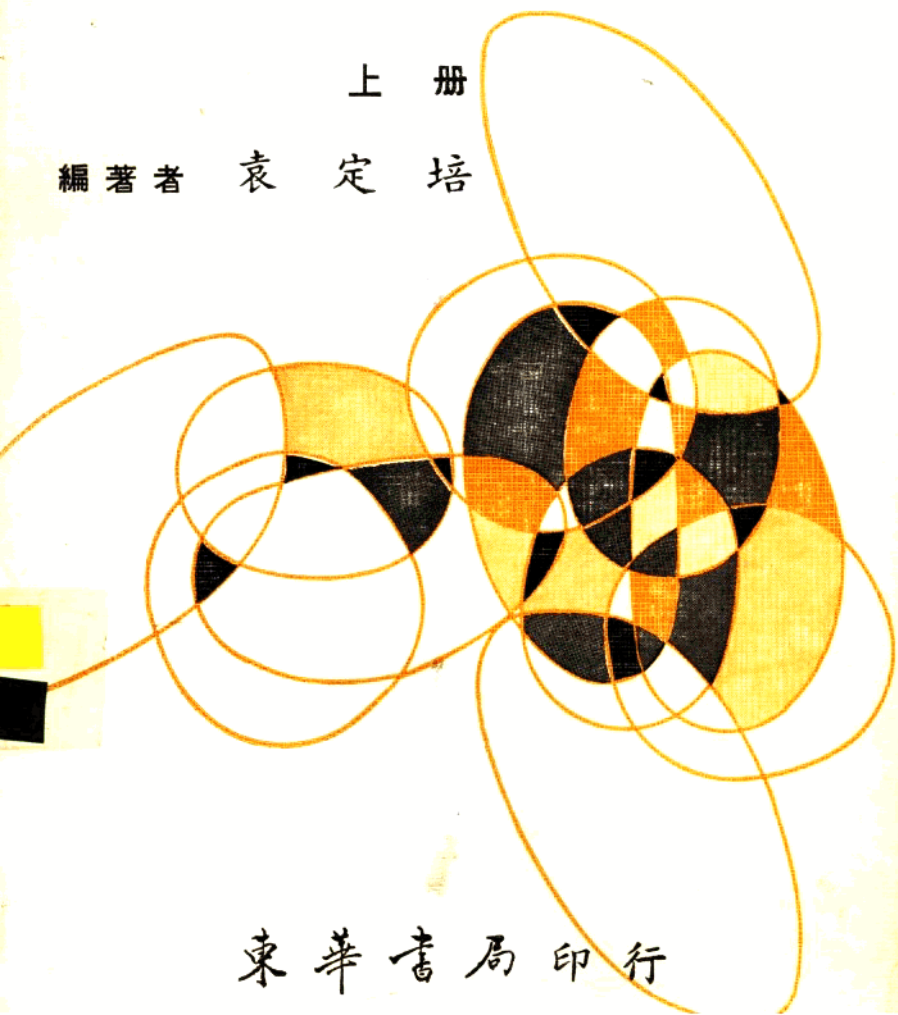


高等工程數學

上 冊

編 著 者 袁 定 培



東華書局印行

高等工程數學

上 冊

編 著 者

袁 定 培

東華書局印行

高等工程數學

下 冊

編 著 者

袁 定 培

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國五十八年十一月初版

中華民國六十七年十月六版

大學
用書 **高等工程數學** (全二冊)

上册 定價 平裝 新臺幣 玖拾元整
精裝 新臺幣壹百貳拾元整
(外埠酌加運費郵費)

編著者 袁 定 培
發行人 卓 鑫 森
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 中 臺 印 刷 廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(58004)

劉 序

民國五十三年，袁定培教授訪問美國加州大學，及加州理工學院，參與兩校力學研究，深感數學在近代工程研究上應用日廣而愈深，且國內又缺乏合適教本，是以在加州一年，工作之餘，即開始編撰此書，而筆者適亦講授同樣課程，獲得切磋機會。

工程數學教本內容每因作者而異，雖有若干“標準”教材，但深度和範圍也各不相同。袁教授認為目前國內一般學生，閱讀外文課本往往不如中文教材方便；外國工程數學書籍，多將應用問題納入實驗課程，並未加以特別注重；且市面流行原文教本亦各有短長，因此綜合取材，宜特別重視應用和舉例，由於機械，電機研究使用數學較多，加上作者十年教學經驗及心得，自然注重這兩類重要問題，但一般工程上的例子也能兼顧，習題固多，範圍亦廣。全書二冊，正適合國內學者需要。

中華民國五十七年九月

劉 炯 炎

加州大學

上 册 自 序

工程數學所包括之範圍，至爲廣泛，有關之原文書籍，亦甚繁多。欲求一包羅萬象，巨細靡遺者，殊屬不易，事實上，即令可能，勢將卷帙浩繁。故著者對於題材之取捨，莫不煞費周章，結果仍難免有遺珠之憾。爲儘可能包含各類重要課題，且不使篇幅過於累贅起見。本書決定分爲上下兩冊，足符二至三學期教學或參考之用。

有關工程數學之原文書籍雖多，而完善之中文課本，則極爲缺乏，但一般讀者因英文根柢較差，研讀時頗感吃力，故彌補是項缺點，亦爲本書編撰之主要動機。

本書編者對工程數學有十年以上之教學經驗及心得，深知學生心理及需要，對於各種工程及物理方面之應用問題(包括例題及習題)，蒐羅至爲豐富，闡釋下厭求詳，務使讀者能獲充分之了解，是爲本書之一大特色。

本書上冊共分九章，每章各有其獨立之特性，教師可斟酌學生之實際需要緩急，自行訂定講授之先後秩序。大致而言，第一、二、三、三章介紹常微分方程式之正規解法及一般應用，第五章則特別強調導致次階常微分方程式之機械及電氣系統之相似對應性，並求得其詳解及物理意義。此四章似以合成一組較爲適當。第四章之有限差分及差分方程式，係介紹數值分析之基本概念及方法，自另成一獨立課題。第九章之無限級數，如與第六章之符立爾級數合併講授，其效果當更顯著(但無此必要)。又符立爾積分，係由符立爾級數演變而來，而拉氏變換，則由符立爾變換式所導出，故按第六、七兩章之先後秩序排列，較爲合理。此外第八章之偏微分方程式，係繼常微分方程式以後之一獨立而極重要之題目。

2 高等工程數學

在本書中，編者常隨時摻以個人心得，例如第 6-7 節中循環函數之連續性，與其符立爾級數收斂速度之關係；第 7-8 節中奇特函數之應用；以及第 8-7 節中利用多次拉氏變換運算法，求解偏微分方程式等，頗具實用之價值。

本書二冊，適合大學及獨立工學院二至三學期工程數學教學及參考之用，需先對微積分，普通物理，及工程力學等具有穩固之基礎。根據作者之教學經驗，大學第一年微積分，普通物理及第二年上學期微分方程及工程力學修畢後，最早應在第二年下學期（或三年上學期）開授本課，較為適宜。此外本書因內容相當豐富深入，故亦能適合各工程研究所第一年工程或應用數學補充或參考教材之用。

本書承蒙現任美國洛杉磯加州大學工學院副教授，刻在成功大學擔任客座教授之劉炯炎博士撰序推介，編者深感榮幸。

本書編撰期間，曾請戴崇山先生編解單號習題答案（證明題不在內），許基財先生繪圖，並由內子玖君協助校對，小女小菁、美南等繕稿，通力合作，遂使上冊得以提前完成，特致謝意。

中華民國五十七年十二月

編者序於臺南市成功大學

劉 序

民國五十三年，袁定培教授訪問美國加州大學，及加州理工學院，參與兩校力學研究，深感數學在近代工程研究上應用日廣而愈深，且國內又缺乏合適教本，是以在加州一年，工作之餘，即開始編撰此書，而筆者適亦講授同樣課程，獲得切磋機會。

工程數學教本內容每因作者而異，雖有若干“標準”教材，但深度和範圍也各不相同。袁教授認為目前國內一般學生，閱讀外文課本往往不如中文教材方便；外國工程數學書籍，多將應用問題納入實驗課程，並未加以特別注重；且市面流行原文教本亦各有短長，因此綜合取材，宜特別重視應用和舉例，由於機械，電機研究使用數學較多，加上作者十年教學經驗及心得，自然注重這兩類重要問題，但一般工程上的例子也能兼顧，習題固多，範圍亦廣。全書二冊，正適合國內學者需要。

中華民國五十七年九月

劉 炯 炎

加州大學

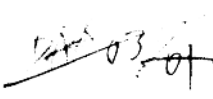
下 冊 自 序

本書所討論之各種課題，均具有完全之獨立性質，故其先後次序之排列，並無一定之準繩，讀者可視個人之實際需要，自行任意選擇順序，而不致影響研讀之效果，上下兩冊之區分，亦無特殊之意義，蓋因工程數學所包括之範圍太廣，資料浩繁，此舉亦不過為避免單本之過於累贅而已。

本書上下冊各有九章，下冊自第十章起，討論兩種以變數為係數之著名次階線性微分方程式之解答函數，前者為以無限乘方級數表示之貝索函數，後者則為有限項數之雷建德多項式，此等特殊函數在應用問題中極具重要性。第十一章之向量分析，是為工程數學中最重要課題之一，接下討論行列式及矩陣之性質，因其理論及應用方面資料較豐，故分別以十二及十三兩章予以敘述，較為均勻。此外下冊所餘亦即本書之最後五章，全部係介紹複變數函數之理論及應用，自可另成一組，第十四章先討論複變數之解析函數，第十五章為複平面內之積分法，第十六章論及複變數之無限級數，讀者在此可參照上冊第九章內所述實變數之無限級數，彼此大致類似，第十七章討論剩值理論及其各項應用。最後第十八章則介紹一極端重要之圖影或變換法，並附錄常用之變換圖表，以供讀者必要時之參考，其中尤以適合圖影法，在求解甚多工程及應用問題中所遭遇之二度拉氏方程式，使能適合已知之邊界條件時，最為簡便，並遠較其他以無限級數作為界值問題答案之方法為優。

本書上下兩冊，足供大學或獨立工學院修畢微積分以後，全部工程數學教材或參考之用。

民國五十八年九月編者序於臺南市成功大學

 103-61703/01

高等工程數學

上册目錄

第一章 首階常微分方程式	1
1-1 節 基本觀念及定義	1-2 節 可分離變數方程式
1-3 節 齊性微分方程式	1-4 節 恰當微分方程式
1-5 節 線性首階方程式	1-6 節 特殊高階微分方程式
1-7 節 應用問題	
第二章 常係數線性微分方程式	45
2-1 節 次階線性方程式之普遍性質	2-2 節 常係數齊線性微分方程式
2-3 節 常係數非齊性方程式	2-4 節 高階方程式
2-5 節 微分運號之解法	2-6 節 應用問題
第三章 聯立線性微分方程式	99
3-1 節 前言	3-2 節 消去法
3-3 節 聯立微分方程式之餘函數及特積分	3-4 節 應用問題
第四章 有限差分及差分方程式	122
4-1 節 函數之差商及差分	4-2 節 折中計算法
4-3 節 數值之微分和積分	4-4 節 差分方程式
4-5 節 微分方程式之數值解法	

2 高等工程數學

第五章 機械及電氣系統 182

- | | |
|-----------------|--------------|
| 5-1 節 前言 | 5-2 節 一度自由系統 |
| 5-3 節 機械平移系統 | 5-4 節 串聯電路系統 |
| 5-5 節 多度自由系統之分析 | |

第六章 符立爾級數及積分 248

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 6-1 節 前言 | 6-2 節 尤勒係數 |
| 6-3 節 普遍性之公式 | 6-4 節 半幅展開式 |
| 6-5 節 符立爾係數不用積分之求法 | 6-6 節 循環函數之連續性與其符立爾級數收斂速度之關係 |
| 6-7 節 其他形式之符立爾級數 | 6-8 節 應用問題 |
| 6-9 節 調諧分析 | 6-10 節 符立爾積分—符立爾級數之極限 |
| 6-11 節 由符立爾變換式演變到拉普拉斯變換式 | |

第七章 拉普拉斯變換運算法 345

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| 7-1 節 理論提要 | 7-2 節 線性定理, 以及微分, 積分式之變換 |
| 7-3 節 基本函數之拉氏變換公式 | 7-4 節 其他重要基本定理及公式 |
| 7-5 節 部分分數法或赫維賽德定理 | 7-6 節 循環函數之拉氏變換法 |
| 7-7 節 旋捲定理及杜漢默公式 | 7-8 節 奇特函數之應用 |
| 7-9 節 拉氏變換表 | |

第八章 偏微分方程式 443

- | | |
|-------------------------|-----------------|
| 8-1 節 引言 | 8-2 節 偏微分方程式之成立 |
| 8-3 節 波形方程式之第阿倫
伯氏解法 | 8-4 節 分離變數法 |
| 8-5 節 正交函數及其展開式 | 8-6 節 特殊之情況 |
| 8-7 節 拉氏變換運算之解法 | |

第九章 無限級數 558

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 9-1 節 引言 | 9-2 節 級數之收斂及發散性 |
| 9-3 節 級數之若干基本性質 | 9-4 節 積分測驗法 |
| 9-5 節 逐項比較法 | 9-6 節 比率較驗法 |
| 9-7 節 絕對收斂性 | 9-8 節 一致收斂性 |
| 9-9 節 乘方級數之性質 | 9-10節 泰勒公式 |
| 9-11節 積分式之級數表示法 | 9-12節 利用泰勒公式之概略
計算 |
| 9-13節 微分方程式之級數解
法 | 9-14節 次階微分方程式之級
數解法 |

【註】 本書全部單號習題答案，及中英文名詞對照表，均
列下冊附錄

高等工程數學

下 冊 目 錄

第十章	貝索函數及雷建德多項式	627
10-1 節	貝索方程式之級數解法	10-2 節 其他貝索方程式及函數
10-3 節	貝索函數之恆等公式	10-4 節 貝索函數之重要特性
10-5 節	貝索函數之正交性	10-6 節 貝索函數之應用
10-7 節	雷建德多項式	10-8 節 綜合雷建德函數
第十一章	向量分析	720
11-1 節	向量運算法	11-2 節 向量函數及其微分
11-3 節	梯度, 擴散率及旋捲率	11-4 節 線積分, 面積分及體積分
11-5 節	向量函數之積分定理	11-7 節 其他方面之向量用途
11-6 節	正交曲線坐標	
第十二章	行列式及矩陣	839
12-1 節	行列式	12-2 節 矩陣的基本性質
12-3 節	伴隨矩陣及反矩陣	12-4 節 矩陣之秩數及相當性
12-5 節	聯立線性方程式系統	
第十三章	矩陣續論	903
13-1 節	二次式	13-2 節 特性矩陣, 特性函數及特性方程式
13-3 節	矩陣之變換	13-5 節 凱雷—漢密爾頓定理和西爾維斯特公式
13-4 節	方陣之函數	
13-6 節	矩陣之無限級數	

第十四章 複變數之解析函數 970

- | | | | |
|--------|----------|--------|--------|
| 14-1 節 | 前言 | 14-2 節 | 複數 |
| 14-3 節 | 複數之幾何意義 | 14-4 節 | 複數之絕對值 |
| 14-5 節 | 複變數函數 | 14-6 節 | 解析函數 |
| 14-7 節 | 複變數之基本函數 | | |

第十五章 複平面內之積分 1023

- | | | | |
|--------|--------------|--------|----------|
| 15-1 節 | 前言 | 15-2 節 | 複平面內之線積分 |
| 15-3 節 | 高奇及其他有關公式和定理 | | |

第十六章 複變數之無限級數 1065

- | | | | |
|--------|---------|--------|---------|
| 16-1 節 | 複性級數 | 16-2 節 | 泰勒級數展開式 |
| 16-3 節 | 勞倫級數展開式 | | |

第十七章 剩值理論及應用 1101

- | | | | |
|--------|---------|--------|----------|
| 17-1 節 | 奇點及剩值 | 17-2 節 | 特殊定積分之計算 |
| 17-3 節 | 複性反積分公式 | 17-4 節 | 級數求和之應用 |
| 17-5 節 | 系統之穩定性 | | |

第十八章 圖影或變換法 1162

- | | | | |
|--------|------------|--------|--------------|
| 18-1 節 | 複變函數之幾何表示法 | 18-2 節 | 簡易基本圖影或變換法 |
| 18-3 節 | 線性分數變換法 | 18-4 節 | 普通函數之圖影或變換法 |
| 18-5 節 | 適合圖影或變換法 | 18-7 節 | 史瓦茲-克利絲托福變換法 |
| 18-6 節 | 應用問題 | | |

附 錄 1242

- | | | | |
|------|----------|------|--------|
| 附錄 1 | 常用變換或圖影表 | 附錄 2 | 單號習題答案 |
| 附錄 3 | 中英文名詞對照表 | | |

第 一 章

首階常微分方程式

(Ordinary differential equations of the first order)

1-1 基本觀念及定義

一可自由變化之數值，稱為自變數 (Independent variable) 隨自變數而決定其值者，稱為函數 (Function)，或因變數 (Dependent variable)。表達一函數及(或)其導數 (Derivative)，和自變數間相互關係之方程式，稱為微分方程式。

微分方程式，按其性質，可區分為下列數種：

(a) 僅包含一個自變數之函數，其有關之微分方程式，稱為常微分方程式。式中之導數，均係全導數 (Total derivative)。例如： $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$ ， y 為函數， x 為自變數。

(b) 凡包含兩個或更多自變數之函數，其有關之微分方程式，稱為偏微分方程式 (Partial differential equation)。其中之導數，均係偏導數 (Partial derivative)。例如： $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ， u 為函數， x 及 y 為自變數。

(c) 凡兩個或更多之函數或因變數，均隨一個自變數而變化時，其有關之微分方程式組，稱為聯立微分方程式 (Simultaneous differential equations)。例如：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 5x + \frac{dy}{dt} + 4y &= e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y &= 3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \text{ 及 } y \text{ 為函數, } t \text{ 為自變數。} \end{array}$$

此外，微分方程式又可按方次區分為兩大類：

(a) 線性微分方程式 (Linear differential equation)。其中所有之函數及其導數，均係一次方者。例如：

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \text{ 均爲常數。}$$

(b) 非線性微分方程式 (Non-Linear differential equation)。其中之函數及其導數，有高於一次方，或相互之乘積項者。例如： $y'' + 3y'y + 4y = 0$ 及 $y'' + \sin y = 0$ 均爲非線性，前者因有 $3y'y$ 項，後者則因 $\sin y$ 爲 y 之非線性函數。

微分方程式之階次 (Order)，係以該方程式內所包含之最高階次導數爲基準。例如：

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ 爲一四階線性偏微分方程式。}$$

由微分方程式所求出原函數及其自變數間之關係，是即該微分方程式之解答。

線性微分方程式之解法較易，且大部分均可以已知函數或級數表之。而非線性微分方程式，除特殊情形外，其一般解法，均極困難，且非普通之已知函數，所可表達，通常情形，僅能求出其約值而已。

一次微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 之解爲 $y = \int f(x) dx + C$ ， C 爲一任意之積分常數。

一般而言，微分方程式之獨立解答 (Independent solutions) 及其所包含任意常數之數目，等於其階次之數目，惟亦有例外之特殊情形。

例如：微分方程式 $\left| \frac{dy}{dx} \right| + |y| = 0$ 僅有之解答爲 $y \equiv 0$ ，而微分方程

式 $\left| \frac{dy}{dx} \right| + 1 = 0$ 則根本無解，故亦無任意常數。但以上二者均不能視

爲正規之微分方程式，亦無實際上之價值。又如一微分方程式之解 $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \cos 2x$ ，看似有三個解答及任意常數 a, b, c 。但若化成 $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c(\cos^2 x - \sin^2 x) = (a+c)\cos^2 x + (b-c)\sin^2 x = d\cos^2 x + e \sin^2 x$ 後，實際上只有兩個獨立之解 $\cos^2 x$ 和

$\sin^2 x$, 連同兩個任意常數 $d=a+c$, $e=b-c$, 因 $\cos 2x$ 可包含在 $\sin^2 x$ 及 $\cos^2 x$ 之內而非獨立之解。

以上所述 n 階微分方程式包含 n 個任意常數之解答, 稱為該方程式之通解 (General solution), 又如該微分方程式之任何解答, 均可由指定通解中之任意常數值以得之, 則此項解答, 又可稱為全解 (Complete solution)。

求出通解中之任意常數值, 使適合某項已知條件時, 吾人即可獲一特解 (Particular solution)。

凡不可能包含於通解內之解答, 被稱為奇解 (Singular solution)。

尋求特解之工作, 在應用問題中, 極具重要性, 此可於本書以後各章中詳論之。反之, 奇解在此類問題中, 極為罕見, 且亦無關重要。故微分方程式之通解及全解, 實具有相同之意義。

【例一】試證 $y=ae^{-2x}+be^{3x}$ 為微分方程式 $y''-y'-6y=0$ 之解; a, b 為任意常數。

$$\begin{aligned} \text{【解】 微分之後, 代入原式: } y' &= -2ae^{-2x} + 3be^{3x}, y'' = 4ae^{-2x} + 9be^{3x} \\ \therefore y'' - y' - 6y &= (4ae^{-2x} + 9be^{3x}) - (-2ae^{-2x} + 3be^{3x}) - 6(ae^{-2x} + be^{3x}) \\ &= 0a + 0b = 0 \end{aligned}$$

故此微分方程式, 可適合於任意常數 a, b 。

【例二】已知通解 $y=ae^x+b\cos x$, 求原微分方程式。

$$\text{【解】 } y=ae^x+b\cos x \quad (1)$$

$$\text{微分通解得: } y'=ae^x-b\sin x \quad (2)$$

$$y''=ae^x+b\cos x \quad (3)$$

$$(1)+(3): y+y''=2ae^x, \therefore a=\frac{y+y''}{2e^x} \quad (4)$$

$$(1)-(3): y-y''=2b\cos x, \therefore b=\frac{y-y''}{2\cos x} \quad (5)$$

$$\text{以(4), (5)代入(2)式: } y' = \left(\frac{y+y''}{2e^x} \right) e^x - \left(\frac{y-y''}{2\cos x} \right) \sin x$$

$$\text{故得: } (1+\tan x)y'' - 2y' + (1-\tan x)y = 0 \quad (6)$$

即為所求之微分方程式。

雖然(6)式是以(1)式作其通解之次階微分方程式, 但並非具有(1)式為解答之惟一微分方程式。例如將(3)式再微分兩次後, 即得: $y'''=ae^x+b\cos x$