2001年考研辅导教材

2001 NIAN SHUO SHI YAN JIU SHENG RU XUE KAO SHI YING SHI JIAO CHENG

2001 硕士研究生入学考试 应试教程

（数学分册）

理工类

编　写　考研命题研究组
编　著　北京大学数学科学学院
田　勇　郭玉霞
总策划　胡东华

科学技术文献出版社

考　研　辅　导　教　材

硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)

[理工类]

编　写　考研命题研究组

编　著　北京大学数学科学学院

田　勇　郭玉霞

总策划　胡东华

科　学　技　术　文　献　出　版　社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试应试教程.数学:理工类/田勇等编.

－北京:科学技术文献出版社,2000.5

ISBN 7－5023－3542－0

Ⅰ.硕... Ⅱ.田... Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18785 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)62579473－8100

图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119

门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201

图书发行部传真:(010)62579473－8002

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策　划　编　辑:胡东华

责　任　编　辑:赵　斌

责　任　校　对:赵　斌

封　面　设　计:胡东华

发　　行　　者:科学技术文献出版社发行

新华书店总店北京发行所经销

印　　刷　　者:北京市西定安印刷厂

版　(　印　)　次:2000 年 4 月第 1 版　2000 年 4 月第 1 次印刷

开　　　　　本:787×1092　16 开

字　　　　　数:98 万字

印　　　　　张:28

定　　　　　价:32.00 元

前　言

依据新修订的硕士研究生入学数学(理工类)考试大纲(数学一、数学二),根据作者多年命题经验,在作者主编的《数学考研辅导教材》的基础上编写了这本书。

原辅导教材出版多年来备受广大读者的欢迎,本书保留了原教材的优点,并作了较大修改。

本次修订的最大特点是我们在每一节的开头,用表格的形式分类列出这一节的主要内容,目的是使读者一目了然。

其次,本次修订改变了原书的结构,把基础知识纳入了表格,从而与例题了然分开,目的是使读者专心于基础知识或例题。

第二个特点是充实了"历届试题小结",目的是使读者更清楚考研命题趋势及特点。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书,也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的经济类院校的本科、大专、电大、夜大的学生的参考书。也便于自学者阅读。

本书的修定体例,由胡东华先生策划,特此致谢。

由于水平有限,书中不妥之处,欢迎读者指正。

编　者

2000 年 3 月

(京)新登字 130 号

声明：本书封面及封底均采用专用图标(见右图)，该图标已由国家商标局注册受理登记，未经本策划人同意禁止其他单位使用。

科学技术文献出版社
向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于 1973 年，国家科学技术部主管，主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力，都是为了使您增长知识和才干。

目　录

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

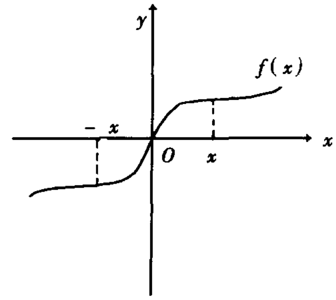
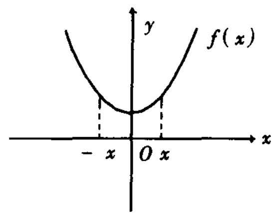
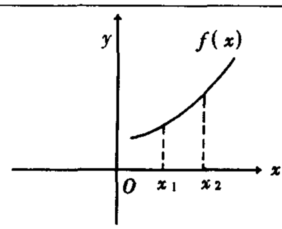
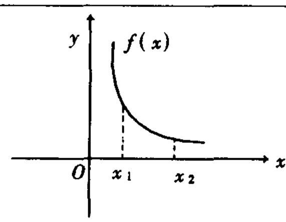
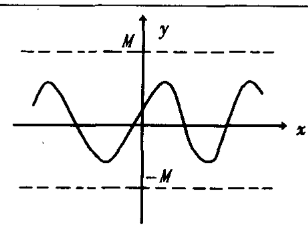
§1　函数、极限与连续

§1.1　考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y=f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量． $\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x,f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		并非所有的函数都有图形．例如：狄雷克莱函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数，没有图形}\end{cases}$
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数．记作 $y=f[g(x)]$ 或 $y=f\cdot y$	对应规则、定义域，值域	结合律成立 $f[g(h)]=f\cdot(g\cdot h)$，但没有交换律，即 $f\cdot g \neq g\cdot f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1,x_2 \in X$，若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，或者由 $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y=f(x)$ 在 X 上是一一对应的，值域为 Y，$\forall y \in Y$，用满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应．由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数		$f: X \to Y$； $f^{-1}: Y \to X$； $f^{-1}(f)=I_X: X \to X$； $f\cdot f^{-1}=I_Y: Y \to Y$； $(f^{-1})^{-1}=f: X \to X$； I_X 表 X 上恒同变换．
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定义		图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,x, $-x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,x, $-x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立,则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\exists M > 0$, $\forall x \in X$,有 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$,(或 $\exists m$, M,使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立),则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数		 即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\forall M > 0$, $\exists x' \in X$, 使得 $\lvert f(x') \rvert > M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界		例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界,因为 $\forall M > 0$, 取 $x' = \frac{1}{3M}$, 则 $f(x') = 3M > M$

周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义，若 $\exists T>0, \forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数. 若在无穷多个周期中，有最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 1° $f(x+kT)=f(x)$，(k 为整数)；2° $f(ax+b)(a\neq 0, b\in R)$ 是一个以 $\left\|\frac{T}{a}\right\|$ 为周期的函数

表 1.1.3 各种极限($\varepsilon-\delta(N)$)定义

分类		定义	补充说明
序列极限	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (a 有限)	$\forall\varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时有 $\|x_n-a\|<\varepsilon$	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\infty$	$\forall M>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\|x_n\|>M$	对应有极限趋于 $\pm\infty$ 的情况
函数极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ (x_0, a 有限)	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$	
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (x_0 有限)	$\forall M>0, \exists\delta>0$，当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|>M$	对应有极限趋于 $\pm\infty$ 的情况
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ (a 有限)	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$，当 $\|x\|>X$ 时，有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$	有 x 趋于 $\pm\infty$ 两种情况
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	$\forall M>0, \exists X>0$，当 $\|x\|>X$ 时，有 $\|f(x)\|>M$	有 $x\to\pm\infty, f(x)\to\pm\infty$ 共四种情况
函数单侧极限	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ (a, x_0 有限)	$\forall\varepsilon<0, \exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$	对于 $a=\pm\infty$ 的情况，可类似上面的定义
	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$	
			当 a 为有限时，称为极限存在

表 1.1.4 序列极限的性质

唯一性	若序列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限值是唯一的
有界性	若序列 $\{x_n\}$ 有极限，则序列 $\{x_n\}$ 有界
有序性	给定序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，若 $x_n\leqslant y_n$，$(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=b$，则 $a\leqslant b$
保四则运算性	设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=b$，则 1° $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$； 2° $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\cdot y_n=a\cdot b$； 3° 若 $b\neq 0, y_n\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$

表 1.1.5 函数极限的性质

唯一性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一
有界性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则函数在 x_0 的某一空心邻域内有界
有序性	设在 x_0 的一空心邻域内有 $f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则 $A\leqslant B$
保四则运算性	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$,则 1° $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$; 2° $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$; 3° 若 $b\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$

表 1.1.6 极限存在的判别准则

序列极限存在性	两边夹定理	给定序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$,满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$
	单调有界性判别法	单调上升有上界的序列必有极限 单调下降有下界的序列必有极限
函数极限存在性	两边夹定理	设在 x_0 的空心邻域上有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$
	单侧极限判别法	设 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域上定义,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且相等

表 1.1.7 两个重要极限

基本形式	变　　型	注　　意
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$,必须保证当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 以 0 为极限	分子,分母中 $f(x)$ 必须统一,包括系数和正负号
$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$	1° $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; 2° $\lim\limits_{x\to a}[1+g(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=e$,必须保证当 $x\to a$ 时, $g(x)\to 0$	$g(x)$ 形式上一定要统一.正负号之差是常见的错误

表 1.1.8 连续函数的定义、性质

<table>
<tr><th colspan="2">定　义</th><th>等价条件与性质</th><th>补充说明</th></tr>
<tr><td rowspan="3">函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续</td><td>$f(x)$ 是在 (a,b) 上给定的函数，$x_0 \in (a,b)$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 点连续</td><td>1° 等价条件
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0+0)$，$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0-0)$，则 $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$. 即 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点左右极限存在且相等，等于 $f(x_0)$ 函数值</td><td rowspan="3">在 $\varepsilon-\delta$ 定义中设有 $|x-x_0|>0$ 这一条件，即 $f(x)$ 在 x_0 点连续，必须要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义. 这是不同于极限的定义的</td></tr>
<tr><td rowspan="2">或 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x-x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$</td><td>2° 四则运算性
$f(x), g(x)$ 在 x_0 点连续，则
$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \left.\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|_{g(x) \neq 0}$，在 x_0 点连续</td></tr>
<tr><td>3° 复合函数
$y = f(t)$ 在 $t = t_0$ 连续，$t = g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow y = f[g(x)]$ 在 x_0 连续</td></tr>
<tr><td rowspan="3">函数 $f(x)$ 在区间上连续</td><td rowspan="3">若 $f(x)$ 在区间上每一点都连续，称 $f(x)$ 在区间上连续，闭区间端点指单侧连续</td><td>1° 零点性质
设 $f(x) \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.（用于判别方程有根）</td><td rowspan="3">这三条性质中，闭区间的要求是本质的，不可轻易替换</td></tr>
<tr><td>2° 中间值定理
设 $f(x) \in C[a,b]$，值 η 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \eta$.</td></tr>
<tr><td>3° 最值性质
设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 一定在区间上达到最大，最小值；即 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$，使 $\forall x \in [a,b]$，有 $\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_2) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$</td></tr>
</table>

表 1.1.9 间断点定义、分类.

定　义	分　　类			例
函数 $f(x)$ 在区间中的不连续点,称为间断点(只讨论 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都有定义的点,而不讨论单侧端点)	第一类间断点	可去间断点	1° $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在且相等,但 $f(x_0)$ 无定义.	$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},(x\neq 0)$ 中 $x=0$ 点
			2° $f(x_0)$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且相等,但不等于 $f(x_0)$ 的值	$f(x)=\mathrm{sign}(x)^2, x=0$ 点
		3° $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在,但不相等		$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x^2, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ $x=1$ 点
	第二类间断点	4° $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 中至少有一个不存在		$f(x)=\dfrac{1}{x},(x\neq 0)$ 中 $x=0$ 点; $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 中 $x=0$ 点

表 1.1.10 无穷小量定义、性质

定　义	性　质
极限为 0 的变量,称为无穷小量	1° 无穷小量的绝对值仍是无穷小量
	2° 无穷小量乘有界变量仍是无穷小量
	3° 变量有极限 a 的充要条件为变量可分解成 a 加无穷小量
	4° 有限个无穷小量的和、差、积仍是无穷小量
	5° 无限个无穷小量的和、差、积不一定是无穷小量（本结论的例子超出大纲要求,只须记住结论）

表 1.1.11 无穷大量

定　义	性　质
极限为无穷(包括 $+\infty$, $-\infty$)的变量称为无穷大量	若变量不取零值,则变量为无穷大量 $\Leftrightarrow$ 它的倒数为无穷小量

表 1.1.12 无穷小阶的比较

前提条件	定　义	记　号
设函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内有定义(x_0 可以是无穷), $f(x),g(x)$ 为无穷小量, 且 $g(x)\neq 0$, 又设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(有限), 若设函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内有定义(x_0 可以是无穷), $f(x),g(x)$ 为无穷小量, 且 $g^k(x)\neq 0$, k 为常数, $k>0$	$A\neq 0, A\neq 1$, 则称 $f(x),g(x)$ 为同阶无穷小量	$f(x)\sim Ag(x)$
	$A=1$, 则称 $f(x),g(x)$ 为等价无穷小量	$f(x)\sim g(x)$
	$A=0$, 则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小量	$f(x)=o(g(x))$
	若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=$ 有限非 0 值, $f(x)$ 为 $g(x)$ 的 k 阶无穷小量	$f(x)\sim g^k(x)$

表 1.1.13 常见等价无穷小量的例子($x\to 0$)

$\sin x\sim x$,	$\tan x\sim x$,	$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,
$e^x-1\sim x$,	$\ln(1+x)\sim x$,	$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

§1.2　典型例题解析

1.函数

> **怎样求复合函数? 主要分两种情况:**
> (Ⅰ)对于非分段函数常用直接代入的方法,如上面的例子;
> (Ⅱ)对于分段函数常用讨论的方法.

例 1　(1) 设 $f(x)=e^{\arcsin x}$, 又 $f[g(x)]=x-1$, 求 $g(x)$ 的表达式及定义域;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ 1+x, & x\leqslant 0;\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 及其定义域.

解　(1) 由 $f[g(x)]=e^{\text{arc sing}(x)}=x-1$, 解得 $g(x)=\sin[\ln(x-1)]$, 又因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 且 }x-1>0,$$

得定义域为

$$1+e^{-\frac{\pi}{2}}<x<1+e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}-[f(x)]^2, & f(x)>0,\\ f(x), & f(x)\leqslant 0.\end{cases}$

若 $f(x)>0$, 当 $x>0$ 时, 则 $f(x)=x>0$, 从而 $g[f(x)]=-x^2$; 当 $-1<x\leqslant 0$ 时, 则 $f(x)=1+x>0$, 从而 $g[f(x)]=-(1+x)^2$.

若 $f(x)\leqslant 0$, 当 $x\leqslant -1$ 时, 则 $f(x)=1+x\leqslant 0$, 从而 $g[f(x)]=1+x$.

综合以上得

$$g[f(x)]=\begin{cases}-x^2, & x>0;\\ -(1+x)^2, & -1<x\leqslant 0;\\ 1+x, & x\leqslant -1.\end{cases}$$

> 判别函数奇偶性的**常用方法是**:
> (Ⅰ)利用奇偶性的定义;
> (Ⅱ)利用奇偶函数的性质.

例 2　讨论下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+f(|\sin x|-2)\mathrm{sgn}(\sin x)$;

(2) 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积，由 $f(x)$ 的奇偶性，讨论函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解　(1) a^x+a^{-x} 为偶函数，而 a^x-a^{-x} 为奇函数，从而 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\mathrm{sgn}(\sin x)$ 为奇函数；

(2) 先设 $f(x)$ 为偶函数，则

$$\begin{aligned}\Phi(-x)&=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-z}\int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)\\&=-\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z=-\int_0^x f(z)\mathrm{d}z=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\Phi(x).\end{aligned}$$

因此，当 $f(x)$ 为偶函数时，$\Phi(x)$ 是奇函数.

同理可证当 $f(x)$ 为奇函数时，$\Phi(x)$ 是偶函数.

注：若 $f(x)$ 连续，则 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 任一个原函数都可写成 $\Phi(x)+c$，c 为任意取定的常数. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$\Phi(x)$ 是奇函数，但 $\Phi(x)+c(c\neq 0)$ 都不是奇函数.

> 判断函数 $f(x)$ 在 X 上的单调性，常用方法为：
> (1) 用单调性的定义；
> (2) 利用导数 $f'(x)$（参见本章 §3 的单调性判别法）.
> 不是所有函数都有单调性，例如狄利克雷函数就没有单调性.

例 3　设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数，又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]\cdot f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数. 试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

分析　因为 $F(x)$ 是变上限的积分，且 $f(x)$ 连续，所以可用 $F(x)$ 的导数来讨论.

解　$F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x).\end{aligned}$$

方法一

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x\mathrm{d}t\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故(1) 若 $f(x)$ 单调下降：当 $x\geqslant 0$ 时，$(0\leqslant t\leqslant x)$　$f(t)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x<0$ 时 $(x\leqslant t\leqslant 0)$，

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t,$$

此时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$，又 $x^{2n-1}<0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调下降，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升；在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

(2) 若 $f(x)$ 单调上升，则类似地讨论可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降；在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

方法二　利用积分中值定理.

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)],$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调上升：当 $x>0$ 时，则 $0<\xi<x$，而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$；当 $x=0$ 时，则 $F'(x)=0$；当 $x<0$ 时，则 $x<\xi<0$，而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$.

因此,若 $f(x)$ 单调上升,则 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调下降;在$(-\infty,0]$ 上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降:则类似可得 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调上升;在$(-\infty,0]$ 上单调下降.

2. 用单调有界性求极限

例 4 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在; (2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$;

(3) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

解 (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0\Rightarrow x_n\geqslant\sqrt{a}(n\geqslant 2)$,即$\{x_n\}$ 有下界.由此得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

即$\{x_n\}$ 单调下降.因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\beta$,由(1)$\beta\geqslant\sqrt{a}>0$.对递推公式两端取极限,得 $\beta=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{a}{\beta}\right)$,解得 $\beta=\pm\sqrt{a}$(舍去负值),所以 $\beta=\sqrt{a}$.

(3) 由(1) 知

$$0\leqslant\frac{x_n}{x_{n+1}}-1=\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}(x_n-x_{n+1}),$$

令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})=x_1-x_{n+1}$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,因此,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n+1})$ 收敛.由比较判别法知所证级数收敛.

注:求数列的极限分两步:1° 先用数学归纳法证明数列单调有界,从而数列有极限;2° 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\beta$,对给定 x_n 的递推公式两端取极限,表达式变为 β 的代数方程,最后解出 β.

例 5 设 $x_1=\sqrt{A}(A>0), x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}},\cdots, x_n=\sqrt{A+\sqrt{A+\cdots+\sqrt{A}}}(n=1,2\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解 (1) 先证$\{x_n\}$ 单调增加且有上界.因为 $x_n=\sqrt{A+x_{n-1}}$. $x_n^2=A+x_{n-1}$.

$$x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}=\sqrt{A+x_1}>x_1,$$

假设当 $n=k$ 时,有 $x_k>x_{k-1}$,那么由 $A+x_k>A+x_{k-1}$,知 $\sqrt{A+x_k}>\sqrt{A+x_{k-1}}$,即 $x_{k+1}>x_k$,故对 $n=k+1$ 也成立.由数学归纳原理知$\{x_n\}$ 单调增加.

再证数列$\{x_n\}$ 有界.因为 $x_1=\sqrt{A}<\sqrt{A}+1$, 设当 $n=k$ 时, 有 $x_k<\sqrt{A}+1$,那么当 $n=k+1$ 时

$$x_{k+1}=\sqrt{A+x_k}<\sqrt{A+\sqrt{A}+1}<\sqrt{A+2\sqrt{A}+1}=\sqrt{(\sqrt{A}+1)^2}=\sqrt{A}+1,$$

因此$\{x_n\}$ 有上界.从而数列$\{x_n\}$ 收敛.

(2) 再求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$,将 $x_{n+1}=\sqrt{A+X_n}(n=1,2,\cdots)$ 两端取极限,得 $\alpha=\sqrt{A+\alpha}$,解得 $\alpha=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4A})$,由(1) 知 $\alpha>0$,因此 $\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4A})$.

3. 用夹逼定理求极限

例 6 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}\mathrm{d}x$; $\leq \int_0^1 x^n dx$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}$

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时(积分不容易计算),

$$0\leqslant\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}\leqslant x^n,$$

故 $$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\frac{x^n}{n+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{n+1},$$

因为 $$\lim_{n\to+\infty}0=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0,\text{所以}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}\mathrm{d}x=0.$$

(2) 因为 $10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<\sqrt[n]{10\times10^n}=10\sqrt[n]{10}$，又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{10}=1$，所以由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}=10.$$

(3) 由于

$$\frac{5}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{n}}=\sqrt[n]{\frac{2\times5^n}{n}}=5\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故根据夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}=5.$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

错误做法：

原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0+0\cdots+0.$

因为当 $n\to+\infty$ 时，项数无限增加，不能用极限运算法则.

正确作法：

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 8 证明数列

$$a_n=\frac{11\times12\times13\times\cdots\times(n+10)}{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-1)}\ (n=1,2,\cdots)$$

收敛，并求其极限值

分析 $a_n=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{7+10}{3\times7-4}\times\dfrac{8+10}{3\times8-4}\times\cdots\times\dfrac{n+10}{3n-4}\times\dfrac{1}{3n-1}$，注意到只要 $n>7$，就有 $3n-4>n+10$，从而有 $\dfrac{8+10}{3\times8-4},\dfrac{9+10}{3\times9-4},\cdots,\dfrac{n+10}{3n-4}\ (n\geqslant8)$ 都小于 1.

证明 令 $M=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{7+10}{3\times7-4}$，则 $0<a_n<M\dfrac{1}{3n-1}\to0$（当 $n\to+\infty$），因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

完全类似，可证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$. 这只要注意到，对 $a>0$，$\exists N_1$，使得 $N_1\geqslant a$，当 $n>N_1$ 时，

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N_1}\cdot\frac{a}{N_1+1}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\frac{a}{n}.$$

有用的重要结果：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (0<q<1)$；　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$；　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^k}{n^\epsilon}=0\ (\epsilon>0)$，特别有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

例 9 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3(x+1)}{n^3+3^{(n+1)x}}$.

解 分情况讨论：

(1) 当 $x<0$ 时，则 $0<3^x<1$，于是 $3^{(n+1)x}\to 0(n\to+\infty)$，从而

原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+1}{1+\dfrac{3^{(n+1)x}}{n^3}}=x+1$；

(2) 当 $x=0$ 时，则 $3^{(n+1)x}=1$，故原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^3}}=1$；

(3) 当 $x>0$ 时，则 $1<x+1<3^x$，于是 $0<\dfrac{n^3(x+1)}{n^3+3^{(n+1)x}}<\dfrac{n^3 3^x}{3^{(n+1)x}}=\dfrac{n^3}{3^{nx}}$，由于 $3^x>1$，故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{3^{nx}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{(3^x)^n}=0,$$

所以由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(x+1)}{n^3+3^{(n+1)x}}=0.$$

综合以上得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(x+1)}{n^3+3^{(n+1)x}}=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ 1, & x=0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

4. 有界变量与无穷小量的积及两个重要极限的应用

例 10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解 $\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$，因为

$$\left|-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$$

有界，而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0(x\to+\infty),$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$，故是无穷小量. 因此，

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

解法一 因为 $\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\left[\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\left[1+\sin\dfrac{2}{x}\right]^{\frac{x}{2}}$，所以

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=\mathrm{e}.$$

解法二 用洛必达法则. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\xrightarrow{\text{令 }x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

5. 未定式的定值法

“$\dfrac{0}{0}$”型与“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型是最基本的未定式(可用洛必达法则来定值). “$0\cdot\infty$”型与“$\infty-\infty$”型可化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型. 另外还有“0^0”、“1^∞”及“∞^0”型未定式，后三种未定式都可通过取对数化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型来计算.