

主 编 陆俭国 副主编 孙志诚 耿重光

电工产品可靠性

机械工业出版社

DIANGONG
CHAN PIN
KEKAOXING

DIANGONG
CHAN PIN
KEKAOXING

DIANGONG
CHAN PIN
KEKAOXING

可靠性技术是以概率论为理论基础、以数理统计为基本方法的一门新技术。产品可靠性是产品质量的一个重要组成部分,因此,开展产品的可靠性研究和应用工作,具有十分重要的意义。本书在阐述可靠性理论的基础上,讨论了几种典型电工产品的可靠性。

本书共分十章。第一章至第六章分别阐述了可靠性数学基础、可靠性特征量、可靠性统计、可靠性试验、可靠性抽样、可靠性设计等可靠性基础理论及基本知识,第七章至第十章结合电工产品分别讨论了电工产品的质量保证、电器的可靠性、电机的可靠性以及电力半导体器件的可靠性。

本书可供从事电工产品科研、设计、制造、试验及管理工作的技术人员使用,也可供电工产品使用部门的技术人员参考。本书还可作为电机、电器、电气技术等电工类专业的高等院校本科生及研究生的教学参考书。

电工产品可靠性

主编 陆俭国

副主编 孙志诚 耿重光

*

责任编辑:李振标 版式设计:冉晓华

封面设计:刘代 责任校对:王惠英

责任印刷:张俊民

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092¹/₁₆·印张15³/₄·字数384千字

1991年6月北京第一版·1991年6月北京第一次印刷

印数 0,001—7,000·定价:8.50元

ISBN 7-111-02730-2/TM·343

前 言

可靠性技术是50年代发展起来的,以概率论为理论基础、以数理统计为基本方法的一门新技术。它包括可靠性设计、可靠性制造、可靠性管理、可靠性试验以及失效分析等很多内容。产品的可靠性是产品质量的一个重要组成部分。一个控制系统或电力系统的可靠性在很大程度上取决于该系统中所用元件或设备的可靠性,如果元件或设备的可靠性不高,则系统的可靠性也就很难得到保证。随着各种系统的大型化,系统中所用元件或设备的数量不断增加,从而对元件或设备的可靠性提出了越来越高的要求。

可靠性研究始于电子元器件,一些工业发达国家对产品的可靠性十分重视,投入了大量人力、物力进行可靠性研究,取得了很大成效。“阿波罗”登月飞行等大型系统工程在事先都制订了周密而详尽的可靠性保证计划,这对工程的顺利完成起了决定性作用,从这里更可以看出可靠性技术的重要。

电工产品的品种繁多,各种高低压电器、中小型电机、大型电机、汽轮机、锅炉、变压器、电容器、电缆、电瓷、电力半导体器件等电工产品广泛用于各种自动控制系统和电力系统。所以提高电工产品的可靠性对于实现四个现代化起着重要作用。电工产品的可靠性研究工作起步较晚,但目前已有很多单位在积极开展这方面工作,并已取得了不少成效。本书对进一步深入开展电工产品的可靠性研究及应用工作将起一定的促进作用。

本书在绪论中对可靠性的基本概念作了简单的介绍,第一章至第六章分别阐述了可靠性数学基础,可靠性特征量、可靠性统计、可靠性试验、可靠性抽样、可靠性设计等可靠性基础理论及基本知识,第七章至第十章结合电工产品分别讨论了电工产品的质量、电器产品的可靠性、电机产品的可靠性以及电力半导体器件的可靠性。

本书由陆俭国教授、孙志诚高级工程师、耿重光教授级高级工程师、王梦龙高级工程师、李志刚及赵丕锦同志编著,蔡宣三教授任主审,陆俭国任主编,孙志诚、耿重光任副主编。

本书可供从事电工产品科研、设计、制造、试验及管理工作的工程技术人员使用,也可供电工产品使用部门的工程技术人员参考。本书还可作为电机、电器、电气技术等电工类专业的高等院校本科生及研究生的教学参考书。

清华大学蔡宣三教授对本书进行了深入细致的审阅,付出了巨大的精力,在此表示衷心的感谢。

由于编写时间短促,加以编者水平所限,书中不当和错误在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

1990. 5

目 录

绪论	1
第一章 可靠性数学基础	6
§ 1-1 集合	6
§ 1-2 概率基础	8
§ 1-3 失效密度函数及累积失效分布函数	16
第二章 电工产品可靠性特征量	20
§ 2-1 不可修复产品的可靠性特征量	20
§ 2-2 失效密度函数 $f(t)$ 、累积失效分布函数 $F(t)$ 以及可靠性特征量间的相互关系	25
§ 2-3 可修复产品的可靠性特征量	29
第三章 电工产品可靠性统计	30
§ 3-1 电工产品常见失效分布类型	30
§ 3-2 失效分布类型的确定方法	52
§ 3-3 可靠性特征量的估计	73
第四章 电工产品可靠性抽样检查	89
§ 4-1 概述	89
§ 4-2 抽样检查方案的分类	89
§ 4-3 抽样检查的基本理论	91
§ 4-4 我国国家标准GB2828及GB2829的使用方法、特点及其分析	99
§ 4-5 指数分布时电工产品的可靠性抽样	106
§ 4-6 威布尔分布时电工产品的可靠性抽样	113
第五章 电工产品可靠性试验	120
§ 5-1 概述	120
§ 5-2 可靠性筛选试验	121
§ 5-3 环境试验	123
§ 5-4 可靠性测定试验与可靠性验证试验	124
§ 5-5 可靠性寿命试验	126
§ 5-6 加速寿命试验	127
第六章 电工产品可靠性设计	136
§ 6-1 概述	136
§ 6-2 电工产品的可靠性预计	137
§ 6-3 电工产品的可靠性分配	146
§ 6-4 电工产品中机械构件的可靠性设计	149
§ 6-5 电工产品的可靠性技术设计	153
§ 6-6 电工产品的可靠性分析	160
第七章 电工产品的质量保証	171
§ 7-1 质量管理、质量保証与可靠性	171

	V
§ 7-2 电工产品制造与可靠性.....	173
§ 7-3 质量管理图.....	179
第八章 电器可靠性.....	188
§ 8-1 概述.....	188
§ 8-2 电器的可靠性指标及考核方法.....	190
§ 8-3 应用微机控制的电器可靠性试验装置.....	196
§ 8-4 电器产品的失效分析及提高产品可靠性的途径.....	203
第九章 电机可靠性.....	216
§ 9-1 概述.....	216
§ 9-2 电机的失效分布类型.....	217
§ 9-3 电机的抽样检查.....	217
§ 9-4 电机可靠性试验及试验数据处理.....	224
第十章 电力半导体器件可靠性	230
§ 10-1 概述	230
§ 10-2 电力半导体器件的可靠性指标及试验评估方法	234
§ 10-3 电力半导体器件的失效分析	239
附表	241
参考文献.....	245

绪 论

一、可靠性技术的发展历史及国内外概况

在近代科学技术突飞猛进的发展过程中,可靠性技术随着生产和科学技术的发展而产生,同时在不断地应用可靠性技术解决实际问题的过程中也促进了生产和科学技术的发展。产品的可靠性是指产品在规定的条件下及规定的时间内完成规定功能的能力。而可靠性技术就是指与产品可靠性有关的工程方法。在尚未明确提出可靠性技术以前,人们在谈到产品的质量时常用品的耐久性、寿命、稳定性、安全性以及可维修性等术语来表达,而这些术语与可靠性是密切相关的。可靠性技术已有几十年的历史,第二次世界大战中,电子设备大量用于军用装置,经常发现各种电子设备不能有效地投入使用。在50年代初期的一次战争中,这个问题暴露得就更为明显。美国的雷达设备在84%的时间内不能正常工作而处于待修状态。由于电子设备可靠性不高而使维修费用很高,这就促使美国开始重视可靠性问题,并着手进行调查、研究及试验工作,从而揭开了电子技术领域内可靠性研究的序幕。早期的研究重点放在电子管方面,在确定高寿命电子管的性能时,不仅重视其电气性能,而且也重视其耐振及耐冲击等性能。50~60年代是可靠性技术飞速发展的10年。美国国防部成立了各种可靠性研究组织。例如,1950年成立了AdHoc可靠性小组,1952年成立了AGREE(电子设备可靠性顾问组),1957年成立了ACGMR(AdHoc导弹可靠性委员会)等。在这些组织领导下大规模地开展了可靠性管理、分析及试验等方面的工作。同时,美国各有关技术协会及一些公司、制造厂也大量开展了可靠性研究工作。60年代后期发布了不少有关可靠性管理、组织、设计及鉴定等方面的标准,电子元器件及电子设备方面的可靠性技术渐趋成熟。70年代美国在可靠性研究方面逐渐深入到机械、电力、化工等其它领域。综上所述,在世界上从事可靠性研究方面,美国是开展得最早、范围最广、也最有成效的国家。此外,日本、英、法、苏联、联邦德国等国家也积极开展了可靠性研究工作,至今也已取得很大的成效。苏联不仅制订了不少可靠性基础标准,而且有不少产品已制订了可靠性标准或在产品标准中规定了可靠性要求及可靠性试验方法,同时还出版了不少可靠性方面的书籍及手册,如1985年出版了由乌沙柯夫(И. А. Ушаков)编写的《系统可靠性技术手册》等。

在电器方面,美国在1964年发布了《有可靠性要求的电磁继电器总规范》,日本在1980年也发布了《有可靠性要求的小型控制继电器通则》,苏联在继电器、接触器、控制器等电器产品的标准中也都规定了可靠性要求及可靠性试验方法,法国及联邦德国在有关产品标准中也规定了要用统计方法来确定小容量交流接触器的寿命。

在发电设备方面,美国西屋(Westinghouse)公司、通用电气(GE)公司、日本日立(Hitach)公司等均已规定了可靠性指标,北美电力可靠性学会制订的《发电设备可靠性统计评价规程》中提出了19项可靠性指标,1982年美国电气与电子工程师协会(IEEE)制订了“发电设备评价可用性名词术语”。美国西屋公司及通用电气公司还在发电设备关键零部件设计中采用了可靠性设计。

国内电工产品可靠性应用研究工作起步较晚,70年代末期开始对电力半导体器件的可靠

性进行了试验研究,80年代初对低压电器的可靠性开始进行研究,1981年河北工学院受原机械工业部电工局委托,举办了两期“电器新技术学习班”,其中主要内容之一就是电器可靠性。1983年成立了中国电工技术学会电工产品可靠性研究会,并相继召开了四届电工产品可靠性学术年会,在组织与推动我国电工产品可靠性研究方面起了很大作用,1986年河北工学院编写了我国第一本电器可靠性方面的专著《低压电器可靠性技术》。近几年来,机械电子部对机电产品的可靠性十分重视,1985年原机械工业部决定对机电产品限期考核可靠性指标,仪表作为第一批限期考核产品可靠性指标的产品。1986年原机械工业部发布了“关于加强机电产品可靠性工作的通知”,并公布了第二批限期考核可靠性指标的产品,1988年机械电子部发布了“关于公布机械工业第三批限期达到可靠性指标的产品的通告”,公布了第三批限期考核可靠性指标的产品,并发布了“机电产品可靠性指标考核管理办法”,其中规定:“对限期考核达不到规定指标的产品,给予半年至一年的可靠性改进时间,经复试仍达不到规定的可靠性指标的产品按可靠性不合格品论处,并登报公布,可靠性考核不合格的产品取消其产品评优以及申报企业上等级及质量管理奖的资格”。近几年内机械电子部还多次召开了可靠性工作会议,由于机械电子部对机电产品可靠性的重视,大大促进了我国电工产品可靠性应用研究工作的开展。

已在考核可靠性指标的前三批产品中,有17个型号的电工产品,它们是电磁式中间继电器、晶闸管、整流二极管、过电流继电器和起重用三相异步电动机等。在即将考核的第四批产品中有37个型号的电工产品,它们是通用继电器、交流接触器、快速中间继电器、电流继电器、电压继电器、小型中间继电器、低压异步电动机、起重和冶金用三相异步电动机、炼钢电弧炉、电阻炉及整流二极管等。在“八五”规划中限期考核可靠性指标的机电产品将达到数千种,其中包括相当多的电工产品。可以预见,在“八五”期间,我国电工产品的可靠性应用研究工作将得到进一步发展。

二、可靠性的定义

上面已指出,产品的可靠性是指产品在规定的条件下和规定的时间(或操作次数)内完成规定功能的能力。

首先,产品的可靠性与规定的功能有密切关系。所谓规定的功能是指产品标准或产品技术条件中所规定的各项技术性能。上述定义中的“完成规定功能”是指完成全部的规定的技术性能。

其次,电工产品的可靠性是与规定的条件分不开的。所谓规定的条件是指电工产品使用时的负载条件、环境条件以及贮存条件。显然,负载条件不同时电工产品的可靠性也不同。例如,电器触头接通与断开电流的大小、触头回路电源电压的高低都会影响到电器产品的可靠性;电机的负载电流大小也会影响到电机产品的可靠性。环境条件(如温度、湿度、海拔高度、盐雾、冲击、振动等)对电工产品可靠性的影响也很大。显然,在恶劣的环境条件下,电工产品的可靠性就低些。贮存条件对电工产品的可靠性也有影响。例如,因贮存条件不良而使电工产品受潮时,其可靠性就会降低。

最后,也是最重要的是产品的可靠性与规定的时间密切相关。产品在一天内完成规定的功能当然比在一年内完成同样的规定功能要容易得多,所以规定的时间越长,产品的可靠性就越低,亦即产品的可靠性随着其使用时间的增长而降低。

上述可靠性的定义只能定性地描述产品可靠性的高低。为了能定量地描述产品可靠性的

高低,下面引入可靠度的概念。电工产品的可靠度是指产品在规定的条件下和规定的时间内完成规定的功能的概率,一般用 R 表示。例如,某规格的接触器操作至 10^6 次时的可靠度为90%,就是指若多次抽取 n 个该规格的接触器,在规定的条件下操作至 10^6 次时,平均有90%的接触器能按规定的条件完成规定的功能。

三、产品可靠性与质量的关系

产品的可靠性是产品质量的一个重要方面。电工产品的质量应包括其技术性能指标和可靠性指标两个方面。这两者之间既有联系又有差别,假如产品的可靠性不高,即使其技术性能指标很先进,也不能认为产品质量好。例如,一台低压断路器的通断能力指标虽很先进,但其动作不可靠,当电路发生短路等故障时,它不能可靠动作因而可能扩大事故,这台低压断路器当然不能认为是质量好的产品。反之,产品的技术性能指标假如很落后,则即使其可靠性很高,也不能认为是质量好的产品。例如,一台低压断路器的通断能力很低时,即使其可靠性很高,电路发生短路故障时它能可靠动作,但它只能用于短路电流较小的场合,亦即其应用条件受到限制,这台低压断路器当然也不能算是质量好的产品。因此,对于一个高质量的产品来说,高可靠性与先进的技术性能指标是缺一不可的。

四、固有可靠性与使用可靠性

IEC300中指出:“产品在用户手中显示出的可靠性是对用户最有意义的可靠性”。产品在用户实际使用时显示出的可靠性称为工作可靠性 (Operational Reliability),它由固有可靠性 (Inherent Reliability) 和使用可靠性 (Use Reliability) 构成。固有可靠性是制造厂在产品生产过程中所确定的产品可靠性,它和原材料、零部件的选择、设计、制造、试验等方面因素都有密切关系,它是制造厂在模拟实际工作条件的标准环境下进行测定并必须予以保证的可靠性。使用可靠性是与产品使用有关的一些因素所确定的可靠性。产品在制造厂生产出来后,要经包装、运输、贮存及安装等过程才能投入实际使用,产品在实际使用过程中要受到周围环境、操作情况、维修方式及维修技术等因素的影响,在实际使用中人为因素对产品可靠性的影响也很大。上述这些因素确定了使用可靠性。

一个固有可靠性很高的产品如使用不当,其使用可靠性不高,则该产品的工作可靠性也就不理想。相反,一个固有可靠性虽不很高的产品,假如使用得当,其使用可靠性很高,则该产品的工作可靠性相应地可以提高。

五、失效规律

产品的失效率 $\lambda(t)$ 是指已工作到时刻 t 的产品在 t 时刻后的单位时间内发生失效的概率。人们对大量的试验数据和使用中所得到的数据进行统计分析,发现很多产品的失效率 $\lambda(t)$ 与时间 t 的关系曲线如图0-1所示。图0-1中曲线的形状像浴盆,故通常称为“浴盆曲线”。从曲线上可看出,产品失效率随时间的变化大致可划分为三个阶段,即早期失效期,偶然失效期与耗损失效期。

(1) 早期失效期 此时期出现在产品工作早期。其特点是产品失效率较高,但随工作时间的增加而降低。此时期内产品失效的原因是由于在设计及制造工艺上存在缺陷,例如,原材料有缺陷、生产工艺欠佳、生产环境卫生不良、生产设备发生故障、操作人员疏忽及质量检验不严格等。

(2) 偶然失效期 此时期内产品的失效是随机性的。其特点是产品失效率低且稳定,并接近于常数,此时期是产品的最佳工作时期。

(3) 耗损失效期 此时期出现在产品工作后期。其特点是产品失效率随工作时间的增加而明显增高。此时期内产品的失效主要是由于老化、磨损、疲劳等原因造成。

六、提高电工产品可靠性的重要意义

提高电工产品可靠性是提高电工产品质量的一个重要方面。电工产品的种类很多,它们广泛用于国民经济的各个部门,起着很重要的作用。但目前各种电工产品的可靠性不很理想,常因电工产品发生故障而使各种系统不能正常工作,从而造成很大的经济损失。特别是随着科学技术和工业生产的发展,自动控制系统的规模越来越大,一个大型的自动控制系统常用到几万甚至几十万个元器件,而系统的可靠性与它所用元器件的数量有密切关系。假设系统为一个可靠性串联系统(即整个系统中只要有一个元器件失效,就会使系统发生故障),则系统的可靠度 R_s 等于它所用各元器件的可靠度的乘积,即

$$R_s = \prod_{i=1}^n R_i \quad (0-1)$$

式中 n ——系统所用元器件的数量;

R_i ——各元器件的可靠度 ($i = 1, 2, \dots, n$)。

假定一个可靠性串联系统中所用元器件的可靠度均等于0.9999,则当 n 等于不同数值时按式(0-1)可算得系统可靠度 R_s 的数值,如表0-1所示。

表 0-1 系统可靠度 R_s 与所用元器件数量 n 的关系

n	100	1000	10000	100000
R_s	0.99	0.905	0.368	0.00005

由表0-1可以看出,随着系统中所用元器件数量的增加,系统可靠度迅速下降。假如要求在 $n=10^5$ 时保证系统可靠度为0.9,则要求每个元器件的可靠度应达到0.9999989。由此可见,系统越大时,对其所用元器件的可靠性的要求越高。

综上所述,提高电工产品的可靠性是国民经济发展的需要,它具有十分重要的意义。

七、可靠性技术的基本内容

前已指出,可靠性技术就是指与可靠性有关的工程方法。影响产品可靠性的因素很多,从确定产品可靠性指标、研究、试制、设计、制造、试验、鉴定直到投入使用为止的各个阶段都与可靠性密切相关,而且产品失效后对产品进行的失效分析也与产品可靠性密切相关。

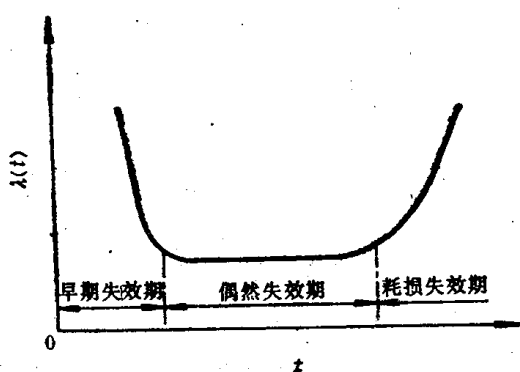


图 0-1 产品典型失效率曲线

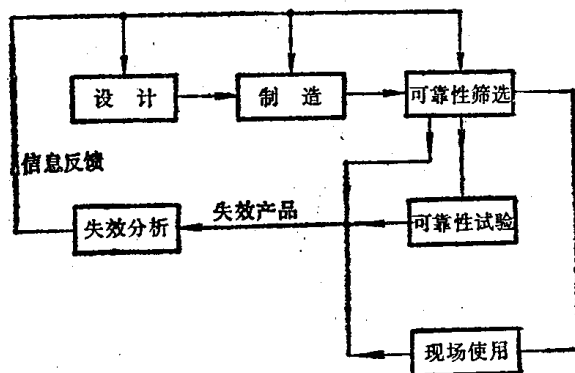


图 0-2 可靠性技术基本内容方框图

这是因为通过失效分析可以找出产品的失效模式与失效机理，把这些信息反馈给产品的设计、制造人员以及从事可靠性筛选试验的人员，从而可找到相应的改进措施来提高产品的可靠性。对于可靠性试验工作量较大或产品生产批量较小、价格较高的电工产品来说，对失效产品进行的失效分析尤为重要。

图0-2为产品可靠性技术基本内容的方框图。图中表示了从产品设计、制造、可靠性筛选、可靠性试验、产品现场使用以及对失效产品进行失效分析，并将所得到的信息反馈到设计、制造及可靠性筛选中去，以找到相应改进措施的全过程。

应该指出，产品的可靠性还与可靠性管理密切相关。要提高产品的可靠性，必须要有良好的可靠性组织及认真进行可靠性管理。

最后还应指出，产品的可靠性设计、可靠性试验时抽样方案的确定及试验结果的评估要用到排列组合、集合、特别是概率论等数学工具，即所谓可靠性数学。所以可靠性技术还与可靠性数学密切相关。可以这样说，概率论是可靠性技术的理论基础，数理统计是可靠性技术的主要方法。

本书在介绍可靠性数学的基础上，分别阐述了电工产品的可靠性特征量、可靠性统计、可靠性试验、可靠性抽样、可靠性设计、质量控制与质量保证，最后讨论了电器的可靠性、电机的可靠性以及电力半导体器件的可靠性。

第一章 可靠性数学基础

§ 1-1 集 合

一、集合的定义

集合是由一些数、一些点、一些图形或一些整式组成。每一组对象的全体形成一个集合(简称集),集合中的各个对象称为该集合的元素。例如,1, 2, 3, 4这四个数可组成一个集合,其中每个数都是此集合的一个元素,又如,2, 4, 6, 8这四个数也可组成一个集合。

二、集合的表示方法

(1) 列举法 把集合中的元素一一列举出来,写在花括号内。例如,{1, 2, 3, 4, }及{2, 4, 6, 8}。

(2) 描述法 把集合中的元素的公共属性描述出来,写在花括号内。例如,{小于5的正整数}及{大于零小于9的偶数}。

三、集合中元素的特征

(1) 确定性 对于给定的一个集合,其中的元素都是确定的。例如,对于集合{1, 2, 3, 4, }来说,1或2或3或4都是它的元素,而5与6等等都不是它的元素。

(2) 无序性 集合与元素的排列次序无关。例如,{1, 2, 3, }与{3, 2, 1, }表示同一集合。

(3) 互异性 集合中的元素不能重复出现,即集合中各元素互异。

四、集合的符号

集合常用大写的拉丁文表示,如A、B等。集合中元素通常用小写拉丁文表示,如a、b等。

假如a是集合A的元素,可称作a属于集合A,记作 $a \in A$ 。

五、子集

(1) 子集的定义 对于两个集合A和B,如A的任一个元素都是B的元素,则称A为B的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。读作A包含于B或B包含A。例如, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,则A就是B的子集。

(2) 空集 不含任何元素的集合称为空集,记作 Φ ,在集合论中规定,空集 Φ 是任何集合的子集。即对任一集合A,存在以下的关系: $\Phi \subseteq A$ 。

(3) 真子集 如A是B的子集,且B中至少有一个元素不属于A,则称A是B的真子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。例如,{1, 2, 3, }是{1, 2, 3, 4}的真子集。

六、交集

由所有属于A且属于B的元素组成的集合称为A与B的交集,记作 $A \cap B$ 。交集也可用图形表示,如图1-1所示。

图1-1a中A不是B的子集，B也不是A的子集，图中阴影部分表示A与B的交集；图1-1b中A是B的子集，图中阴影部分表示集合A，也表示A与B的交集。

例如， $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5\}$ 时， $A \cap B = \{3, 4\}$ 。

交集有下列性质：

$$A \cap A = A \quad (1-1)$$

$$A \cap \Phi = \Phi \quad (1-2)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1-3)$$

七、并集

由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合称为A与B的并集，记作 $A \cup B$ 。

例如， $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5\}$ 时， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。并集也可用图形表示，如图1-2所示。

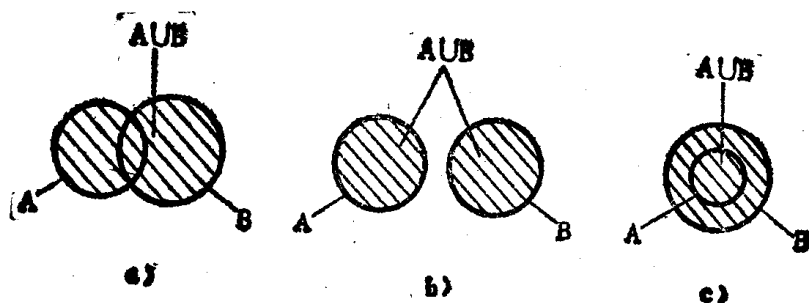


图 1-2 并集的图形表示

a) A与B有共同元素 b) A与B无共同元素 c) A是B的子集

图1-2中阴影部分表示A与B的并集。

并集存在以下性质：

$$A \cup A = A \quad (1-4)$$

$$A \cup \Phi = A \quad (1-5)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (1-6)$$

八、集合的差

一切属于A但不属于B的元素所组成的集合称为集合A与B之差，记作 $A - B$ 。例如，

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5\}$ 时， $A - B = \{1, 2\}$ 。

集合之差也可用图1-3中的阴影表示。

九、全集

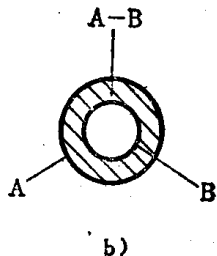
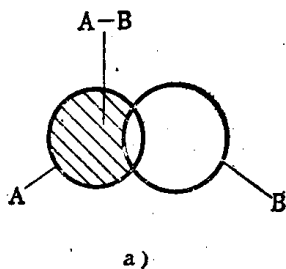
在研究集合与集合间的关系时，一般这些集合都是一个给定集合的子集，此给定集合称为全集，用符号I表示。全集I含有所研究的各个集合的所有元素。

十、补集

若已知集合A及全集I，则由I中所有不属于A的元素所组成的集合称为集合A在全集

I 中的补集, 用符号 $\bar{A}$ 表示。例如, $A = \{1, 2, 3\}$, $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$, 则 $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ 。

补集 $\bar{A}$ 也可用图形表示, 图1-4中的阴影部分即表示 $\bar{A}$



a)

b)

图 1-3 集合之差的图形表示
a) B 不是 A 的子集 b) B 是 A 的子集

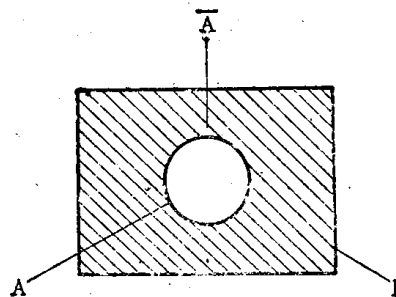


图 1-4 补集 $\bar{A}$ 的图形表示

补集有以下性质:

$$A \cup \bar{A} = I \quad (1-7)$$

$$A \cap \bar{A} = \Phi \quad (1-8)$$

$$\overline{\bar{A}} = A \quad (1-9)$$

式中 $\overline{\bar{A}}$ 为 A 的补集 $\bar{A}$ 的补集。

§ 1-2 概率基础

一、随机现象

某一现象如其结果事先不能肯定, 亦即在相同的条件下重复进行试验时, 其每次结果未必相同, 则这类现象称为随机现象。例如, 掷一个骰子时其出现的点数可能是 1, 也可能是 2, ……., 也有可能是 6。

对于随机现象, 虽然事先人们不能预言将出现那种结果, 但在大量重复观察时, 所得结果会呈现出某种规律, 这称为随机现象的统计规律性。

二、随机试验

在这里, 试验可以是指各种科学实验, 也可指对某一事物的某一特征的观察。试验可用符号 E 表示。例如:

E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H 或反面 T 出现的情况。

E_2 : 掷一个骰子, 观察出现的点数。

E_3 : 从一批产品中任抽一个产品, 观察它是合格品还是不合格品。

E_4 : 在一批继电器中任抽一个, 测试其寿命。

上述这些试验都具有以下特征:

- 1) 可以在相同的条件下重复地进行;
- 2) 每次试验的可能出现的结果不止一个, 并且能事先明确知道试验的所有可能的结果;
- 3) 进行某一次试验之前, 不能确定会出现哪一个结果。

我们将具有上述三个特征的试验称为随机试验，简称试验，并通过随机试验来研究随机现象。

三、随机事件

进行一个试验总有一个需要观察的目的，根据这个目的，试验被观察到有多种不同的可能结果。例如，抛一枚硬币时，如观察的目的是看它哪面向上，则可能有两种结果：“正面向上”或是“反面向上”。

试验的每一个可能出现的结果，一般称为随机事件，简称事件。

例1-1 在0, 1, ……，9这十个数字中任意选取一个数字，有多少种可能的结果？

解 共有十种可能出现的结果：“取出的数字是零”，“取出的数字是1”，……，“取出的数字是9。”

我们把不可能再分的事件称为基本事件，在例1-1中，“取出的数字是零”，“取出的数字是1”，……，“取出的数字是9”都是基本事件。

由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件。例如，在0, 1, ……，9这十个数字中任取一个数字为3的倍数，这就是一个复合事件，它由“取出的数字是3”，“取出的数字是6”及“取出的数字是9”这三个基本事件组成。

四、样本空间

为便于研究随机试验 E ，将 E 的所有基本事件所组成的集合称为 E 的样本空间，用符号 S 表示。例如，对于上面 E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 的样本空间 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 分别为

$$S_1 = \{\text{正面H向上, 反面T向上}\}$$

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$$

$$S_3 = \{\text{合格品, 不合格品}\}$$

$$S_4 = \{t | t \geq 0\}$$

引入样本空间后，随机试验 E 的基本事件即为样本空间 S 的元素， E 的复合事件即为 S 的若干元素组成的集合。

五、必然事件与不可能事件

(1) 必然事件 指在一定条件下必然发生的事件。如用集合表示必然事件，它即为样本空间 S 。例如，掷一个骰子其出现的点数不大于6即为一个必然事件。如用集合来表示此必然事件，当用描述法时为 $\{\text{出现的点数} \leq 6\}$ ，当用列举法时为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，根据样本空间的定义可知这个集合就是样本空间。

(2) 不可能事件 在一定条件下必然不发生即不可能发生的事件称为不可能事件。如用集合表示不可能事件，它即为空集 Φ 。例如，掷一个骰子其出现的点数为零即为一个不可能事件，显然，它不包含任何元素，因而是一个空集。

六、事件间的相互关系

设试验 E 的样本空间为 S 。 A 、 B 是 E 的事件，则这些事件间有以下关系：

1) 如用 C 表示“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的和事件，用符号 $A + B$ 表示，也可用并集的形式 $A \cup B$ 表示，即

$$C = A + B \quad (1-10)$$

或 $C = A \cup B \quad (1-11)$

和事件 C 也可用图1-5中的阴影部分表示。

例1-2 在0, 1, 2, …, 9这十个数字中任取一个数字, 如令“取出的数字为偶数”为事件A, “取出的数字大于7”为事件B, 试用集合来表示事件A与B的和事件。

解 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$B = \{8, 9\}$

$\therefore C = A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$

若用C表示“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件, 则称C为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件, 可写为

$$C = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k \quad (1-12)$$

或

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (1-13)$$

2) “事件A发生而事件B不发生”这一事件称为事件A与B之差, 记为 $A - B$, 它是与集合A与B之差相对应的。事件A与B之差 $A - B$ 可用图1-6中之阴影面积表示。

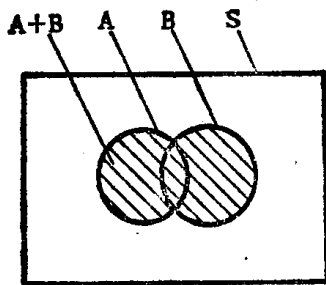


图 1-5 和事件的图形表示

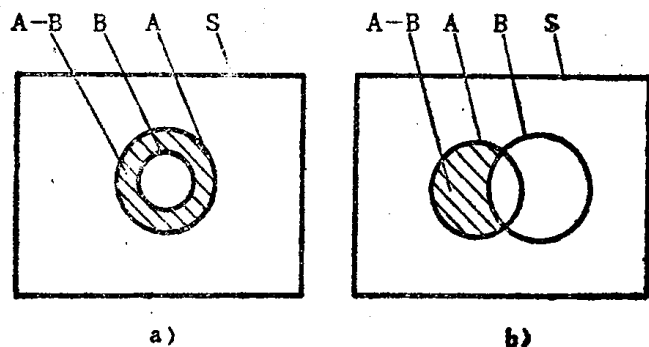


图 1-6 事件A与B之差 $A - B$ 的图形表示

a) B是A的子集 b) B不是A的子集

3) 如用事件D表示“事件A与事件B同时发生”这一事件, 则称事件D为事件A与事件B之积事件, 记作 AB , 它可用交集形式 $A \cap B$ 表示, 即

$$D = AB \quad (1-14)$$

或

$$D = A \cap B \quad (1-15)$$

事件A与B的积事件 AB 也可用图1-7中的阴影部分表示。

若D表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”这一事件, 则称D为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 之积

事件, 记作 $\prod_{k=1}^n A_k$, 即

$$D = \prod_{k=1}^n A_k \quad (1-16)$$

或用集合形式表示, 即

$$D = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k \quad (1-17)$$

4) 如果事件A与事件B不可能同时发生, 即A与B同时发生为不可能事件, 则称事件A与事件B为互不相容(互斥)。

显然, 各基本事件是互斥的。如用集合的术语来说, 若事件A与B互斥, 则集合A与集合B没有共同的元素。互不相容事件也可用图形表示, 如图1-8所示

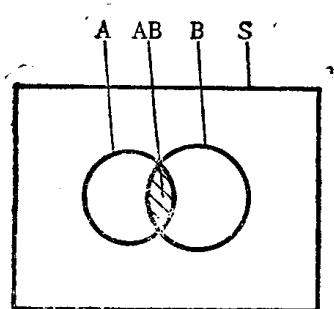


图 1-7 A与B的积事件AB的图形表示

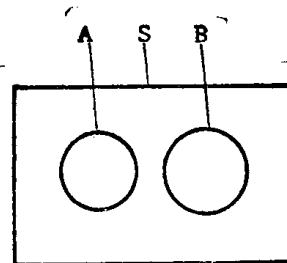


图 1-8 互不相容 (互斥) 事件的图形表示

若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件均互不相容, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容。

5) 若在试验中, 事件A与事件B中必然有一个发生, 且仅有一个发生, 亦即A与B满足下列条件:

$$A \cup B = S$$

$$A \cap B = \Phi$$

则称事件A与事件B互逆, 或称事件A是B的对立事件 (或事件B是A的对立事件)。若用集合的形式表示, 则为:

$$A = \bar{B} \quad (1-18)$$

或

$$B = \bar{A} \quad (1-19)$$

即A与B互为补集。

6) 若事件A发生时必然会导致事件B发生, 则称事件B包含事件A。从集合的角度来看, A是B的子集, 即 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。

若 $B \supset A$, 同时 $A \supset B$, 则称A与B相等, 记作: $A = B$ 。

由上可见, 概率论中事件间的关系和集合论中集合间关系存在一定的内在联系, 其对照关系如表1-1所示。

表 1-1 事件与集合的对照关系

记 号	事件及事件间关系	集合及集合间关系
S	样本空间, 必然事件	全集
Φ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	S的子集
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A发生导致B发生	A是B的子集
$A \cup B$	A与B至少发生一个	A与B的并集
$A \cap B$	A与B同时发生	A与B的交集
$A \cap B = \Phi$	A与B互不相容	A与B无共同的元素

根据表 1-1 可把对事件的分析转化为对集合的分析, 并可利用集合间的运算来分析事件间的关系。

七、事件的频率

一个随机试验有许多可能结果, 人们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大。例如, 一个电器产品工作到给定时刻能完成规定功能的可能性有多大? 因此, 我们希望能将一个随机事件发生的可能性大小用一个数字来表达。

下面来分析一个简单的例子, 即“抛硬币”这个随机试验。为了要知道正面H出现的可能性大小, 我们将硬币抛 n 次, 观察在 n 次试验中正面H出现的次数。有人将硬币连抛 5 次、50 次、500 次, 并各做 10 遍, 所得数据如表 1-2 所示。表中 n_H 表示在 n 次试验中正面H出现的次数, 比值 $\frac{n_H}{n}$ 表示在这 n 次试验中正面H出现的频率。从表 1-2 可以看出, 抛硬币次数较少时正面H出现的频率的差异较大, 但随着抛硬币次数的增多 (如 $n = 500$), 正面H出现的频率呈现出稳定性。

表 1-2

试验序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	n_H	$\frac{n_H}{n}$	n_H	$\frac{n_H}{n}$	n_H	$\frac{n_H}{n}$
1	2	0.4	21	0.42	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	34	0.68	258	0.516
9	3	0.6	26	0.52	262	0.524
10	3	0.6	36	0.72	247	0.494

抛硬币次数 n 较多时的试验数据见表 1-3, 从表 1-3 更能看出, 不管什么人去抛, 当抛硬币试验次数 n 增多时, 其频率 $\frac{n_H}{n}$ 总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5, 可见 0.5 这个数能反映出正面H的可能性的的大小。

表 1-3

试验者	n	n_H	$\frac{n_H}{n}$
甲	4040	2048	0.5070
乙	12000	6019	0.5016
乙	24000	12012	0.5005

一般说来, 如随机事件 A 在 n 次试验中出现了 n_A 次, 则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试