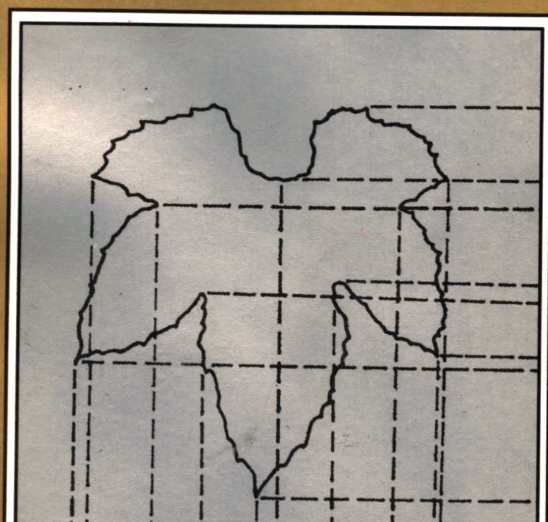
欧拉
著
张延伦
译

无穷分析引论

（上）



山西教育出版社

欧拉 著

张延伦 译

无穷分析引论

（上）

山西教育出版社

中译者的话

本书在数学史上地位显赫，是对数学发展影响最大的七部名著之一．初版（1748年）至今虽已200多年，但大数学家A. Weil教授1979年称道其现实作用说：学生从它所能得到的益处，是现代的任何一本教科书都比不上的．笔者手边的俄、德、英译本依次出版于1961、1985、1988，这大概可视为其现实作用的一个证明．

欧拉贡献巨大，著述极为多产．本书是它著作中最杰出的，书中结果几乎或都为他自己所得，或为他用自己的方法推出．他的作法是把最基本的东西解释得尽量清楚，讲明引导他得出结论的思路，而把进一步展开留给读者，使读者有机会驰骋自己的才能．这大概都是A. Weil教授前面那段话的根据．

本书是作为微积分预备教程，为弥补初等代数对于微积分的不足，为帮助学生从有穷概念向无穷概念过渡而写．读者对象是准备攻读和正在攻读数学的学生、数学工作者和广大数学爱好者．

本书从英译本转译，参考俄、德译本作了些订正和改动．

限于水平，中译文错误难免，敬希指正．

几 段 话

1. 高斯："学习欧拉的著作，乃是认识数学的最好工具."
2. 拉普拉斯："读读欧拉，他是我们大家的老师."
3. 波里亚很欣赏欧拉的作法：坦率地告诉人们引导他作出发明的思路.
4. Alberto Dou, S. J教授将欧拉的许多著作译成了西班牙文. 他对本书的英译者说："《无穷分析引论》是欧拉著作中最杰出的."
5. A. Weil教授1979年在Rochester大学的一次讲演中说："今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的."

英译者序（节译）

1979年10月，Andre Weil教授在Rochester大学，以欧拉的生平和工作为题，作了一次报告．报告中他向数学界着力陈述的一点是：今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的．我查到了该书的法、德、俄三个语种的译本，但查不到英文全译本，就是在这样的背景下，我着手对该书进行翻译的．

欧拉在序言中说得明白，这是一本微积分预备教程．书中有几处，那里的东西只提了一下，把处理留给了微积分，用微积分处理要简单容易许多．凡这种地方书中都有交待．

关于书名，欧拉原文中的无穷（Infinitorum）是复数．看来这复数主要指：无穷级数、无穷乘积和连分式三种无穷．因而书名应译为《有关几种无穷的分析引论》，不顺口，我译它为《无穷分析引论》．

任教于巴塞罗那大学的S. J. Alberto Dou教授将欧拉的很多著作译成了西班牙文，最近译者曾与他谈起过本书．我们就用那次谈话中他的一句话作为这段序言的结束："在欧拉的著作中《无穷分析引论》最为杰出．"

作者序

接触到的学生，他们学习无穷分析之所以遇到困难，往往是由于在必须使用无穷这一陌生概念时，初等代数刚学，尚未登堂入室．虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能，问题是有些必备的东西，初等代数或者完全没讲，或者讲得不够详细．本书力求把这类东西讲得既充分又清楚，求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足．书中还把相当多的难点化易，使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想，有很多通常归无穷分析处理的问题，本书使用了代数方法．这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系．

本书分上、下两册，上册讲纯分析，下册讲必要的几何知识，这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用．别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲．本书所讲是别处不讲的，或讲得太粗的，或虽讲但所用方法完全不同的．

整个无穷分析所讨论的都是变量及其函数，因此上册细讲函数，讲了函数的变换、分解和展开为无穷级数．对函数，包括属于高等分析的一些函数进行了分类．首先分函数为代数函数和超越函数．变量经通常的代数运算形成的函数叫代数函数，经别的运算或无穷次代数运算形成的函数叫超越函数．代数函数又分为有理函数和无理函数．对有理函数讲了分解它为因式和部分分式，分解为部分分式之和这种运算在积分学中有着重要应用．对

无理函数给出了用适当的代换变它为有理函数的方法．无理函数和有理函数都可以展开成为无穷级数，但这种展开对超越函数用处最大．无穷级数的理论可用于高等分析，为此增加了几章，用于考察很多无穷级数的性质与和．其中有些级数的和不用无穷分析是很难求出的，其和为对数和弧度的级数就是．对数和弧度是超越量，可通过求双曲线下的和圆的面积确定，主要由无穷分析对它们进行研究．接下去从以底为变量的幂转向了以指数为变量的幂．作为以指数为变量之幂的逆，自然而有成果地得到了对数概念．对数不仅本身有着大量应用，而且由它可得到一般量的无穷级数表示．还讲了造对数表的简单方法．类似地，我们考察了弧度．弧度与对数虽然是两种完全不同的量，但它们却有着如此密切的关系，当一种为虚数形式时，可化为另一种．重复了几何中多倍角和等分角正弦和余弦的求法之后，从任意角的正弦余弦导出了极小角的正弦和余弦，并导出了无穷级数．由此，从趋于消失的角其正弦等于角度，余弦等于半径，我们可以通过无穷级数使任何一个角度等于它的正弦余弦．这里我们得到了如此之多的各种各样的有限的和无穷的这种表达式，以至于无需再对其性质进行研究．对数有着它自己的特殊算法，这种算法应用于整个分析．我们推出了三角函数的算法，使得对三角函数的运算如同对数运算和代数运算一样地容易．从书中有几章的内容可以看出，三角函数算法在解决难题时，其应用范围是何等的广．事实上，这种例子从无穷分析中还可举出很多，日常的数学学习和数学工作中也会遇到很多．

分解分数函数为实部分分式在积分学中有着重要应用，而三角函数算法对分解分式为实部分分式有极大帮助，我们对它进行详细讨论的原因正在于此．接下去的讨论是分数函数展成的无穷级数——递推级数．讨论了它的和、通项和另外一些重要性质．递推级数考虑的是因式乘积的倒数，我们也考虑了展多因式，甚

至无穷个因式的乘积为级数. 这不仅可导致对无穷多个级数的研究，而且利用级数可表示成无穷乘积，我们找到了一些方便的数值表达式，用这些表达式可以容易地计算出正弦、余弦和正切的对数，利用展因式乘积为级数，我们推出了许多有关拆数为和这类问题的解. 倘不利用这一点看来分析对拆数为和是无能为力的.

本书涉及方面之广，完全可以写成几册书，因而我们力求简单明了，把最基本的东西解释得尽量清楚，而把进一步展开留给读者，使读者有机会驰骋自己的才能，自己来进一步发展分析. 我坦率地告诉读者，本书含有许多全新的东西，并且从本书的很多地方可以得到重要的进一步的发现.

下册讨论的问题，一般地说都属于高等几何，处理方法同于上册. 一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始，本书先讲曲线的一般理论，再讲圆锥曲线，为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线. 本书利用描述曲线的方程，而且只用这种方程来研究曲线. 曲线的形状和基本性质都从方程推出. 我觉得这种处理方法的优越性，在圆锥曲线上表现得最突出. 即或有人对它应用分析方法，那也是显得生硬、不自然的. 我们先从二阶曲线的一般方程解释了二阶曲线的一般性质. 接下去根据有无伸向无穷的分支，也即是否界于某个有限区域之中，对二阶曲线进行了分类. 对于无穷分支，我们进一步考虑分支的条数，并考虑各条分支有无渐近线. 这样我们得到了通常的三种圆锥曲线. 第一种是椭圆，它界于一个有限区域之中；第二种是双曲线，它有四条伸向无穷的分支，趋向两条渐近线；第三种是抛物线，有两条伸向无穷的分支，没有渐近线.

接下去，对三阶曲线用类似的方法，阐述了其一般性质，并将它分为 12 类，事实上是把牛顿的 72 种划分成了 12 类. 对这一方法我们的描述是充分的，不难用它对更高阶曲线进行分类.

书中用它对四阶曲线进行了分类.

在分阶进行考察之后，我们转向了寻求曲线的共同性质. 讲了曲线的切线和法线的定义方法，也讲了用密切圆半径表示的曲率. 虽然这些问题现在一般都用微积分来解决，但本书只在通常代数的基础上对它进行讨论，为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析. 我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了研究. 讲了如何从方程求出这些点，求法都不难. 但我不否认用微分学的方法来求更容易. 我们也讲到了关于二阶尖点这有争论的问题. 二阶尖点，即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点. 我们讨论的深度不越出看法一致的范围.

加写了几章，用来讨论具有某些性质的曲线的求法. 最后给出了与圆有关的几个问题的解.

几何中有几部分是学习无穷分析所必备. 有鉴于此，我们添上了一个附录，用计算的方式讲立体几何中有关立体和曲面的一些知识. 讲了如何用三元方程表达曲面的性质，然后照曲线那样，根据方程的阶数将曲面分了类，并证明了只有一阶曲面才是平面. 根据它伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类. 对更高阶的曲面也可以用类似的方式进行分类. 我们对两个曲面的交线进行了讨论. 交线多数都不在一个平面上，我们讲了如何用方程表示交线. 最后对曲面的切线和法面进行了一些讨论.

这里申明一点，书中很多东西是别人已经得到了的，恕我没有一一指出. 本书力求简短，如果对问题的历史进行讨论，那将突破本书的篇幅限制. 作者可聊以自慰的是，对别人已经得到了的东西，其中很多本书是用另一种方法进行讨论的. 很希望多数读者从方法新和全新特别是全新的东西中得到益处.

目　录

第一章

函 数

§1

常量是固定的保持不变的量.

常量可以取定一个数值，一旦取定即保持常值不变. 在需要用符号表示常量时，使用拉丁字母表中开始部分的字母 a，b，c 等. 这是分析与代数的不同. 代数的考察对象是固定的量，在代数中 a，b，c 等代表已知数，x，y，z 等代表未知数. 而分析中前者代表常量，后者代表变量.

§2

变量是不确定的，是可以取不同数值的量.

确定的量都只可以是一个数，变量可以取每一个数. 也即确定的量，或者常量与变量的关系有如单个事物与一类事物. 一类事物包含这类事物的每一个，变量包含每一个确定的量. 变量通常用拉丁字母表中结尾部分的字母 x，y，z 等表示.

§ 3

指定变量为某个确定的值，它就成了常量.

变量可以取任何数，因而它的确定方式是无穷的. 取不遍所有确定的数，这变量就依然是变量，不是常量. 这样变量就包容着正数和负数、整数和分数、无理数和超越数等这一切数. 零和虚数也一样地在它的取值范围之中.

§ 4

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式.

只含一个变量 z，余者都为常量，这样的解析表达式叫做 z 的函数. 表达式

$a+3z$，$az-4z^2$，$az+b\sqrt{a^2-z^2}$，c^2

等就都是 z 的函数.

§ 5

变量的函数本身也是一个变量.

可以用任何一个确定的值来代替变量，因而函数可以取无穷多个值. 又由于变量可以取虚数值，因而函数可以取任何值. 例如，函数$\sqrt{9-z^2}$，如果限制 z 只取实数值，那么$\sqrt{9-z^2}$就取不到大于 3 的值. 如果允许 z 取虚数值，那就没有$\sqrt{9-z^2}$取不到的值. 例如，可以让 z 取 $5\sqrt{-1}$. 但有时会遇到只是象函数的函数，不管变量取什么值，它总保持为常数. 例如

$$z^0,\ 1^z,\ \frac{a^2 - az}{a - z},$$

它们样子象函数，但实际上都是常量.

§ 6

函数由变量与常量联合而成. 函数之间的基本区别就在于这联合方式.

联合方式决定于运算，运算规定量之间的关系. 这运算首先是代数运算，即加、减、乘、除、乘方和开方，以及解方程. 其次是超越运算，即指数运算，对数运算，以及积分学提供的大量其他运算等.

这里指出两种简单的函数，一种是倍数，例如

$$2z,\ 3z,\ \frac{3}{5}z,\ az \text{ 等}.$$

再一种是幂，例如

$$z^2,\ z^3,\ z^{\frac{1}{2}},\ z^{-1}\text{等}.$$

它们都只含有单一的一种运算. 下面我们对包含多于一种运算的表达式加以分类，并赋于每类一个名称.

§ 7

函数分为代数函数和超越函数，前者只含代数运算，后者含有超越运算.

z 的倍数，z 的幂以及由前面所说的代数运算形成的任何一个表达式，例如

$$\frac{a + bz^n - c\sqrt{2z - z^2}}{a^2 z - 3bz^3}$$

都是代数函数，代数函数常常不能显式表出．例如由方程

$$Z^5 = az^2 Z^3 - bz^4 Z^2 + cz^3 Z - 1$$

确定的 z 的函数 Z 就不能显式表出．虽然这个方程解不出，但可以肯定这个 Z 等于 z 和常数构成的某个表达式，因而这个 Z 是 z 的函数．关于超越函数要指出的一点是，超越运算必须作用于变量．如果超越运算只作用于常量，这样的函数依旧是代数函数．例如，记半径为 1 的圆的周长为 c，这 c 是个超越量．对这个超越量 c，表达式

$$c + z,\ cz^2,\ 4z^c$$

等仍然是代数函数．有人对 z^c 是否为代数函数提出疑问，也有人认为指数为无理数的幂，如 $z^{\sqrt{2}}$，不该归入代数函数，并给它们起了个名字叫半超越函数．这都无关紧要．

§ 8

代数函数又分为有理函数和无理函数．有理函数其变量不受根号作用，无理函数其变量受到根号的作用．

有理函数只含有加、减、乘、除和整数次的乘方运算．如

$$a + z,\ a - z,\ az,\ \frac{a^2 + z^2}{a + z},\ az^3 - bz^5$$

等就都是 z 的有理函数．而表达式

$$a + \sqrt{a^2 - z^2},\ (a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}},\ \frac{a^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{a + z}$$

就都是无理函数．

无理函数又分为显式的和隐式的．显式无理函数，如我们刚举出的例子，是可以用根号表示出来的．隐式无理函数是从方程产生的．例如，方程

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

确定的 Z 就是 z 的隐式函数. 代数理论还没有达到能够从该方程求出 Z 的显式表达式这样的完善程度，允许使用根号也不行.

§ 9

有理函数又分为整函数和分数函数.

分母中不含变量 z，且变量 z 的指数中没有负数，这样的有理函数叫整函数. 分母中含有 z，或者 z 的指数中有负数，这样的有理函数叫分数函数. 整函数的一般形状为

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots$$

凡整函数都在该表达式之中. 由于几个分数可以合成为一个分数，所以分数函数的形状都为

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \cdots}$$

这里须指出一点，常量 a，b，c，d，…和 α，β，γ，δ，…可为正数，可为负数；可为整数，可为分数；可为无理数，甚至可为超越数. 这都不影响该表达式为分数函数.

§ 10

接下来我们考虑单值函数和多值函数.

单值函数指，从变量 z 的每一个值都只得到一个确定的函数值；多值函数指，从变量 z 的每一个值都可以得到多于一个确定的函数值. 有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数，因为这类表达式，每一个 z 值都只产生一个函数值. 无理函数都是多值的，根号给出两个值. 超越函数就不同了，有单值的，也有多值的，甚至有无穷多值的. 反正弦函数就是无穷多值的，其变量 z 的每一个值都对应无穷多个角度.

我们用字母 P，Q，R，S，T 等表示 z 的单值函数.

§ 11

二值函数，指从每一个 z 值都得到函数 Z 的两个值.

平方根，例如$\sqrt{2z+z^2}$，就是二值函数. 对每一个 z 值，表达式$\sqrt{2z+z^2}$都有一正一负两个值. 一般地，如果 Z 由二次方程

$$Z^2-PZ+Q=0$$

确定，它就是一个二值函数. 当然，这里假定 P，Q 都是 z 的单值函数.. 从这个二次方程我们得到

$$Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{(1/4)\ P^2-Q}$$

也即每一个确定的 z 值都对应两个确定的 Z 值. 须指出，Z 的两个值必定同为实数或同为虚数，而且由方程的知识我们知道：这两个值，和等于 P，积等于 Q.

§ 12

三值函数，指每一个 z 值都给出函数的三个确定的值.

三次方程的解就是一个三值函数. 如果 P，Q，R 是 z 的单值函数，且

$$Z^3-PZ^2+QZ-R=0,$$

那么 Z 就是 z 的三值函数，因为从 z 的任何一个值都能得到 Z 的三个值. Z 的这三个值，必定或者全为实数，或者一实两虚，且这三个值，和等于 P，积等于 R，两个两个之积的和等于 Q.