SHULI LUOJI YINLUN

数理逻辑引论

孙希文　编著

哈尔滨工业大学出版社

数理逻辑引论

孙希文　编著

哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第4号

内容简介

本书内容包括数理逻辑的两个部分：证明论、模型论。全书共分六章，讨论了一阶理论的语法语义、一阶理论的若干定理、一阶理论的特征问题、形式系统的一般理论、一阶理论的等价定义及模型论。每章后都配有一定量的习题。

本书可作为高等学校计算机软件、计算机及应用、数学专业本科生及研究生的教材或教学参考书，也可供有关专业的科技人员参考。

数理逻辑引论

孙希文 编著

哈尔滨工业大学出版社出版发行

新华书店首都发行所发行

黑龙江省绥棱县印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张15.25 字数350 000

1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷

印数1—3 000

ISBN 7-5603-0352-8/TP·31 定价：4.30元

前 言

计算理论和程序理论是计算机科学的两个重要的理论支柱，二者均与数理逻辑有密切关系。可计算性理论本身就是作为数理逻辑的四大分支之一的递归论的内容。逻辑程序设计语言基本上是数理逻辑的一阶语言。程序语言的形式语义学、程序设计方法学、软件工程学、程序自动生成和程序正确性证明等，从内容上看都是以数理逻辑中的证明论、模型论和公理化集合论作为其基础和工具，从方法上看都使用了形式化的典型数理逻辑方法。为了加强计算机系各专业学生的基础训练和逻辑思维能力的培养，本书是以严格的公理化和形式化的方法讲述数理逻辑的，其中包含了逻辑演算、证明论、模型论的基本内容。

本书第一章为数理逻辑的研究对象、历史及主要内容的简单介绍、形式理论的直观背景的说明。第二章用元数学的观点以严格的形式化的方法建立一阶理论，首先精确地定义了一阶语言的语法和语义，这是一阶理论的形成部分；然后引入公理和推理规则，给出了形式定理和形式证明的精确定义，构成了公理系统，推出了该系统的主要形式定理，这是一阶理论的推理部分。第三章给出了一阶理论的一些常用的重要定理及其详细证明。讨论了公式的析取范式、合取范式、前束范式问题。第四章为一阶理论的特征问题，给出了完全性定理、协调性定理及Herbrand定理及其证明，讨论了以引入定义符号的方法扩张一阶理论的理论及一个一阶理论在另一个一阶理论中的解释的理论。第五章研究了形式系统的一般理论，较详细地讨论了归纳算子及核算子的性质，也给出了一阶理论的各种等价定义，并以形式系统一般理论的观点统一了这些定义。鉴于计算机科学的发展愈来愈明显地显示出它与模型论的密切联系，本书第六章叙述了模型论的一些基本内容。

本书第一章至第四章可作为计算机系和数学系本科生数理逻辑课程的教材或教学参考书。第五、六章可作为相应专业研究生的教材或教学参考书。

本书在成书过程中，系统软件教研室王义和同志给予了极其热情的帮助，提出了许多宝贵的意见和建议，最后又详细审阅了原稿，对本书的形成和改进起了重要作用。此外，应用软件教研室王开铸、李光汉、洪家荣同志及系统软件教研室郭福顺同志也给予热情鼓励和支持，在此一并表示衷心感谢。

鉴于作者水平所限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

1991年5月

目　　录

第一章 引 论

§1.1 数理逻辑的简单历史及主要内容

逻辑是研究推理过程的规律的科学。数理逻辑则是用数学的方法来研究推理的规律，特别是数学证明的规律。数学方法，就是符号体系的方法，引进一整套符号体系，在其中表达和研究推理的规律。因此，数理逻辑又称为符号逻辑或理论逻辑。

一、数理逻辑的三个发展时期

1. 逻辑代数时期（1666—1880）

这个时期开始于Leibniz(1646—1716),完成于Boole(1815—1864)。通常认为数理逻辑是由Leibniz创立的。Leibniz是伟大的数学家，他精于几何，与Newton同时创立了微积分。他不满于Aristotle的形式逻辑，认为应当将形式逻辑加以改造，使之象数学那样精确严格。1677年Leibniz在给Golois的信中指出：新的逻辑学应有两点要求，一是直观，要象几何那样通过画图来进行证明；二是精确，要象代数那样利用公式来进行推演。他希望能建立一个普遍的符号语言。一个完整的符号语言又应该是一个思维的演算，他设想，根据这种演算，思维和推理就可以用计算来代替。遇有争论，双方可以把笔拿在手中说："让我们来算一下"，就可以解决问题了。符号语言和思维的演算是Leibniz提出的重要思想，也正是数理逻辑的重要特征。

Leibniz成功地将命题形式表达为符号公式，建立了科学史上最早的逻辑演算，从而奠定了数理逻辑的基础。

17世纪数学的发展已日益完善。通过用字母表示已知量和未知量及用符号表示运算，代数已达到完全符号化。解析几何产生了。人们已经可以用代数方法来描述和研究几何图形。这些成就为用代数方法研究推理提供了线索。

用代数方法研究推理，就必须把命题的形式结构用符号和公式来表达。把推理中前提与结论之间的关系，转为公式与公式之间的运算关系。这一点并不是轻而易举的。Leibniz一生中曾作过多次努力，又经过许多逻辑学家和数学家的工作，其后，由Boole，Schröder（1841—1902）和Löwenheim成功地用代数方法处理了演绎推理。

Boole是一位数学家，自学成才。1844年他发表了著名论文《关于分析中的一个普遍方法》；1847年发表了标志Boole代数已经成熟的名著《逻辑的数学分析》；1849年他被聘为爱尔兰考克皇后学院教授；1854年发表了《思维规律的研究》。

Boole的目的是构造一个演绎思维的演算。他的指导思想是逻辑关系和某些数学运算甚为类似，代数系统可以有不同的解释，把解释推广于逻辑，即可构成思维的演算。他的办法着重于外延逻辑，即类的逻辑。他相信头脑会允许我们作一些初等的推理规程，这就是逻辑的公理。他看到了类的演算可以解释为命题的演算。

与Boole同时，De • Morgan于1847年发表了《形式逻辑》一书和很多文章。开创了关系逻辑的研究。

在这一时期的后期，由于耶拿（Jena）的数学教授Gottlob Frege（1848—1925）的工作，数理逻辑的发展出现了一个飞跃。一方面，在纯逻辑的领域中，Frege引进了量词、变量和命题函数，使数理逻辑具备了完全的表达能力，给出了逻辑的公理基础；另一方面，他开辟了数理逻辑应用于数学基础研究的新方向。他的工作体现于几部重要著作：《概念演算》(1879)、《算术基础》(1884)、《算术的基本法则》(1893)之中。

2. 数理逻辑应用于数学基础的时期(1880—1930)

在这一时期中，研究的重点从形式逻辑转向数学，即研究数学本身的理论。促成这一变化是数学发展的结果。直接原因有下列几个方面。

(1) 非欧几何的创立

19世纪前半叶，俄国数学家罗巴切夫斯基（N.I.Lobachevsky，1793—1856）创立了非欧几何，打破了形而上学的空间观，大大推广了空间概念，从根本上改变了人们的几何观，这对数理逻辑和数学基础的研究有深远的、决定性的影响。

著名的希腊文明，在哲学和科学的领域内都达到了高度的水平。优美的“希腊思维”在Aristotle的形式逻辑体系中，得到了完整的概括和总结。Aristotle的形式逻辑极大地影响了几何学。伟大的数学家Euclid（前330—前275），根据几何对象的内在联系，依逻辑关系加以整理加以系统化，使几何学取得了高度抽象的形式，成为历史上第一门演绎科学。他撰写的《几何原本》，反映了希腊几何学的最高成就，在整个中世纪，与《圣经》一起成为销路最广的书籍，并且在相当长的历史时期内，成为传播几何知识的唯一书籍。

但是，从近代数学的观点看，Euclid的《几何原本》，在定义、公理、公设的处理上不够严格。例如大小概念、相等概念，是通过移动来定义的，但是移动本身却没有定义，移动的性质也未列举在任何公理、公设中；在长度、界限等概念的定义中，也用了一些本身仍需定义的概念等。

《几何原本》中的第五公设，不象其他公理、公设那样具有直观的明显性，因此，引起了人们的注意。第五公设是说：在同一平面内，二直线被另一直线所截，若在截线的一旁的两个内角之和小于二直角，则此二直线一定在这一旁相交。与之等价的命题是，在同一平面上过一已知点必能且只能作一直线平行于已知直线。许多人企图由其余公理、公设推导出第五公设，有些人宣布已经证出来，但在他们的证明中都用到与第五公设等价的命题。

直到1816年，Gauss发现了非欧几何，但未发表。Lobachevsky于1829年，Bolyai于1832年先后发现了非欧几何，其中Lobachevsky在这方面工作最多、影响最大。他们证明了：

①第五公设是独立的，即不能由其他公理、公设推导出来。

②除欧氏几何之外，还存在第五公设不成立的几何学。

第五公设不成立的几何就是非欧几何。第五公设的否定，在直观上是不易为人们所接受的，但非欧几何体系并没有发现矛盾。由此，人们看到，感性直观不能成为几何命题真假的根据，真假要靠证明，而且证明的概念本身要严格。另外，Lobachevsky证明非欧几何无矛盾性的方法，是用归结方法，即把非欧几何的无矛盾性归结为欧氏几何的无矛盾性。为要证明欧氏几何的无矛盾性，就需要建立证明一个公理系统无矛盾性的普遍方法。

为了证明Lobachevsky的结论和补充欧氏几何的严格性，同时也为了证明两种几何的并行不悖，在19世纪，以Hilbert为代表，掀起了研究几何基础的高潮。Hilbert于1899年发表了名著《几何基础》。该书第一次给出了一个简明全面的公理系统。在他的系统中强调了逻辑推理，讨论了公理系统的无矛盾性、完备性和独立性，给出了证明公理系统独立性的一般方法，及证明公理系统完备性的普遍原则。Hilbert发展了公理方法，使之由古典的实质公理学，发展为现代的形式公理学。

(2) 集合论和实数理论的研究促进了公理法的使用和发展

18世纪末，微积分学已经基本成熟，建立了各个分支。如级数理论、微分方程、微分几何、变分学等。而且在天文、力学、物理等领域得到了广泛应用。但微积分的基础本身还存在不少问题，如实数、变量、极限、连续、收敛等概念都不精确，都需要精确化、严格化。这就是微积分的奠基问题。

Gauss(1771—1855)、Cauchy(1789—1857)、Bolzano(1781—1848) 等人，用极限理论严格定义了连续、导数、积分等概念。Weierstrass(1815—1897)、Dedekind (1831—1916) 等，用有理数的集合来定义实数，从而把实数定义在算术的基础上，建立了以自然数为基础的严格的分析理论，问题归结到自然数理论的严格化。通过数学家的继续努力，皮亚诺公理于1889年发表。Frege的《算术的基本概念》一书用数理逻辑来证明算术，建立了科学史上第一个形式化的数学系统。

Cantor (1845—1918) 于1869年开始研究函数的三角级数表示。1872年，引进了一个点集的导出集的概念。1874年，他用一一对应的概念，证明了实数是不可数的。1878年，作为一种猜想，他第一次提出了连续统假设。1880年第一次提出了无穷序数。1883年，发展了他的超穷数理论。19世纪末20世纪初，在数学的奠基工作中广泛使用了集合论方法，集合论的思想渗透到所有数学分支。

1900年，巴黎第二次国际数学会，是数学史上具有重大意义的会议。这次会议，数学名家和逻辑名家群英荟萃。Hilbert在会上作了著名的“数学问题”的讲话。在两个世纪交替之际，他回顾过去，瞻望未来，列举出23个重要问题，他深信这些问题都能得到确定的结论：或者给出问题的具体解答，或者证明其解答为不可能。23个问题中的第一个问题是如何证明集合论中的连续统假设和良序定理；第二个问题是实数系统的相容性（协调性、无矛盾性）。第一个问题推动了集合论直至今日的发展，第二个问题正是证明论所要解决的问题。在这次会议上，H.Poincare宣称：“现在我们可以说：完全的严格性已经达到了”。大会上出现了一片乐观气氛。

但是，就在巴黎会议两年后的1902年，Russell发现了著名的悖论。这个悖论是由论证所有不以自己为元素的集合作成的集合是不是自己的元素的问题而引起的。无论肯定或否定的回答都会导致逻辑矛盾。这是在充满乐观气氛的巴黎会议之后出现于数学上空的一片乌云，许多数学家为之而震惊。Frege在他的“论数学基础”第二卷书后写道：“对一个科学家来说，没有一件事是比下列事实更为扫兴的了，即当他的工作刚刚完成的时候，突然它的一块奠基石崩塌下来了。当本书的印刷快要完成时，罗素先生给我的一封信也使我陷于同样的境地。”

在集合论中，设T为所有不以自己为元素的集合组成的集合，即$T=\{A \mid A\notin A\}$，或写为$A\in T$当且仅当$A\notin A$，问是否$T\in T$？若$T\in T$，则推出$T\notin T$。若$T\notin T$，则推出$T\in T$。这就是Russell悖论。容易看出，Russell悖论是在集合论中非常初等的概念上发生的。可见集论本身是有矛盾的。如何补救？必须使集合论本身严格化。

1900年后的十年间，Zermelo明确表述了选择公理并提供了一个集合论的公理系统。罗素表述了分支类型论。以后二十多年，Zermelo的集合论公理由Skolem、Frankel和Von Neumann等加以改进，逐步形成了著名的ZF集合论系统。Löwenheim和Skolem在谓词演算方面做了有意义的工作。

20年代初，Hilbert发表了如何论证数论或数学分析的协调性的计划，这是解决23个问题中的第二个问题的具体设想。这个证明计划包括以下几个步骤：

第一，把古典数学的某一基本理论，如数论、集合论或数学分析，严格形式化，加上逻辑演算，形成一形式公理系统，并形成表示该公理系统的形式语言系统。

第二，从不假定实无穷的有穷观点出发，建立一逻辑和初等数论系统作为研究形式语言系统的工具，这样的系统称为元数学或有穷逻辑。

第三，用元数学来研究形式语言系统的逻辑性质，特别是其中的证明，这就是“证明论”。证明论的目的是要证明某一形式系统不包含逻辑矛盾。

此后，Hilbert的证明计划起了巨大的作用。在他的影响下，Ackermann和Von Neumann在证明数论的相容性方面获得了部分结果。Hilbert定义了谓词演算形式系统的完全性。

3．数理逻辑发展的现代化时期（1930年到现在）

1930年开始，Gödel发表了一系列重要结果，开辟了数理逻辑的新纪元。1930年，Gödel发表了他的博士论文，证明了谓词演算系统的完全性。1931年，Gödel发表了著名的不完全性定理，证明了数论或分析或集合论的形式系统是不完全的，同时还证明了一个给定的形式系统的相容性证明需要用到系统外的证明方法。这些定理都给Hilbert的证明计划以致命的打击。1935年，Gödel获得了可构成集的概念，证明了集合论公理（包括选择公理）对它成立，并推测连续统假设对它也成立。1938年，Gödel证明了广义连续统假设不能被集合论公理否证，这是关于连续统问题的第一个重大成果。

在证明论领域中，除Gödel不完全性定理外，Gentzen于1936年提出了数论的相容性证明。对归纳定义和构造分析也进行了广泛的研究。

从Gödel不完全性定理得到：对任意给定的一个数论的形式系统，存在非标准模型。Skolem于1933年用一种新方法，得到了这样一个模型。1950年以后，逐渐形成了

模型论。非标准分析就是模型论获得的重要结果。用模型论来研究大基数，1960年前后，出现了Hanf数。此后，Scott证明了可测基数产生非可构成集。Morly证明了关于势的范畴性定理，该定理应用于代数问题。

1963年，P.J.Cohen对连续统假设的独立性的证明，给集合论的进一步发展以强有力的影响。他所创立的力迫方法有广泛的应用。除了用Cohen方法证明独立性结果以外，还出现了对集合论其他方面研究的高潮。如决定性公理、可构成集的结构、划分性质等。现在，连续统问题仍是人们颇感兴趣的问题。

1931年后，Gödel根据Herbrand的提示引进了一般递归函数的概念，Church和Kleene对一般递归函数作了重要的工作。1936年，Turing引进了一般机器的概念，就是著名的Turing机。一般递归函数和Turing可计算函数的概念，导致递归论和不可解问题的研究：不可解度、算术分层、超算术分层、序数上的递归函数、高阶递归泛函。1955年，解决了群的字的问题的不可解性。1970年，解决了Diophantus方程解的存在问题（Hilbert第十问题）的递归不可解性。

二、数理逻辑的内容

在数理逻辑发展的现代化时期，研究范围扩展到计算数学、抽象代数、数学分析。在研究方法上，广泛应用了群论、格论、范畴论方法及拓扑方法、紧致性方法、超积方法、力迫方法等强有力的工具。从而，形成了有内在联系的四大分支：证明论、模型论、递归论、公理化集合论，而作为它们共同基础的是逻辑演算。

1．证明论

证明论是把数学本身作为研究的对象，用以证明数学的相容性(协调性、无矛盾性、一致性)。由于它是以数学推理或证明作为研究对象，故称证明论。因为它以数学体系作为研究对象，也可说是关于数学的数学，所以又称为元数学。因为在证明论中广泛使用归纳定义和构造性方法，所以它往往和构造数学相联系。除数学系统的相容性而外，证明论还研究数学系统的完全性和不完全性，与此相联系的是数学问题的可判定性和不可判定性。

2．模型论

模型论产生于1915年，1950年以后逐渐形成系统的理论。它是研究形式系统与其模型(数学系统)之间关系的分支。它的方法是泛代数加数理逻辑。在它的研究中，广泛采用了超积方法、范畴方法、拓扑方法等。完全性定理表明，任一个相容的形式系统都有模型，而且可以构造一个标准模型，或Herbrand模型。对自然数的形式系统来说，标准模型就是通常的自然数系。但对于一个相容的形式系统，除标准模型外，还可以构造其他模型，称为非标准模型。非标准分析就是建立在自然数及实数的形式系统的非标准模型之上的。模型论应用于抽象代数的研究也取得了很多重要结果。特别值得提出的是模型论对于计算机科学的重要意义。形式语义学在很大程度上就是研究程序的形式系统的模型。抽象数据型的代数语义就是等式逻辑的模型。

3．递归论

递归论的研究范围很广，成果丰富，应用广泛。它的早期成果为递归函数及其等价的系统，如Turing机、λ-演算、Post系统、正规算法等，后发展为递归可枚举度、递归

分层、算术分层、超算术分层、高型递归泛函、序数上的递归函数等。我国胡世华教授创立了递归算法的理论，研究了泛代数上的递归函数。杨东屏教授在不可解度及序数上的递归函数的研究上作出了重要贡献。在国际上，半群的字的问题的不可解性、群的字的问题的不可解性、Diophantus方程的递归不可解性的证明，都是递归论应用于证明论而获得的重要成果。

4．公理化集合论

公理化集合论就是用公理方法建立集合论系统，也就是集合论的形式系统。比较著名的集论系统是ZF系统和GB系统。ZF系统是由Zermelo提出而由Frankel等加以改进的。GB系统是由Gödel和Bernags提供的。关于这方面的情况前面已有介绍，这里不再赘述。

三、数理逻辑的应用

1．在数学上的应用

在简史部分已谈过。

2．在计算机科学上的应用

数理逻辑是计算机科学的理论基础。这种观点已逐渐为计算机科学工作者，特别是理论计算机科学工作者所接受。

（1）在形式语义学、程序设计方法学和软件工程学等领域，广泛应用了经典逻辑、非经典逻辑和模型论。值得提出的是，我国的唐稚松教授集北美实用派和西欧抽象派之大成，创造出基于时序逻辑的软件环境系统，这是对计算机科学的重大贡献，也是使数理逻辑应用于计算机科学的典范。此外，周巢麈教授应用数理逻辑于并行理论的研究，也取得了重要成果。

（2）在逻辑程序设计方面，逻辑程序设计语言Prolog是基于一阶谓词逻辑的，函数式语言Lisp是基于λ-演算的，都直接来源于数理逻辑。现在仍在研究用非经典逻辑，如时态逻辑、模态逻辑等，构造新的逻辑程序设计语言。

（3）在数据库理论中，如演绎数据库、知识库等，都直接应用了数理逻辑方法。

（4）在程序的自动生成、自动转换等的理论和技术的研究中，都用了数理逻辑，如直觉主义逻辑、类型理论等。程序逻辑、算法逻辑已成为数理逻辑中有很强的生命力的组成部分。

（5）在形式语言理论、自动机理论、可计算性理论、计算复杂性理论等方面，有的本身就是数理逻辑的组成部分，如可计算性理论和Turing机理论，有的是用了数理逻辑的工具、方法或思想，如形式语言理论、有限自动机理论、计算复杂性理论等。

（6）在人工智能方面，也广泛应用了经典逻辑、非经典逻辑，如模态逻辑、时态逻辑、非单调逻辑等。

3．在形式逻辑上的应用

有两点值得提出。

（1）数理逻辑打破了形式逻辑的主宾式格式，谓词可表示关系，这样给严格表达科学规律，特别是数学的规律提供了方便。

(2) 量词的引入，使逻辑具备了完全的表达能力，这是形式逻辑不可能做到的。

由于数理逻辑的影响，形式逻辑也在改进，并且其研究领域在不断扩大。

§1.2 公理系统与形式系统

数学区别于其他科学的显著特点是它的规律只有加以证明才能被承认。感性直观只是启发人们发现问题和思考问题的手段，而不能成为判断数学规律成立的依据。Gödbach猜想尽管在观察和检验到的范围内都是正确的，但迄今未能证明，故只能是猜想而不是定理。相反地，满足哥西条件的微分方程的解的存在和唯一性，尽管在直观上人们无法观察和检验，但是已经被证明，所以成为尽人皆知、尽人皆信的定理。

虽然如此，但不能对所有的规律都加以证明，总要有些初始的规律是不加证明而被承认的，因为不存在证明它们的更加初始的规律。我们将某些初始的规律称为公理，它不需证明而被承认。由公理出发，按一定的逻辑推理规则推出的规律称为定理，推导的过程称为证明。

数学的概念要求有精确的定义。所谓定义，就是用已有的概念去规定新概念的含义，即揭示新概念的内涵。从而，总要有些初始的概念是不能定义的。因为不存在定义这些概念的更加初始的概念。我们将某些概念称为基本概念，对它们不予定义，即是不能定义的。用基本概念和已经定义的概念定义出的概念，称为导出概念。基本概念和导出概念、公理和定义组成的结构称为公理系统。公理系统可以是关于某一数学学科全体的，如平面几何、集合论，也可以是关于某一数学学科中一部分的，如实数理论。

公理学的发展经历了两个阶段。第一阶段是古典公理学或称为实质公理学，它是密切联系某种特殊对象的，称为公理的对象域。公理是关于这种对象的认识，表达这类对象的性质，而且有直观的明显性，如Euclid《几何原本》的公理就是实质公理。第二阶段是现代公理学，或称为形式公理学，他不要求先给定某种具体对象，它可以没有，也可以有多个对象域，它表示这些对象域的性质和关系，这些性质和关系限制了对象域的范围，也是系统中的演绎推理所必须的。群、环、域、线性空间、拓扑空间、范畴等的公理都是现代公理或形式公理。对于公理系统，要讨论下列三个问题：

1. 相容性（协调性、一致性、无矛盾性）。就是在系统中不能推出两个相反的命题。

2. 完全性（完备性）。就是系统中任一命题A，A与A的否定必有一个是该系统的定理。

3. 独立性。就是每个公理都不能由其余公理推导出来。

数理逻辑是把公理系统本身作为研究的对象，也就是作为研究的客体。为此，必须将公理系统严格形式化，把意义完全抽象掉，公理仅仅是一些选定的有穷的符号序列。推理规则视为符号串的变形规则，推理或证明视为符号串的变形过程，也就是满足一定条件的有穷符号行的有穷序列。定理当然也是符号的有穷序列。因为我们已经把内容或实质抽象掉了，只留下形式，故称原来的理论已经形式化了。公理系统不再是一些有意义的命题的体系，而是一些句子的体系，或符号的有穷序列的体系。句子是字的序列，字

是字母的序列。只是靠形式指出什么样的字的组合叫句，哪些句是公理，哪些句是其他句的直接后承。

我们对公理系统形式化时，还必须用特别的符号语言来重新构造所考察的理论，即把它符号化。这个新语言具有数学中符号体系的一般特征。使用了简单的符号记法，使得这些符号可以依照形式规则来处理，这是现代数学能够强有力地向前发展的重要原因。但是，在通常的数学中，只是部分地符号化及部分地形式化，因为叙述句中的一部分仍用字来表示，推理中仍有一部分是根据字的意义，而不是根据形式规则进行的。数理逻辑则要把数学理论完全符号化，严格形式化，把意义完全抽象掉，结果成了一个形式系统或形式体系，并把整个形式体系作为数学研究的对象，这种数学研究就称为元数学或证明论。形式体系称为对象理论，研究形式体系的理论称为元理论。对象理论只是一个没有意义的客体的体系。

我们对于形式体系的研究，包括形式体系的描述或定义，及关于形式体系的性质。形式体系的描述或定义包括两个部分，即形成部分和推理部分。形成部分的内容是建立形式系统的语言。这种语言是符号语言，所以首先要给出形式系统的基本符号，这些符号都是形式符号。形式符号的有穷序列称为形式表达式，或简称为表达式。表示形式理论所研究的数学客体的表达式称为项。为了得出所有的项，要有项形成规则，这种规则只有有穷条，即形成一个有穷的项形成规则集。表示数学客体的性质或教学客体之间关系的表达式称为公式。为了得到所有的公式，也要有有限条公式形成规则，形成一个有穷的公式形成规则集。推理部分要给出形式系统的公理和推理规则。公理是一些能表达数学客体的真实性质或数学客体之间真实关系的公式。当然，在形式系统中，已经抽掉了它的意义，这种性质和关系只是用公式的某种特殊形式来表达。推理规则是由一些公式推出某个公式的规则。它的抽象形式是由一个公式集和一个公式组成的序偶。序偶中第一分量是一个公式集，称为规则的前提；第二分量为一个公式，称为规则的结论。如果抽掉推理的意义，推理过程只是公式的变形过程，所以推理规则又称为变形规则。有了公理和推理规则，就可以给出形式证明和形式定理的定义。从而给出了由公理和推理规则得到所有定理的方法。

元理论是直觉的及非形式的，用自然语言来表示，也可引入数学符号，这些符号是直觉的，一般是用来表示形式符号的名字。元数学符号也称为语法符号。一个语法符号如果是作为特定的形式符号或形式表达式的名字，则称为语法常元，如果是作为任意的形式符号或形式表达式的名字，则称为语法变元。形式表达式中的任一部分，都可以用表示它的语法符号或语法符号组成的相应表达式来代替，也就是用它们的名字来代替。

总之，我们要区别三种不同的理论。

(1) 非形式的理论。就是通常的各种数学理论，它是形式理论的背景。

(2) 形式系统理论或对象理论。它是非形式理论形式化的结果。

(3) 元理论。它是用来研究形式理论的理论。

数理逻辑的相当重要的一部分内容就是由非形式理论抽象成形式理论，建立起形式体系，用元理论对形式理论进行研究。

§1.3 结构、关系结构和代数结构

为了给形式理论提供非形式理论的背景，我们引进非形式数学的几个抽象模型的定义。

定义1.3.1 一个结构A是一个三元组$(|A|, F(A), R(A))$，满足下列条件：

(1) $|A|$是一个非空集，称为A的区域或基础集。

(2) $F(A)\subseteq\bigcup\limits_{n\in\omega}F^{(n)}$，$F^{(n)}=\{f|f: |A|^n\to|A|\}$这里$\omega$为所有自然数作成的集合。

(3) $R(A)\subseteq\bigcup\limits_{n\in\omega^+}2^{|A|^n}$，$\omega^+$为所有非零自然数作成的集合。

(2)、(3) 中的$|A|^n$都表示$|A|$的n次直幂，即

$|A|^n=\underbrace{|A|\times\cdots\times|A|}_{n个}=\{(a_1, \cdots, a_n)\mid a_i\in|A|, i=1, \cdots, n\}$

$2^{|A|^n}$表示$|A|^n$的幂集。

$F^{(n)}$中的元素称为$|A|$中的n元函数，或n元运算。$F(A)\cap F^{(n)}$中的元素称为A中的n元函数或n元运算。0元函数称为常元或常量。

$2^{|A|^n}$中的元素称为$|A|$中的n元关系或n元谓词。$R(A)\cap 2^{|A|^n}$中的元素称为A中的n元关系或n元谓词。

$F(A)$称为A的函数集或运算集。$R(A)$称为A的关系集或谓词集。

定义1.3.2 一个结构A若没有运算集，即$F(A)=\phi$，则称为关系结构，记为$A=(|A|, R(A))$。关系结构也称为关系系统。

定义1.3.3 一个结构A若只有二元关系$=$，即$R(A)=\{=\}$，则称A为代数结构或代数系，记为$A=(|A|, F(A))$。这里省写了$=$。

若$f\in F(A)\cap F^{(n)}$，则可记为$y=f(x_1, \cdots, x_n)$，$x_1, \cdots, x_n$称为变元，他们都在$|A|$上取值。上式表示：当$x_1=a_1, \cdots, x_n=a_n$时，若$b=f(a_1, \cdots, a_n)$，则$y=b$。这里$a_1, \cdots, a_n, b\in|A|$。

设$g\in F(A)\cap F^{(m)}, f_1, \cdots, f_m\in F(A)\cap F^{(n)}$，$g$与$f_1, \cdots, f_m$的合成$g\circ(f_1, \cdots, f_m)$定义为：对任意$x_1, \cdots, x_n$有

$$
\begin{aligned}
&g\circ(f_1, \cdots, f_m)(x_1, \cdots, x_n)\\
&=g(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))
\end{aligned}
$$

易证：若h为$F(A)$中的l元函数，$g_1, \cdots, g_l$为$F(A)$中的l元函数，$f_1, \cdots, f_m$为$F(A)$中的n元函数，则

$$
\begin{aligned}
&(h\circ(g_1, \cdots, g_l))\circ(f_1, \cdots, f_m)\\
&=h\circ(g_1\circ(f_1, \cdots, f_m)\cdots, g_l\circ(f_1, \cdots, f_m))
\end{aligned}
$$

若$z=g(y_1, \cdots, y_m)$，$y_1=f_1(x_{11}, \cdots, x_{1n_1}), \cdots, y_m=f_m(x_{m1}, \cdots, x_{mn_m})$，则

$$z=g(f_1(x_{11}, \cdots, x_{1n_1}), \cdots, f_m(x_{m1}, \cdots, x_{mn_m}))$$

设p是一个n元关系，$(a_1, \cdots, a_n)\in|A|^n$，若$(a_1, \cdots, a_n)\in p$，则记为$p(a, \cdots, a_n)$称$a_1, \cdots, a_n$有关系$p$。这是一个命题。这样的命题称为基本命题或原子命题。若

$(a_1, \cdots, a_n) \notin p$，则记为$\neg p(a_1, \cdots, a_n)$，称$a_1, \cdots, a_n$没有关系$p$，这也是一个命题。这些命题都有确定的真假值。如果将$a_1, \cdots, a_n$换成变元$x_1, \cdots, x_n$，那么$p(x_1, \cdots, x_n)$不再是一个命题，因为$(x_1, \cdots, x_n)$可以在$|A|^n$中任意取值，真假不确定。$p(x_1, \cdots, x_n)$称为命题形式。当然$\neg p(x_1, \cdots, x_n)$也是命题形式。命题和命题形式都称为公式，$p(a_1, \cdots, a_n)$与$p(x_1, \cdots, x_n)$都称为原子公式。

§1.4 命题连接词和量词

上节引进了基本命题和原子公式。在自然语言中，经常用"与"、"或"、"非"、"如果…，则…"、"当且仅当"等词，把两个命题连接起来，或否定一个命题的陈述。对这些连接词，引进下列的符号表示：

$\neg$——称为否定词，读作"非"。若A是一个命题，$\neg A$称为A的逆或A的否定，读作非A。

$\rightarrow$——称为蕴涵词。若A、B是两个命题，$A \rightarrow B$读作"A蕴涵B"或"如果A则B"。

&——称为合取词，读作"与"。若A、B是两个命题，$A \& B$读作"A与B"或"A并且B"或"A且B"或"A和B"。$A \& B$称为A与B的合取式。

$\vee$——称为析取词，读作"或"。若A、B是两个命题，则$A \vee B$读作"A或B"，称为A与B的析取式。

$\leftrightarrow$——称为等价词，读作"当且仅当"。设A、B是两个命题，$A \leftrightarrow B$读作"A当且仅当B"，或"A的充分必要条件是B"或"A等价于B"。$A \leftrightarrow B$称为A与B的等价式。

把命题用命题连接词连接起来，就成了复合命题。这种连接可以视为命题的运算或演算。这些连接词也可以只用其中的几个而不全用，其他的用取定的连接词定义出来。

一个理论所讨论的对象的全体称为该理论的论域，论域中的元素称为个体。设p为一理论的论域中元素的一个性质，$p(a)$表示a有性质p，$p(x)$表示x有性质p，a是常元，表示论域中特定的个体，x为变元，泛指论域中任何个体。$p(a)$是一个命题，$p(x)$是一个命题形式。$\neg p(x)$也是一个命题形式，但它的意义不明确。是论域中任何元素都没有性质p，还是不是论域中元素都有性质p？二义性出现了。为了表示出"所有x、$p(x)$"，"所有x，非$p(x)$"，"非所有x，$p(x)$"，"存在x，$p(x)$"，"存在x，非$p(x)$"，"不存在x，$p(x)$"等命题，需要引进量词。有下列两个量词：

$\forall$——称为全称量词，读作"对所有的"。设A是一个命题，A涉及x，$\forall x A$表示对所有x，A成立。如上例中$\forall x p(x)$，表示对所有x，x有性质p，$\forall x \neg p(x)$，表示所有x都没有性质p，$\neg \forall x p(x)$，表示不是所有x都有性质p。

$\exists$——称为存在量词，读作"存在"、"有"等。设A是一个命题，$\exists x A$读作"存在x，使A成立"。上例中$p(x)$加存在量词后，得到$\exists x p(x)$，亦可得到$\exists x \neg p(x)$，$\neg \exists x p(x)$等有不同意义的命题。

设A是一个命题，则

$\forall x A$称为全称肯定判断；

$\forall x \neg A$称为全称否定判断；

$\exists x A$称为特称肯定判断；

$\exists x \neg A$称为特称否定判断；

$\forall x A$与$\neg \exists x \neg A$逻辑上等价；

$\exists x A$与$\neg \forall x \neg A$逻辑上等价；

$\forall x \neg A$与$\neg \exists x A$逻辑上等价；

$\exists x \neg A$与$\neg \forall x A$逻辑上等价。

$\forall x A$中，$\forall$后面的x和A中x的出现都称为约束的出现。同样，$\exists x A$中$\exists$后面的x和A中x的出现也称为约束的出现。在公式

$$\forall x(x=3) \vee \exists x(x<2) \vee x=5 \tag{1}$$

中，x有5个出现，第一、二个与第三、四个没有联系，但前四个都是约束的，第五个是自由的。

变元的自由的出现，可以用个体词代入，也可以作变元的替换。约束的出现可以作变元的替换，但不能用个体词代入。例如(1) 式可变为下式

$$\forall x(x=3) \vee \exists y(y<2) \vee \neg x=5$$

有了量词，数理逻辑的表达能力就完全了。

下面举几个自然语言符号化的例子。

“ϕ是空集”，写作

$$\forall x(\neg(x \in \phi))$$

两个集合相等的充分必要条件是它们包含的元素都相同，转换为

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x=y$$

在群中存在左单位元，且群的每个元素都有左逆元，转换为

$$\exists x(\forall y(x \circ y=y) \,\&\, \forall y \exists z(z \circ y=x))$$

任二自然数x、y，$x<y$，$x=y$，$x>y$，三者必居其一，转换为

$$\forall x \forall y(x<y \vee x=y \vee x>y)$$

在集合论中，S为所有不以自己为元素的集合作成的集合，转换为

$$\forall x(x \in S \leftrightarrow \neg x \in x)$$

理发师的规矩：“我为且仅为那些不为自己理发的人理发”。设p为二元谓词，符号$p(x, y)$表示x为y理发，a表示那位理发师的名字，则他的规矩可形式化为：

$$\forall x(p(a, x) \leftrightarrow \neg p(x, x))$$

荷兰的每个市恰有一个市长，且不同城市有不同的市长。有时市长可以不是该市居民。如果通过一条法律，指定一个市s专供那些非自己城市居民的市长居住，并强迫这样的市长居住在那里。该市的市长为a。