微积分

江苏师范学院数学系編著

江苏人民出版社

微 积 分

江苏师范学院数学系編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 一 号

江苏省新华书店发行　江苏新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 耗1/32　印張 16 1/16　字数 416,000

一九六一年二月第一版

一九六一年二月南京第一次印刷

印数 1—2,100

統一书号：13100·123

定价：(7)一元六角五分

本书是承江苏人民出版社委託而編写的一本适用于自学的微积分讀本。我系接受这一委託后，在党总支的领导下，决定采取集体討論、个人执笔的方式进行編写。在我系教材編輯委員会成員及有关教研組同志的联席会議上确定了这本书的編写計划后，由高国士同志执笔編写。初稿完成以后，又經分析教研組全体同志参与討論，提出意見，进行修訂；最后由几何教研組徐志鹏、安靜华二位同志繪制全部附图。

本书总的特点是为自学者服务，尽量結合生产实踐及物理現象，以期使具有高級中学数学知識（平面几何、立体几何、代数、三角学）及解析几何基本知識的讀者能无师自通。为了帮助讀者了解本书，以便于閱讀起見，現在把本书特点分六方面叙述于下：

（一）本书涉及的重要数学概念（如导数、微分、定积分等），尽量从物理、几何及生产实踐中的实例引出，迨归結到抽象阶段进行分析处理后，再結合較多的实际問題以巩固这些概念，使它們在实踐中得到应用。

（二）尽量采用直观因素使便于領会問題的关鍵所在（例如利用图形突出定理的条件与結論），概念的描述中也尽量运用直观性的描述，避免暂时不必要的抽象的繁瑣論証。

（三）行文接近口語化，力求深入淺出，通俗易懂。对数学概念的叙述，先用通俗的語言进行描述，經分析处理后，才用数学語言表达。

（四）为了便于自学，每章末附一指导性小結，分目的、要求、思考提綱三部分，前二部分的內容包括該章的編写目的，各节間的連系，对讀者的要求，重点所在及前后各章間的連系等。至于思考提

綱，讀者可以用来衡量自己是否完全了解本章的所有內容，如果发現有不够处，可随时补足。

（五）本书选有較多的例題，并将习題分为两部分。每章末載有較易的习題（附有答案），主要作为复习巩固該章內容之用。在每一大单元后（例如在第五、第七、第九、第十一章后）載有总习題，是較难的綜合性的习題（书后附有解答），使讀者把所学的知識綜合应用到实际問題中去。例題和两部分的习題曾經过有意識的配置，讀者如能滿足思考提綱的要求，領会例題的处理方法，完全可能解决每章后的习題。这部分习題，讀者必須完成十之七八，才能初步掌握本书內容。例題中也有一部分是为总习題設的，讀者經过前一部分习題的鍛炼，也有可能解决总习題。这部分习題要求稍高，讀者可量力而行，书末附有解答可供参考。

（六）本书中所叙述的概念，尽量不使和較高深的数学分析书中的概念发生本質上的矛盾（仅是程度上的深淺或缺乏理論性的証明），指出限于本书范圍不能証明的部分，介紹适当的参考书，使讀者进一步进修专业书籍时，一方面不致重起炉灶，造成浪費；另一方面，可以針对缺乏的地方作重点补充。惟在尙未学懂本书內容前，不必去找所指出的参考书。

本书在編写、討論、修訂过程中，虽力求做到上述六方面，但还是很不够的，特别在結合生产实踐方面缺乏經驗，而某些定理的証明，公式的导出（如第九章 §2 牛頓—萊不尼茲公式的証明及 §3 用参数方程确定的曲綫的弧长公式的导出等），为了照顾直观易懂，沒有采用严格的論証。是否妥当，希望批評和指教。

江蘇师范学院数学系

目　录

引　論

§1　微积分学的起源和发展

数学起源于生产实踐是大家公认的。在一定的經济基础上，随着技术进步引起的实际需要推动着数学的发展。早在公元前五世紀到三世紀，初等几何学基本上形成了。代数学成为一門科学是公元后八世紀的事。至于微积分学，直到十七世紀的七十年代才产生。

微积分学产生在十七世紀并不是偶然的。那时候，建筑的兴盛、河道堤坝的修建、造船事业等提出了要計算不同形状物体的面积、体积、重心、器壁上液体压力等靜力学的与流体靜力学的問題。与航海有关的天文学，这时已建立了行星椭圓軌道的理論，需要研究更完善的計算方法。"在这种情况下占首要地位的必然是最基本的自然科学，地球和天体的力学，与之并立而为之服务的是数学方法的发現与完成。"（恩格斯："自然辯証法导言"解放社1950年版第5頁）牛頓、萊不尼茲分别在1686年、1684年独立地发表了这方面的論文。

在整个十八世紀，微积分学的內容随着广泛的应用而充实起来，发展的迅速使得人們来不及檢查它的理論基础，甚至数学家自己有时也怀疑自己的运算根据，当然要遭到許多人的非难了。可是面对着它的广泛的实际应用，誰也不能否定这門年青的科学。同时它的理論基础也确实有缺陷，需要数学家們在这一方面努力。微积分学的理論基础到十九世紀才被完满地建立起来。首先苏联数学家罗巴切夫斯基在1834年給出了函数概念的現代定义，柯

西，波尔察諾給出現在公认的函数連續性的定义，建立了严格的极限理論，奠定了微积分学的理論基础。在这基础上，微积分学当然更进一步发展。直到現在，还是生气勃勃。无論在天文、气象、工程技术、物理、化学，甚至生物学上，微积分学都取得了广泛的应用。

誠如上面所叙述，微积分学在历史上的发展是迂迴曲折的。作为总結前人經驗，使后学者能簡捷地掌握这門科学的基本知識，在叙述中沒有必要走历史的老路；和絕大多数的苏联教本一样，本书的叙述是从基础理論开始的。特别結合着中学里已学过的函数、序列的极限，本书依次地叙述函数、极限、連續、导数、……，直到讲导数时才接触到牛頓发明微积分时考察过的对象——速度、加速度，及萊不尼茲当时考察过的对象——切綫的斜率，才密切地結合着实际問題。讀者在学习函数、极限、連續时，不要因为感到抽象空泛而信心不足，而是要耐性地学习下去，因为这些材料（特别是极限理論）就是解决实际問題的理論基础。

§2 微积分学研究的对象和方法

一般所称的初等数学是指算术、初等代数、初等几何、三角学，大体上是現在中学里数学科所学的內容。微积分学算是高等数学中的一門。这是习惯上的分类。事实上，我們不可能制定一个准則，根据它来区分哪些数学是初等的，哪些是高等的。就从习惯上所指初等数学来說，和微积分学比較起来确实有些不同，特别表現在研究的对象和方法两方面。讀者都是熟悉初等数学而剛开始学习微积分的，因此有必要談一下微积分学在这两方面的特点。

从研究的对象来說，初等数学研究的对象是不变的量或图形，而微积分学研究的是变量。在初等代数里，求一个給定的代数方程的解是去找出滿足这方程的常数；初等几何中所求的图形的面积、体积都是常量（不变的量），而微积分里常从質点运动的路徑和

时間相依的关系中去探求質点运动速度随时間变化的情况，以及从已知的速度和时間的关系中去找出質点所徑由的路程随时間变化的情况，总的說来是从相依关系中去研究变量的。

从研究的方法来說，在初等数学里，代数中所用的方法和几何中所用的方法是各自独立地成长着，沒有本質上的联系。但在解析几何里，笛卡儿坐标的概念使我們一方面能用代数式的运算証明几何定理，另一方面由几何概念的直观明显性容易建立新的理論。微极分学基本上承襲了这一方法，正如恩格斯所說"笛卡儿的变数是数学中的轉捩点，于是运动和辯証法进入了数学，于是必然地立即有了微积分。"特别是极限理論，它是微积分学的基础，更集中地体現着变量的运动和过程，体現着辯証法，因此在学习中不能局限在初等几何的思維方法中去理解极限概念。

本书所叙述的三个部分——导数、定积分、无穷級数，实質上是三种不同形式的极限过程。为了掌握它們，需要一定程度的极限理論知識。讀者在讀本书前面三章时要特别仔細、耐性，逐步掌握极限概念及其方法、运算，使此后学习能順利进行，并能运用所学到的知識到实际問題中去。

第一章 函 数

§1. 变量与常量

人們对自然界現象的认識常是逐步深入的，原始时期很可能凭直觉就能知道甲、乙两个物体中哪一个重些，哪一个輕些。至于輕多少？重多少？一直要制定了重量单位以后才明确起来，例如甲物体重3斤，乙物体重2斤，就能够很好地进行比較它們的重量了。物体的輕重，当制定了重量单位以后，就可以利用数字表达出来。**凡是能通过某种度量单位利用数字表达出来的东西都称为量**，显然，重量是一个量，其他如长度、面积、体积、温度、速度、力、功等都是量。**在数学中所考虑的量是从具体的量中抽去它的可能的物理意义后得到的数。**

在考察自然界現象时，在某一研究过程中有些量是保持着一定的数值（不变的），这种量称为**常量**，例如匀速运动中的速度；有些量是由于某种原因而变的就称为**变量**，例如自由落体的速度。在同一地方进行有关重量的研究时，重力加速度 g 是常量；当这一研究在很广泛的地区（例如包括赤道两极附近）进行时，重力加速度 g 随着地区而不同，应該看作变量了。这里說明有些量是随着研究情况的不同而有时是常量，有时是变量。但也有些量是始終是常量的，例如任何圓的圓周长和它的直徑的比值总是 π。

从数学上来說，常量与变量的区别主要看在某一运算过程中这个量是否保持不变。在解某一个二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，a, b, c 显然是常量，因为对某一个二次方程来說，a,b,c 是某一組特定的数，特别是在解这方程时，a,b,c 不能任意变动。当我們考察

所有具有实系数的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，a,b,c 可以在实数范圍里(以后简称实数域)变动，a,b,c 又看作变量了。

§2 集合、区間

变量在变动时，常有它变动的范圍，就是这变量所取的值的**集合**。集合这名称在这里是初次引入，但是我們不准备加以定义，因为这概念是非常广泛的，难以加以定义。事实上，它是把許多东西看成一个总体时的称呼，因此你高兴称它为“总体”也好，“类”也好，甚至称它为“一堆”也好。不过在数学上既已习惯地用了集合这术語，我們也就沿用这名称。組成集合的个别东西称为**元素**，例如1958年江苏省內建立的土高炉的集合，这集合的元素是各个土高炉；某一专区兴办的农业中学的集合，这集合的元素是各个农业中学。現在变量所取的值都是数，也就是变量所取值的集合的元素是各个数，这种集合称为**数集合**。由于以后所碰到的都是数集合，为簡便起見，就称为集合，例如实数集合，自然数集合等。又例如变量 $\sin x$ 所取的值的集合是 $-1,+1$ 間的所有的实数(包括 $-1,+1$ 本身)，因为不論 x 取什么值，$\sin x$ 的值总不会大于 $+1$ 或者小于 -1 的，也可以写成 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$。其实，这一类型的集合是最簡单的集合，因为如果用数軸上的点来表示这些数值时恰巧是从 -1 到 $+1$ 的一段綫段*。这一类型的集合，我們称它为区間，-1 和 $+1$ 称为**区間的端点**。区間的端点不一定属于这区間的。如果这区間的端点属于这区間的話，这区間称为**閉区間**。例如 $\sin x$ 所取值的集合是閉区間，用符号 $[-1,+1]$ 来表示。如果变量 x 在 $-1,+1$ 間取值，并不包括 $-1,+1$ 本身，也就 $-1<x<1$，这时端点 $-1,+1$ 并不属于这区間，我們就称这区間为**开区間**，用符号 $(-1,1)$ 来表示。

---

* 在0与1間的所有无理数的集合就不能用数軸上任何一个或几个綫段来表示。

一般說，如果 a,b 是二个实数，而且 $a<b$，变量 x 取适合条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全部实数值，这时就說变量 x 在閉区間 $[a,b]$ 上变化；用数軸上的点来表示时，可以用从点 a 到点 b 的綫段来表示，綫段的端点 a 和 b 都算在內，見图1的左边情况。

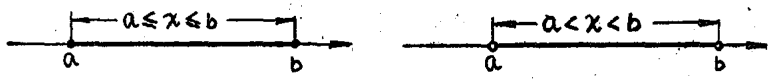

图 1

如果变量 x 取适合条件 $a<x<b$ 的全部实数值，这时就說变量 x 在开区間 (a,b) 內变化，也可以用从点 a 到点 b 的綫段来表示，不过端点 a 和 b 不算在內，如图1的右边情况（用 · 表示这一点也包括在內，用 ∘ 表示这一点不包括在內）。我們应該重視区間的閉或开，也就是端点是否属于区間本身。有时也会碰到一端开一端閉的区間。如果 $a\leqslant x<b$，則称变量 x 在区間 $[a,b)$ 上变化。如果 $a<x\leqslant b$，則称变量 x 在区間 $(a,b]$ 上变化。如果 $a\leqslant x$，則称变量 x 在区間 $[a,\infty)$ 上变化。如果 $x\leqslant b$，則称变量 x 在区間 $(-\infty,b]$ 上变化。如果 x 取任意实数值，也就是 $-\infty<x<\infty$，則称变量 x 在区間 $(-\infty,\infty)$ 上变化。用数軸上的点表示时如图2。

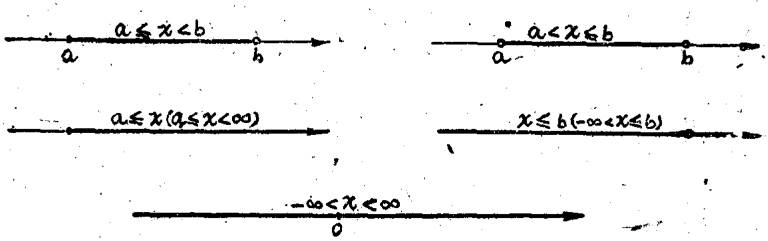

图 2

§3 絶对值概念，含有絶对值的基本不等式

絶对值的定义在中学代数課本里已讲过：一个实数 x 的絶对

值是这样的一个数：当 x 是正数或零时，它等于 x；当 x 是負数时，它等于 $-x$。从这定义可以看到不論实数 x 是正是負是零，这实数的絕对值总是一个非負数（正数或零）。通常采用 $|x|$ 来表示 x 的絕对值，那么，上述定义可以用下面的关系式表达

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如：$|-2| = 2$，$|3| = 3$，$|0| = 0$.

現在来談談絕对值的几何意义。我們知道在数軸上表示数值 3 的点是在原点的右方距离原点 3 个单位长的那个点；数軸上表示数值 -2 的点是在原点的左方距离原点 2 个单位长的那个点（見图 3）。数軸上的点都有确定的位置（在原点的左或右，距离原点多少个单位长），从而可以表示确定的数。至于某一个数的絕对值，在数軸上就是表示着这个数的点到原点間的距离，例如图 3，

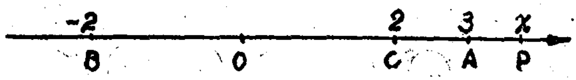

图 3

点 A 本身表示着数 3，点 A 到原点的距离，也就是 OA 的长度，表示着这个数 3 的絕对值；点 B 本身表示着数 -2，点 B 到原点的距离，也就是 OB 的长度（这里长度不取負数）表示着数 -2 的絕对值（$|-2| = 2$）。点 B 和点 C 在数軸上的位置是不同的，它們表示着两个不同的数 -2 和 2，这两点到原点間的距离是相等的 ($OB = OC$)，从而表示着这两个数的絕对值是相等的，也就是 $|-2| = |2|$。一般說，如果数軸上的点 P（見图 3）表示着某一个数 x，那么 OP 的长度就表示着 x 的絕对值 $|x|$。

如果变量 x 所取的值满足条件 $|x| < 2$，那么，变量 x 的值究竟在怎样一个集合上变化？这集合用数軸上的点表示时又怎样？从上面所介紹的絕对值的几何意义就容易知道，满足不等式 $|x| < 2$ 的数用数軸上的点表示时，这种点到原点間的距离是小于 2 的，

从图 3 可以看到綫段 BC 上的点除去端点 B, C 外都满足条件的，从而知这变量所取值的集合就是开区間$(-2,2)$，也就是变量 x 满足条件 $-2<x<2$。由此可知条件 $|x|<2$ 和条件 $-2<x<2$ 是完全一样的。我們有时候也称满足条件 $|x|<2$（或 $-2<x<2$）的点*形成了原点的一个邻域，这邻域的半徑是 2。一般說，满足条件 $|x|<a$ 的变量 x 的值的集合是开区間$(-a,a)$，同时条件 $|x|<a$ 可以改写成 $-a<x<a$，满足这条件的点形成原点的一个邻域，这邻域的半徑是 a。同样地，条件 $|x|\leqslant a$ 表示变量 x 在閉区間 $[-a,a]$ 上变化，这条件可以改写为 $-a\leqslant x\leqslant a$（图 4）。

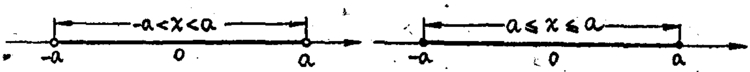

图 4

如果变量 x 所取的值满足条件 $|x-x_0|<a$，那么，情况又将怎样呢？我們还是利用絕对值的几何意义来处理。不失去一般性，我們不妨算作 $x_0>0$。从图 5 看到，

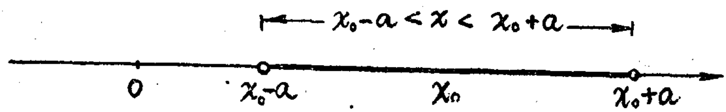

图 5

满足条件 $|x-x_0|<a$ 的点是数軸上和点 x_0 間的距离小于 a 的点的集合，显然就是开区間 (x_0-a, x_0+a)，也就是 $x_0-a<x<x_0+a$，也可以說这集合形成点 x_0 的一个半徑为 a 的邻域。同样地，在 $|x-x_0|\leqslant a$ 的情况，得到对应的閉区間 $[x_0-a, x_0+a]$ 和关系式 $x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$。（注意：在本书里邻域总是指开区間說的，所以在 $|x|\leqslant a$ 和 $|x-x_0|\leqslant a$ 情况下，我們不談邻域。）

---

* 由于数軸上的所有点和所有实数是成一一对应的（也就是每一个点对应着唯一的实数，每一个实数对应着唯一的点），所以我們敘述时常把点和数混同起来，看作完全等同的。