保险精算丛书

风险理论

鲍尔斯等 著 郑韫瑜 余跃年 译

上海科学技术出版社

内 容 简 介

本书介绍了几种主要的风险模型，包括短期个别风险模型，短期聚合风险模型，长期聚合风险模型。另有一章专门介绍各种风险理论的应用。各章后面都配有大量习题和参考文献，可供进一步研究之用。

本书适用于保险精算人员，及大专院校金融保险专业、统计专业、应用数学专业的教师、研究生、本科生。

N. L. Bowers, etal

Actuarial Mathematics

The Society of Actuaries

《保险精算丛书》

风 险 理 论

N.L.鲍尔斯 等 著

郑韫瑜 余跃年 译

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路460号）

常熟市印刷四厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 120 000

1995 年 11 月第 1 版 1998 年 11 月第 2 次印刷

印数 2 001—4 000

ISBN 7-5323-4143-7/O・194

定价 12.00 元

《保险精算丛书》前言

保险，作为商品社会中处理风险的一种有效方法，已被全世界所普遍采纳。在现代保险业蓬勃发展的进程中，科学的理论和方法，特别是精确的定量计算，起着十分重要的作用。保险业运营中的一些重要环节，如新险种的设计、保险费率和责任准备金的计算、分保额的确定、养老金等社会保障计划的制定等等，都需要由精算师 (Actuary) 依据精算学 (Actuarial Science) 原理来分析和处理。有鉴于此，许多发达国家都以法律形式规定，保险公司的营业报告必须由精算师签字方为有效。这也是国家对保险业进行调控管理的一种手段。

所谓精算学，实际上是将数学方法应用于金融保险所形成的一套理论体系。它的基础包括精算数学、利息理论、风险理论、人口数学、修匀数学、生存模型和生命表构造等等，还包括一些更专门的内容。这一套理论的重要性和正确性，已经得到国际社会的公认。

在我国，虽然早在 1949 年就由中央人民政府批准成立了中国人民保险公司，但是，由于种种历史原因，在相当长一段时间内我国的保险业发展缓慢，人才培养远不能适应实际需要。特别是精算学的研究和精算人才的培养，未得到应有的重视。在保险业的实际运作中，也很少严格按照精算学的原理办事。这一切都影响了我国保险业的进一步发展及与国际接轨。这种情况已引起保险界、教育界和学术界的注意，正在采取积极措施改变现状。刚刚颁布的《保险法》更明确规定：“经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。”在此情况下，迫切需要引进国际上先进的精算学

理论，并结合我国的实际加以应用，本丛书就是在这样的背景下翻译出版的。

《保险精算丛书》(第一辑) 是由复旦大学数学系、中国人民保险公司上海市分公司 (以下简称人保上海分公司) 合作翻译的，由上海科学技术出版社出版。全国政协副主席、中科院院士苏步青为丛书题写书名；复旦大学研究生院院长、中科院院士李大潜担任丛书主编；中国人民保险公司上海市分公司总经理何静芝、副总经理钱建中，上海市新闻出版局局长徐福生担任丛书总顾问。上海是我国保险业的发源地之一，历来是保险业的中心。成立于 1950 年的人保上海分公司，经过 45 年艰难曲折的发展，业务有了很大开拓， 1994 年已实现业务收入 30 亿元人民币，占上海保险市场的 80% 。根据市场的需要，公司已开办了财产、人身、责任、信用四大类约 200 多个险种。特别是作为公司主要业务之一的国内人身保险业务， 1994 年的业务收入已近 12 亿元。公司所开设的人身险种类也从 1982 年时的一种，扩展到各种形态的医疗保险、定期和终身保险及责任不同的各种人身意外伤害保险等多个品种，并逐步形成系列化。上海保险市场虽然在不断扩大，但竞争也日趋激烈。特别是一些实力雄厚的国际著名大保险公司的进入，促使国内各保险公司采取有力措施不断提高从业人员的业务素质，包括学习精算知识和培养精算人才。正是由于这样的需要，人保上海分公司决定与复旦大学数学系联手，在上海科学技术出版社的积极支持下，翻译了这套《保险精算丛书》。

复旦大学数学系不仅在数学的基础理论研究方面成就卓著，而且历来重视数学在国民经济中的应用，并取得多项重大研究成果。近年来，他们为了拓宽数学应用的领域，又开辟了精算学研究的新方向，并进行了大量的实际工作。他们在数学系研究生和本科生中开设了有关精算的课程和专题讨论，努力培养精算人才；他们还与各大保险公司合作，从事保险精算实际课题的研究，招收应用数学 (保险) 大专班，举办面向社会的保险精算培训班，培

训了一批人员参加 A.S.A (北美精算师学会准会员) 资格考试 (该项考试的上海考点就设在复旦大学内), 并于第一期考试中取得通过率超过 90% 的优异成绩。与人保上海分公司合作翻译这套《保险精算丛书》, 不仅是复旦数学系理论和实践相结合的一项新的举措, 也是他们面向社会培养国家急需的精算人才的重要措施。

"保险精算丛书" (第一辑) 共六本, 分别为:

《利息理论》, S.G. 凯利森 著, 尚汉冀译;

《风险理论》, N.L. 鲍尔斯 著, 郑韫瑜、余跃年译;

《精算数学》, N.L. 鲍尔斯 著, 余跃年、郑韫瑜译;

《人口数学》, R.L. 布朗 著, 郑培明译;

《修匀数学》, D. 伦敦 著, 徐诚浩译;

《生存模型》, D. 伦敦 著, 陈子毅译。

所依据的原书均是北美精算师学会 (Society of Actuaries) 为其准会员 (A.S.A) 资格考试所指定的教材和参考书, 具有一定的权威性。阅读这套丛书, 不论对读者了解和掌握精算学基本原理并应用于保险业实践, 还是对读者准备参加 A.S.A 资格考试 (该项考试在中国的北京、上海、天津、长沙等地已设有考点), 均会有很大帮助。

保险精算在我国是一项刚刚起步的新事物, 这套丛书是高等院校、保险公司和出版社三方共同合作, 编写翻译出版学术水平较高、填补国家缺门的专业书籍的一种有益的探索。我们热诚希望广大读者提出宝贵意见, 以利于我们改进工作, 做好这套丛书的出版工作, 促进保险精算事业在中国的发展。

编者谨识

1995 年 11 月于上海

目　录

第一章 保险经济学

§1.1 引 言

每个人对人生道路都有各自的计划和期望。然而，经验告诉我们，那些计划并不总能如愿以偿，它们有时会被偶发事件打扰，保险就可被用来应付随机事件导致的财物损失。

保险保障有某些基本的局限。首先，保险只能减轻随机事件引发的并能用货币度量的损失。其他损失也可能值得重视，但无法通过保险来弥补。例如，痛苦与磨难可能起因于随机事件，但其损失难以用货币来测度；财产损失如果系主人故意纵火所致，尽管损失很容易用货币确定，但鉴于起因是非随机事件，这种损失也是不可保险的。

其次，保险并不能直接降低损失发生的可能性，例如风暴保险不会改变破坏性风暴发生的概率。不过，设计良好的保险体制应鼓励防止损失的活动，假如一种产品保险鼓励对财产的破坏或引导生产者逃避工作，从而间接增大有害事件发生的概率，那是理所当然为社会公众利益所不容。

随机事件导致钱财损失的事例有：火灾或风暴引起的财产损失，因行为疏忽而被法庭判罚 (损害赔偿等)，料想不到的长期疾病所需保险开销及相应的收入减少，青壮年过早离开人世而留下对家庭或单位未竟的义务，或者老年人生存到其生活费来源耗尽之时，这些事例可用来阐明以下定义：

保险体制 (insurance system) 是能减轻随机事件所带来财务上不利影响的一种机制。

这里，将保险与其它体制相区别是有益的。银行的作用是收

进、投资及付出个人或企业的储蓄，储蓄机构的现金流入与流出也具有随机性，但与保险体制不同，储蓄所的支付并非基于不可控事件引起的钱财损失。

赌博倒是基于随机事件发生而进行支付的，但与保险体制形成鲜明的对照：保险体制被用来防御随机事件可能引起的经济上冲击，这种风险的存在独立于被保险者，是无法控制并希望规避的；而典型的赌博安排则确立按人为设计的事件发生进行支付的规则，参与者都主动寻求风险。像保险一样，赌博也涉及财富的再分配，然而两者的相似之处也到此为止。

以上讨论的保险体制含义较广，它涉及财产及人身价值范围的体制，既包括基于自主决策而参与的保险体制，也容纳作为就业或定居的条件而强制参加的保险体制。

一种保险体制在经济上的合理性在于，通过保险改善受意外事件打击的状况而增进公共福利，同时能通过鼓励个人或企业从事具有一定风险的活动而促进社会生产。如果没有保险，巨大损失的阴影会抑制那些风险事业的开展。例如海上保险的发展，就减轻了航海危险可能带来的财务影响。如果没有一种保险体制来弥补可能的海损，那么能使各方共同受益的外贸活动就会因承担的危险而失去不少潜在的参与者。

§1.2 效益理论

假如人们能预知每一个决策的结局，生活将变得单纯而乏味。决策往往基于某些偏好，我们并不具备完美的预见能力，至多只能在可能会导致某些结果的行动，或者可能导致另一些结果的行动中作出抉择。对于不确定情况下的决策，有一种精致的理论能提供这方面的见识，这种理论称为*效益理论* (utility theory) 。鉴于它与保险体制的联系，其要点将在后面概述。

面对不确定状况的决策问题，有一种解决办法是将期望值

看作一个经济项目的价值。按这个*期望值原则* (expected value principle) 决策时，各种可能结果的概率分布被一个数值所取代，这个数值就是以货币衡量的随机结果的期望值。这样，决策者为了从可能的损失中解脱出来，对于无论怎样的随机损失 X, 付出数额 $E[X]$ 就不会感到有差异；类似地，打算参与支付规则为 Y 的赌博决策者也情愿付出 $E[Y]$ 。在经济上，涉及货币支付的随机变量的期望值称为*公平值* (fair value) 或*精算值* (actuarial value) 。

多数决策者并不遵循期望值原则，对他们而言，其财富水平及可能结果分布的其它方面也影响决策。

以下例子显示了期望值原则对某些决策者的不适当性。设事故发生的概率都是 0.1, 无事故概率为 0.9, 三种损失金额不同的情形列表如下

情形	可能的损失 (元)		期望损失 (元)
	概率 0.1	概率 0.9	
1	10	0	1.0
2	1000	0	100.0
3	100000	0	10000.0

在第 1 种情形， 10 元损失一般是无关痛痒的，决策者也许不会愿意支付比期望值 1 元更多的钱以获得保险。然而在第 3 种情形， 100000 元的损失则可能是灾难性的，决策者可能愿意支付比期望值 10000 元更多的钱来换取保险。

我们现在来考虑另一种途径，以解释为何有些决策者情愿支付比期望值更多的数额。首先假定，一个决策者的效益系之于按货币衡量的财富 w, 而且可用一个函数 $u(w)$ 表示，这个函数称为*效益函数* (utility function), 设决策者的财富为 200000(元), 由于线性变换

$$u^*(w) = au(w) + b, \qquad a > 0$$

产生一个本质上与 $u(w)$ 等价的函数 $u^*(w)$, 通过适当选取 a 与 b, 总可以使得 $u(0)=-1$, 及 $u(200000)=0$, 参见图 1.1 。

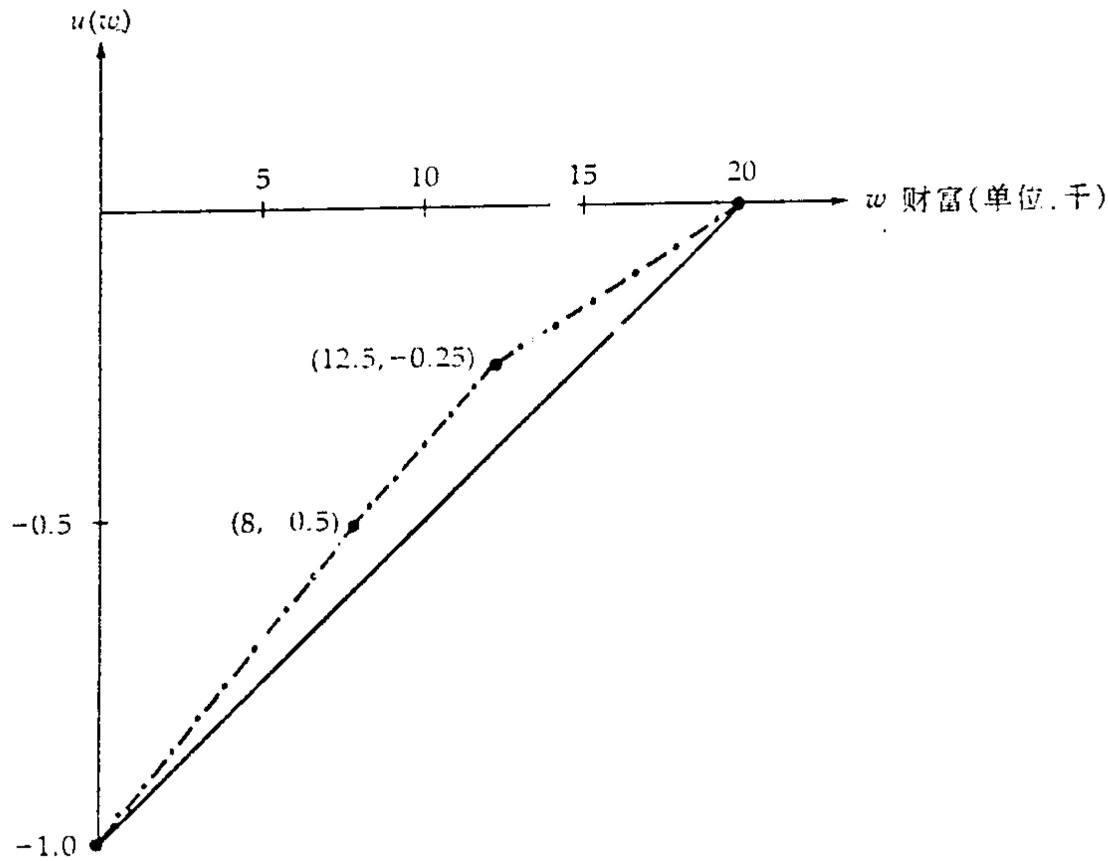

图 1.1　效益函数

为决定效益函数的其它值，设想决策者面对概率为 0.5 的全部 200000 元损失，其财富保持 200000 元不损失的概率亦为 0.5, 那么该决策为完全保险而愿意支付的最高金额 G 应该满足

$$
\begin{aligned}
u(200000-G) &= 0.5u(0)+0.5u(200000)= \\
& 0.5(-1)+0.5(0)=-0.5
\end{aligned}
$$

如支付了金额 G 而进行全额保险，则无论损失是否发生，财富将保持 $200000-G$, 上式左端就是采取了支付 G 而完全保险的策略的效益。假如它大于右端的期望效益，那么决策者也会愿意支付比 G 略高的金额以获得保险；假如它小于右端的期望效益，那么决策者不会愿意支付 G 来换取保险的，因此上面等式成立。

设决策者为完全保险愿意支付的最高金额 $G = 120000$, 于是

$$u(80000) = u(200000 - 120000) = -0.5,$$

在图 1.1 中相应于点 $(80, -0.5)$.

这个过程可用来增加更多的点 $[w, u(w)]$, $0 \le w \le 200000$, 以便获得财富效益函数令人满意的逼近。对于 $0 \le w_1 < w_2 \le 200000$, 一旦 $u(w_1)$ 与 $u(w_2)$ 已确定，一个新的点可通过向决策者提出以下问题而确定：设想面对财富损失后为 w_1 与不损失保持 w_2 的概率分别是 p 与 $1-p$ 这样一种状况，决策者为完全保险而情愿支付的最高金额是多少？如回答是 G, 则由

$$u(w_2 - G) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)$$

可得到新的点 $[w_3, u(w_3)] = [w_2 - G, pu(w_1) + (1-p)u(w_2)]$.

在决策者按以上描述的方法决定了其财富的效益函数后，这个函数可用来比较两个随机的经济状况，从中作出抉择。用随机变量 X 与 Y 来表示两种经济上的前景，决策者已有财富记为 w_0, 那么当

$$E[u(w_0 + X)] > E[U(w_0 + Y)]$$

时，决策者选择 X, 当

$$E[u(w_0 + X)] = E[u(w_0 + Y)]$$

时，决策者对两者不会感到有差异。

评注

1. 效用理论建立在对概率分布的某种偏好关系与协调性的假设之上，效益函数乃存在偏好关系的数值表示。

2. 效益函数不需要也不可能唯一决定，例如，若

$$u^*(w) = au(w) + b, \qquad a > 0,$$

则

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

等价于

$$E[u^*(X)] > E[u^*(Y)].$$

即，对效益函数的递增线性变换保持偏好关系不变，这一事实在前面已被用到。

3. 如果效益函数是线性的，即

$$u(w) = aw + b, \qquad a > 0,$$

记 $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y$, 那么

$$E[u(X)] = a\mu_X + b > E[u(Y)] = a\mu_Y + b \Longleftrightarrow \mu_X > \mu_Y.$$

换言之，相应于递增线性效益函数的偏好关系与期望的顺序关系相当。因此，期望值原则与效益函数为递增线性时的期望效益规则一致。

§1.3 保险与效益

设决策者拥有一份财产，在下一个会计年度里可能会遭受的意外损失金额 X 是一个随机变量。 X 也可能为 0, 这意味着没有损失，设 X 的分布已知。假如财产面临损失可能的试验能在同等条件下观测许许多多次的话，下一年度的期望损失 $E[X]$ 就可解释成长期平均损失。当然，个体决策者不可能进行这种长期试验。

假定一个保险组织 [保险人 (insurer)] 的建立是为了减轻财产毁坏的财务影响，该保险人将出售契约 [保险单 (policies)], 这种契约规定，当财产在保单的有效期内遭意外毁坏时，保险人将支付财产所有者一笔写明的不超过损失数额的金额。这种与损失

额相联系的支付称为 理赔 (claim) 。作为对保险单上承诺的回报，财产所有者 [被保险人 (insured)] 要支付一点酬金 [保险费 (premium)] 。

保费数额决定于保险人与被保险人采取的经济决策原则。当保险人确定的保费小于财产所有者愿意为保险支付的最高数额时，共同受益的机会就存在。

在个别保险单的财务影响范围内，保险人的效益函数近似直线。在这种情况下，保险人将采取期望值原理来确定保险费 (参见 §1.2 评注 3), 即保险人对保险定的基价为期望损失值 $E[X]=\mu$, μ 称为 纯保费 (net premium) 。考虑到费用开支、纳税、利润以及安全因素，还需在纯保费基础上加入 附加保费 (loading) 。譬如 毛保费 (loaded premium) H 可以是

$$H=\mu(1+\theta)+c, \qquad \theta>0, c>0,$$

其中 μ, θ 可看成与期望损失相关的费用及包含理赔结果可能大于期望值这种风险因素的量，常数 c 则提供与期望损失无关的开销。稍后将说明保险人可能用来决定保险费的其它经济原则。

下面将效益理论应用于财产所有者面对的决策问题，其财富的效益函数为 $u(w)$, 随机损失 X 的分布已知。设当前财富为 w_0, 财产所有者为完全保险而愿意支付给保险人的最高数额 G 满足

$$u(w_0-G)=E[u(w_0-X)], \tag{1.3.1}$$

即以价格 G 购买保险的 (期望) 效益与自己承担风险的期望效益相等，此时决策者对两种选择不会感觉有差异。

如果财产所有者具有递增的线性效益函数

$$u(w)=bw+d, \qquad b>0,$$

那么 (1.3.1) 式成为相当于采取期望值原则

$$u(w_0-G)=b(w_0-G)+d \quad = \quad E[u(w_0-X)]$$

$$
\begin{aligned}
&= E[b(w_0 - X) + d], \\
b(w_0 - G) + d &= b(w_0 - \mu) + d, \\
G &= \mu
\end{aligned}
$$

也就是说，使得这种财产所有者对完全保险与不保险感到无差异的保险费等于期望损失值。在这种情况下，能使各方共同受益的保险契约的存在机会很少。保险人为防止因偏差而导致收入不足，开出的保险费一般超过期望损失值。因此，如果有保险契约发生，财产的所有者肯定不会具有线性效益函数。

效益函数 $u(w)$ 一般是递增函数，财富当然是越多越好。而且，对于多数决策者而言，随着财富的增加，每增加相同数量财富导致的效益增加量将逐渐变小，这就是经济学中边际效益递减的观念。

如果效益函数是光滑的，那么以上两个观察到的性质意味着 $u'(w) > 0$ 与 $u''(w) < 0$, 后者表明 $u(w)$ 是严格下凹函数。

当用严格下凹的效益函数讨论保险决策时，我们将会用到 Jensen 不等式 (Jensen's inequality) 。设 $u''(w) < 0$, X 是随机变量，则当以下期望值存在时

$$E[u(X) \leq u(E[X])^* \tag{1.3.2}$$

成立，这个不等式的一种证明方法可从图中严格下凹函数的图形与其切线的位置关系得出，从图 1.2 中可以看出

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu), \tag{1.3.3}$$

取 $\mu = E[X]$, 以 X 代入 w 并取数学期望，得

$$E[u(X)] \leq E[u(\mu) + u'(\mu)(X - \mu)] = u(\mu) = u(E[X]).$$

* 等式成立当且仅当 X 为常数

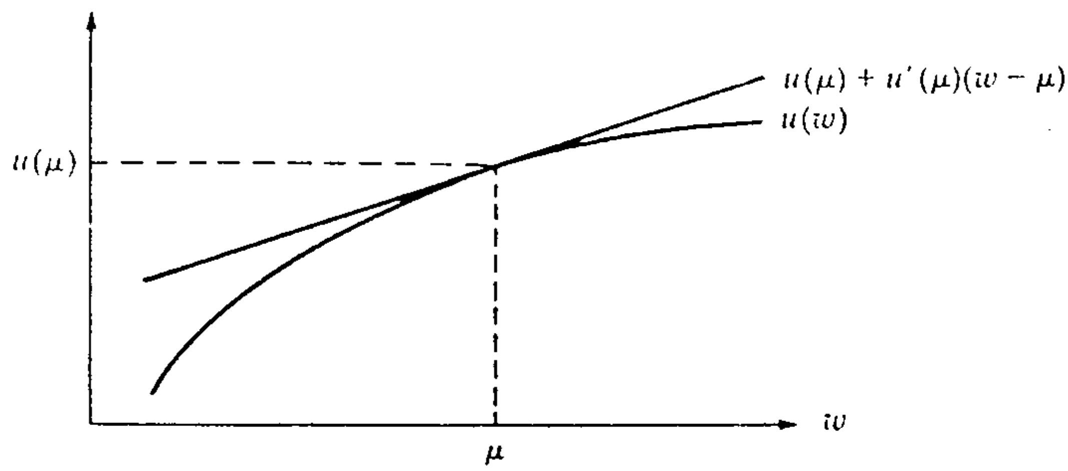

图 1.2　Jensen 不等式之证明

这个不等式在精算数学中有不少应用。

现在我们将 Jensen 不等式应用于保险决策问题 (1.3.1) 。设 $u'(w)>0$, $u''(w)<0$. 根据 Jensen 不等式,

$$u(w_0-G)=E[u(w_0-X)]\leq u(w_0-\mu). \tag{1.3.4}$$

因 $u'(w)>0$, $u(w)$ 是递增函数, 所以从 (1.3.4) 式得出 $w_0-G\leq w_0-\mu$, 或 $G\geq\mu$, 除非 X 是常数, 实际上有 $G>\mu$, 这就是说, 如果 $u'(w)>0$ 且 $u''(w)<0$, 那么决策者为保险愿意支付比期望损失更多的数额。这样的决策者称为是厌恶风险 (risk averse) 的。只要 G 不小于保险人订立的保险费, 就存在有共同受益的保单的机会。

设保险人的财富效益函数为 $u_I(w)$, 其当前财富记为 w_I, 对于随机的损失理赔 X, 保险人能接受的最低保险费 H 应由下式决定:

$$u_I(w_I)=E[u_I(w_I+H-X)]. \tag{1.3.5}$$

上式左端是保险人当前的效益, 右端是保险人收取保费 H 并承诺赔偿随机损失的期望效益。换言之, 当保费为 H 时, 保险人对