尔坐标系，见图1-8。

当球面四边形、五边形公式导出后，球面 $n$ 边形公式可由归纳法写出

$$\begin{aligned} X_{[n]}: X_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= s_{n1}S_1 \\ Y_{[n]}: Y_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= s_{n1}c_1 \\ Z_{[n]}: Z_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= c_{n1} \end{aligned} \quad (1-37)$$

这是单位矢量 $S_n$ 对坐标系 $(a_{12}, S_1)$ 的三个方向余弦，上式左边之定义式为

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= X_{(n-1)(n-2)\dots 3}c_2 - Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}s_2 \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= c_{12}(X_{(n-1)(n-2)\dots 3}s_2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}c_2) - s_{12}Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= s_{12}(X_{(n-1)(n-2)\dots 3}s_2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}c_2) + c_{12}Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} \end{aligned} \quad (1-38)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= X_{(n-1)(n-2)\dots 4}c_3 - Y_{(n-1)(n-2)\dots 4}s_3 \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= c_{23}(X_{(n-1)(n-2)\dots 4}s_3 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 4}c_3) - s_{23}Z_{(n-1)(n-2)\dots 4} \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= s_{23}(X_{(n-1)(n-2)\dots 4}s_3 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 4}c_3) + c_{23}Z_{(n-1)(n-2)\dots 4} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1-39)$$

$$X_{(n-1)(n-2)} = \bar{X}_{n-1}c_{n-2} - \bar{Y}_{n-1}s_{n-2}$$

$$Y_{(n-1)(n-2)} = c_{(n-2)(n-3)}(\bar{X}_{n-1}s_{n-2} + \bar{Y}_{n-1}c_{n-2}) - s_{(n-2)(n-3)}Z_{n-1}$$

$$Z_{(n-1)(n-2)} = s_{(n-2)(n-3)}(\bar{X}_{n-1}s_{n-2} + \bar{Y}_{n-1}c_{n-2}) + c_{(n-2)(n-3)}Z_{n-1}$$

$$\bar{X}_{n-1} = s_{(n-1)n}s_{n-1}$$

$$\bar{Y}_{n-1} = -(s_{(n+2)(n-1)}c_{(n-1)n} + c_{(n-2)(n-1)}s_{(n-1)n}c_{n-1}) \quad (1-40)$$

$$\bar{Z}_{n-1} = c_{(n-2)(n-1)}c_{(n-1)n} - s_{(n-2)(n-1)}s_{(n-1)n}c_{n-1}$$

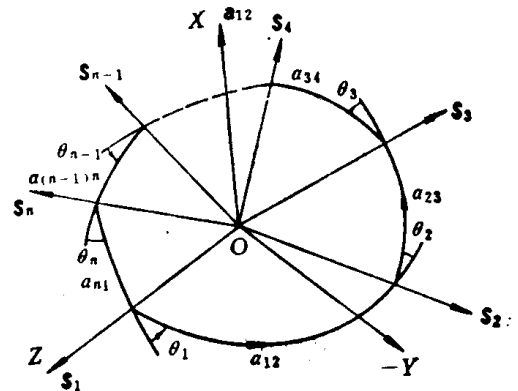


图1-8 球面 $n$ 边形

上述任何一组方向余弦的三个分量的平方和皆恒等于 1, 如

$$X_{(n-1)(n-2)\dots 2}^2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 2}^2 + Z_{(n-1)(n-2)\dots 2}^2 \equiv 1 \quad (1-41)$$

球面四边形、五边形、六边形和七边形的公式, 只须以  $n = 4, 5, 6, 7$  代入(1-37)式, 见表1-3。

表1-3 球面多边形的三角公式

	正弦公式	正弦-余弦公式	余弦公式
四 边 形	$X_{32} = s_{41}s_1$	$Y_{32} = s_{41}c_1$	$Z_{32} = c_{41}$
五 边 形	$X_{432} = s_{51}s_1$	$Y_{432} = s_{51}c_1$	$Z_{432} = c_{51}$
六 边 形	$X_{5432} = s_{61}s_1$	$Y_{5432} = s_{61}c_1$	$Z_{5432} = c_{61}$
七 边 形	$X_{65432} = s_{71}s_1$	$Y_{65432} = s_{71}c_1$	$Z_{65432} = c_{71}$

必须指出的是, 上述方向余弦表达式中的下角标 32, 或 432, ...表示了在这些表达式中, 包含有角度  $\theta_3, \theta_2$  或  $\theta_4, \theta_3, \theta_2, \dots$ 。上述这些公式是球面多边形的基本公式。

### § 1-3 球面多边形右坐标系公式及外角变换

在上节中球面多边形的三个三角公式已经导出, 那些坐标系的 Z 轴都是在基面的左边, 为左坐标系。对于 Z 轴位于基面右边的右坐标系的球面三角公式类似也可导出。坐标系  $(a_{(n-2)(n-1)}, S_{n-1})$  就是基面  $a_{(n-2)(n-1)}$  的右坐标系。单位矢量  $S_n$  对右坐标系  $(a_{(n-2)(n-1)}, S_{n-1})$  的三个三角公式为

$$\begin{aligned} X_{[n]}: X_{12\dots(n-2)} &= s_{n(n-1)}s_{n-1} \\ -Y_{[n]}: Y_{12\dots(n-2)} &= s_{n(n-1)}c_{n-1} \\ Z_{[n]}: Z_{12\dots(n-2)} &= c_{n(n-1)} \end{aligned} \quad (1-42)$$

其中左边按定义式有

$$\begin{aligned} X_{12\dots(n-2)} &= X_{12\dots(n-3)}c_{n-2} - Y_{12\dots(n-3)}s_{n-2} \\ Y_{12\dots(n-2)} &= c_{(n-2)(n-1)}(X_{12\dots(n-3)}s_{n-2} + Y_{12\dots(n-3)}c_{n-2}) - s_{(n-2)(n-1)}Z_{12\dots(n-3)} \\ Z_{12\dots(n-2)} &= s_{(n-2)(n-1)}(X_{12\dots(n-3)}s_{n-2} + Y_{12\dots(n-3)}c_{n-2}) + c_{(n-2)(n-1)}Z_{12\dots(n-3)} \\ X_{12\dots(n-3)} &= X_{12\dots(n-4)}c_{n-3} - Y_{12\dots(n-4)}s_{n-3} \\ Y_{12\dots(n-3)} &= c_{(n-3)(n-2)}(X_{12\dots(n-4)}s_{n-3} + Y_{12\dots(n-4)}c_{n-3}) - s_{(n-3)(n-2)}Z_{12\dots(n-4)} \\ Z_{12\dots(n-3)} &= s_{(n-3)(n-2)}(X_{12\dots(n-4)}s_{n-3} + Y_{12\dots(n-4)}c_{n-3}) + c_{(n-3)(n-2)}Z_{12\dots(n-4)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1-43)$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= X_1c_2 - Y_1s_2 \\ Y_{12} &= c_{23}(X_1s_2 + Y_1c_2) - s_{23}Z_1 \\ Z_{12} &= s_{23}(X_1s_2 + Y_1c_2) + c_{23}Z_1 \end{aligned} \quad (1-44)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= s_{n1}s_1 \\ Y_1 &= -(s_{12}c_{n1} + c_{12}s_{n1}c_1) \\ Z_1 &= c_{12}c_{n1} - s_{12}s_{n1}c_1 \end{aligned} \quad (1-45)$$

这里当看到所有右坐标系的公式与前节左坐标系的公式形式相同的时候, 特别要注意, 上面列出的正弦-余弦公式两边取负号才是方向余弦的第二个分量。

在多边形中, 若已知对某坐标系的方向余弦, 求对另一坐标系的方向余弦, 可以应用坐



标变换的办法。所有这些变换都可以通过旋转矩阵导出

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ij} & s_{ij} \\ 0 & -s_{ij} & c_{ij} \end{bmatrix}$$

$$[\theta_j] = \begin{bmatrix} c_j & s_j & 0 \\ -s_j & c_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $ij = 12, 23, 34, \dots$ , 和  $j = 1, 2, 3, 4, \dots$ 。当须要将坐标系按球面多边形的外角  $\theta_j$  的正向转过  $\theta_j$  角时, 只须在原来的方向余弦矢量之前乘以矩阵  $[\theta_j]$ ; 若须反转  $\theta_j$  角, 矩阵  $[\theta_j]$  中  $\theta_j$  以  $-\theta_j$  代替即可。同样若将坐标系沿多边形某一边的正向转过  $a_{ij}$  角, 只须将原来的方向余弦矢量前乘矩阵  $[a_{ij}]$ ; 若须反转  $a_{ij}$  角, 矩阵  $[a_{ij}]$  中以  $-a_{ij}$  代  $a_{ij}$  即可。例如要求将矢量  $S_n$  在右坐标系  $(a_{12}, S_2)$  上的方向余弦  $(X_1, -Y_1, Z_1)^T$  沿多边形正向转  $\theta_2$  角, 求  $S_n$  在左坐标系  $(a_{23}, S_2)$  上的方向余弦, 则有

$$\begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} \end{Bmatrix} = [\theta_2] \begin{Bmatrix} X_1 \\ -Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 c_2 - Y_1 s_2 \\ -(X_1 s_2 + Y_1 c_2) \\ Z_1 \end{Bmatrix} \quad (1-46)$$

若要求将  $S_n$  在坐标系  $(a_{23}, S_2)$  上的方向余弦  $(X_{(n-1)(n-2)\dots 3}, Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}, Z_{(n-1)(n-2)\dots 3})^T$  转过  $-\theta_2$  角, 求  $S_n$  在新坐标系  $(a_{12}, S_2)$  上的方向余弦, 有

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ -Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} = [-\theta_2] \begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 3} c_2 - Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} s_2 \\ X_{(n-1)(n-2)\dots 3} s_2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} c_2 \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 3} \end{Bmatrix} \quad (1-47)$$

式 (1-46) 及 (1-47) 右边的第一分量显然分别为  $X_{12}$  和  $X_{(n-1)(n-2)\dots 3}$  两式对应的第二分量的形式与第一分量相近。分别记以符号

$$Y_{12}^* = X_1 s_2 + Y_1 c_2$$

$$Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}^* = X_{(n-1)(n-2)\dots 3} s_2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} c_2$$

如又要求将单位矢量  $S_n$  在  $(a_{23}, S_3)$  上的方向余弦  $(X_{12}, Y_{12}, Z_{12})^T$  沿多边形正向转  $\theta_3$  至坐标系  $(a_{34}, S_3)$  上的方向余弦  $(X_{(n-1)(n-2)\dots 4}, Y_{(n-1)(n-2)\dots 4}, Z_{(n-1)(n-2)\dots 4})^T$ , 或相反转动。只须分别前乘转动矩阵  $[\theta_3]$  或  $[-\theta_3]$ , 有结果如

$$\begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 4} \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 4} \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} c_3 - Y_{12} s_3 \\ -(X_{12} s_3 + Y_{12} c_3) \\ Z_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{123} \\ -Y_{123}^* \\ Z_{12} \end{Bmatrix} \quad (1-48)$$

及

$$\begin{Bmatrix} X_{12} \\ -Y_{12} \\ Z_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 4} c_3 - Y_{(n-1)(n-2)\dots 4} s_3 \\ X_{(n-1)(n-2)\dots 4} s_3 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 4} c_3 \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{(n-1)(n-2)\dots 3} \\ Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}^* \\ Z_{(n-1)(n-2)\dots 4} \end{Bmatrix} \quad (1-49)$$

相邻两平面之间正转或反转  $\theta_j$  已如上述,  $j = 1, 2, \dots$ 。对同一基面左右两坐标系之间的变化也只须乘以变换矩阵  $[a_{ij}]$  或  $[-a_{ij}]$ 。上述式 (1-46) 至 (1-49) 称外角变换公式, 以后还将多次用到。

在式 (1-48) 和 (1-49) 中, 角标为反序排列的带 \* 符号, 如  $Y_{(n-1)(n-2)\dots 3}^*$  表示了矢量