

《数理天地》丛书 主编：周国镇



历届希望杯

全国数学邀请赛试题详解

· 初中一年级 ·

“希望杯”全国数学邀请赛

命题委员会 编

HOPE

气象出版社

《数理天地》丛书 主编 周国镇

历届“希望杯” 全国数学邀请赛试题详解

初中一年级

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会 编

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题详解. 初一/周国镇主编. —北京:气象出版社,2002.1

ISBN 7-5029-3250-X

I. 历… II. 周… III. 数学课-初中-解题 N. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第067960号

责任编辑:黄丽荣 终审:周诗健

封面设计:彭小秋 责任技编:刘祥玉 责任校对:庚中

气象出版社 出版发行

(北京市海淀区中关村南大街46号 邮政编码:100081 电话:68406961)

北京市主史山印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/32 印张:7.5 字数:168千字

2002年1月第一版 2002年1月第一次印刷

印数:1~10000

ISBN 7-5029-3250-X/G·0947

定价:10.00元

出版前言

“希望杯”全国数学邀请赛自 1990 年开始举办,至今已经十二届了。第一届有 11 万名中学生参加,到第九届,每年的参赛人数都超过百万。12 届以来,参赛中学生累计超过 800 万。国内中学生学科竞赛活动,有如此大的规模,有如此众多的中学生参加,除“希望杯”之外,还没有第二个。这充分说明了“希望杯”在中学生中受欢迎的程度。中学生为什么喜欢参加“希望杯”?很重要的一个原因是题目出得好,出得漂亮,有较大的思维空间。“希望杯”命题委员会拥有国内第一流的数学竞赛方面的专家,他们精心地编拟了历届的试题。同学们正是通过做这些题,学习它们、研究它们,从而更扎实、更开阔地掌握了知识,增长了智慧和才干,使学习更有信心,成绩更出色。“希望杯”如同一把金钥匙,对每个参赛的中学生,它既开启了智慧之门,更开启了信心之门。这正是“希望杯”的魅力所在。

在中学任教的数学老师们,同他们的弟子一样也很喜欢“希望杯”——因为,从这个“杯”中,层出不穷,不断涌现出来的一个一个的问题,为改进自己的教学,带出高水平的学生提供了难得的素材和有益的启示。

为了让更多的中学生和他们的老师(尤其是没有参加过“希望杯”的),也能共享我们十余年来的智慧结晶,我们将第一届至第十一届的试题按初一、初二、高一、高二这四个年级分四册出版,供四个年级的师生分别使用。书中不当之处,请读者批评指正。

周国镇

“希望杯”命题委员会主任

2001 年 11 月 1 日

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会

- 主任** 周国镇 《数理天地》杂志社社长、总编
- 副主任** 周春荔 首都师范大学数学系教授
- 那吉生 中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员
- 余其煌 中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

初中一年级命题组成员

- 组长** 周春荔
- 成员** 王世坤 中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员
- 王 鸣 北京大学数学科学学院副教授
- 孙维刚 北京 22 中数学特级教师
- 金红梅 北京航空航天大学附中高级教师

希望杯数学邀请赛有
利于学生有利于教师
将促进中国数学教育
的发展

王寿仁
一九九〇年
五月

王寿仁：中国著名老数学家、原中国数学奥委会主席

寄希望于教育，
寄希望于青少年。

祝首届“希望杯”数学邀请赛
胜利举行

杨乐
1990年5月

肩負着祖國的希望，
迎接廿一世紀的到來！

龔昇

95年7月

龔昇：原中國科學技術大學副校長、著名數學家

青出于蓝而
胜于蓝，希望
寄托在年轻
一代身上。

梅向明

90.11.30.

梅向明：原北京师范学院院长、著名数学家、民进中央副主席

目 录

出版前言

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会

王寿仁、杨乐、龚昇、梅向明题词

试题及解答

第一届(1990年)	(1)
第一试	(1)
第二试	(9)
第二届(1991年)	(19)
第一试	(19)
第二试	(27)
第三届(1992年)	(36)
第一试	(36)
第二试	(42)
第四届(1993年)	(56)
第一试	(56)
第二试	(66)
第五届(1994年)	(78)
第一试	(78)
第二试	(86)
第六届(1995年)	(97)
第一试	(97)
第二试	(107)
第七届(1996年)	(120)

第一试.....	(120)
第二试.....	(128)
第八届(1997年)	(139)
第一试.....	(139)
第二试.....	(148)
第九届(1998年)	(160)
第一试.....	(160)
第二试.....	(171)
第十届(1999年)	(182)
第一试.....	(182)
第二试.....	(192)
第十一届(2000年)	(207)
第一试.....	(207)
第二试.....	(218)

试题及解答

第一届(1990年)

第一试

试 题

一、选择题 以下每题的四个结论中,仅有一个是正确的,请将正确答案的英文字母填在每题后的圆括号内.

1. 如果 a, b 都代表有理数,并且 $a + b = 0$,那么 ()

(A) a, b 都是 0. (B) a, b 之一是 0.

(C) a, b 互为相反数. (D) a, b 互为倒数

2. 下面的说法中正确的是 ()

(A) 单项式与单项式的和是单项式.

(B) 单项式与单项式的和是多项式.

(C) 多项式与多项式的和是多项式.

(D) 整式与整式的和是整式.

3. 下面说法中不正确的是 ()

(A) 有最小的自然数. (B) 没有最小的正有理数.

(C) 没有最大的负整数. (D) 没有最大的非负数.

4. 如果 a, b 代表有理数,并且 $a + b$ 的值大于 $a - b$ 的值,那么 ()

(A) a, b 同号. (B) a, b 异号.

(C) $a > 0$.

(D) $b > 0$.

5. 大于 $-\pi$ 并且不是自然数的整数有 ()

(A) 2 个. (B) 3 个. (C) 4 个. (D) 无数个.

6. 有四种说法:

(甲) 正数的平方不一定大于它本身;

(乙) 正数的立方不一定大于它本身;

(丙) 负数的平方不一定大于它本身;

(丁) 负数的立方不一定大于它本身.

这四种说法中,不正确的说法的个数是 ()

(A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 3 个.

7. a 代表有理数,那么, a 和 $-a$ 的大小关系是 ()

(A) a 大于 $-a$. (B) a 小于 $-a$.

(C) a 大于 $-a$ 或 a 小于 $-a$. (D) a 不一定大于 $-a$.

8. 在解方程的过程中,为了使得到的方程和原方程同解,可以在原方程的两边 ()

(A) 乘以同一个数. (B) 乘以同一个整式.

(C) 加上同一个代数式. (D) 都加上 1.

9. 杯子中有大半杯水,第二天较第一天减少了 10%,第三天又较第二天增加了 10%,那么,第三天杯中的水量与第一天杯中的水量相比的结果是 ()

(A) 一样多. (B) 多了. (C) 少了. (D) 多少都可能.

10. 轮船往返于一条河的两码头之间,如果船本身在静水中的速度是固定的,那么,当这条河的水流速度增大时,船往返一次所用的时间将 ()

(A) 增多. (B) 减少.

(C) 不变. (D) 增多、减少都有可能.

二、填空题

11. $0.0125 \times 3 \frac{1}{5} - \frac{1}{7}(-87.5) \div \frac{15}{16} \times \frac{16}{15} + (-2^2) - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. $19891990^2 - 19891989^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)}{2^{32}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 关于 x 的方程 $\frac{1+x}{4} - \frac{x-2}{8} = 1$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 4999 - 5000 = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 当 $x = -\frac{24}{125}$ 时, 代数式

$(3x^3 - 5x^2 + 6x - 1) - (x^3 - 2x^2 + x - 2) + (-2x^3 + 3x^2 + 1)$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 当 $a = -0.2, b = 0.04$ 时, 代数式

$\frac{72}{73}(a^2 - b) - \frac{71}{72} \cdot (b + a + 0.16) - \frac{1}{4}(a + b)$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 含盐 30% 的盐水有 60 千克, 放在秤上蒸发, 当盐水变为含盐 40% 时, 秤得盐水的重是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 克.

19. 制造一批零件, 按计划 18 天可以完成它的 $\frac{1}{3}$, 如果工作 4 天后, 工作效率提高了 $\frac{1}{5}$, 那么, 完成这批零件的一半, 一共需要 $\underline{\hspace{2cm}}$ 天.

20. 现在 4 点 5 分, 再过 $\underline{\hspace{2cm}}$ 分钟, 分针和时针第一次重合.

答·提示

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	D	C	B	D	D	C	A

提示:

1. 令 $a = 2, b = -2$, 满足 $2 + (-2) = 0$, 由此可排除 (A), (B), (D), 因此应选 (C). 事实上 $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$, 表明 a, b 互为相反数.

2. $x^2, 2x^2, x^3$ 都是单项式. 两个单项式 x^3, x^2 之和为 $x^3 + x^2$ 是多项式, 排除 (A). 两个单项式 $x^2, 2x^2$ 之和为 $3x^2$ 是单项式, 排除 (B). 两个多项式 $x^3 + x^2$ 与 $x^3 - x^2$ 之和为 $2x^3$ 是个单项式, 排除 (C), 因此选 (D).

3. 1 是最小的自然数, (A) 正确. 可以找到正有理数的无限序列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 没有最小的正有理数. (B) 也正确. 易知 -1 是最大的负整数, 所以 (C) “没有最大的负整数” 的说法不正确. 写出扩大自然数列, $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 易知无最大非负数, (D) 正确. 所以不正确的说法应选 (C).

4. 由于 $a + b > a - b$, 则 $b > -b \Rightarrow 2b > 0 \Rightarrow b > 0$, 选 (D).

5. 在数轴上容易看出: 在 $-\pi$ 右边 0 的左边 (包括 0 在内) 的整数只有 $-3, -2, -1, 0$ 共 4 个. 选 (C).

6. 由 $1^2 = 1, 1^3 = 1$ 可知 (甲)、(乙) 两种说法是正确的. 由 $(-1)^3 = -1$, 可知 (丁) 也是正确的说法. 而负数的平方均为正数, 即负数的平方一定大于它本身, 所以 “负数平方不

一定大于它本身”的说法不正确。即(丙)不正确。在(甲)、(乙)、(丙)、(丁)四个说法中,只有(丙)1个说法不正确。所以 选(B)。

7. 令 $a = 0$, 马上可以排除(A)、(B)、(C), 应选(D)。

8. 对方程同解变形, 要求方程两边同乘不等于 0 的数。所以 排除(A)。

我们考察方程 $x - 2 = 0$, 易知其根为 $x = 2$ 。若该方程两边同乘以一个整式 $x - 1$, 得 $(x - 1)(x - 2) = 0$, 其根为 $x = 1$ 及 $x = 2$, 不与原方程同解, 排除(B)。若在方程 $x - 2 = 0$ 两边加上同一个代数式 $\frac{1}{x - 2}$ 得方程 $\frac{1}{x - 2} + (x - 2) = \frac{1}{x - 2}$, 此方程无解, 失去了原方程 $x = 2$ 的根。所以应排除(C)。事实上方程两边同时加上一个常数, 新方程与原方程同解, 对(D), 这里所加常数为 1, 因此 选(D)。

9. 设杯中原有水量为 a , 依题意可得,

第二天杯中水量为 $a \times (1 - 10\%) = 0.9a$;

第三天杯中水量为 $(0.9a) \times (1 + 10\%) = 0.9 \times 1.1 \times a$;

第三天杯中水量与第一天杯中水量之比为

$$\frac{0.9 \times 1.1 \times a}{a} = 0.9 \times 1.1 = 0.99 < 1.$$

所以 第三天杯中水量比第一天杯中水量少了, 选(C)。

10. 设两码头之间距离为 s , 船在静水中速度为 a , 水速为 v_0 , 则往返一次所用时间为

$$t_0 = \frac{s}{a + v_0} + \frac{s}{a - v_0},$$

设河水速度增大后为 v , ($v > v_0$) 则往返一次所用时间为

$$t = \frac{s}{a + v} + \frac{s}{a - v}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{计算 } t_0 - t &= \frac{s}{a+v_0} + \frac{s}{a-v_0} - \frac{s}{a+v} - \frac{s}{a-v} \\
 &= s \left[\left(\frac{1}{a+v_0} - \frac{1}{a+v} \right) + \left(\frac{1}{a-v_0} - \frac{1}{a-v} \right) \right] \\
 &= s \left[\frac{v-v_0}{(a+v_0)(a+v)} + \frac{v_0-v}{(a-v_0)(a-v)} \right] \\
 &= s(v-v_0) \left[\frac{1}{(a+v_0)(a+v)} - \frac{1}{(a-v_0)(a-v)} \right].
 \end{aligned}$$

由于 $v-v_0 > 0, a+v_0 > a-v_0, a+v > a-v$

所以 $(a+v_0)(a+v) > (a-v_0)(a-v)$

因此 $\frac{1}{(a+v_0)(a+v)} < \frac{1}{(a-v_0)(a-v)}$

即 $\frac{1}{(a+v_0)(a+v)} - \frac{1}{(a-v_0)(a-v)} < 0$.

$\therefore t_0 - t < 0$, 即 $t_0 < t$. 因此河水速增大所用时间将增多,

选(A).

二、填空题

题号	11	12	13	14	15
答案	$6\frac{59}{225}$	39783979	1	4	-2500
题号	16	17	18	19	20
答案	$1\frac{1}{25}$	0.04	45000	$23\frac{1}{6}$	$16\frac{9}{11}$

提示:

$$\begin{aligned}
 11. \quad & 0.0125 \times 3\frac{1}{5} - \frac{1}{7}(-87.5) \div \frac{15}{16} \times \frac{16}{15} + (-2^2) - 4 \\
 &= \frac{1}{80} \times \frac{16}{5} + \frac{1}{7} \times \frac{175}{2} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} - 4 - 4
 \end{aligned}$$