Banach空间几何理论

俞鑫泰 编著

华东师范大学出版社

Banach空间几何理论

俞鑫泰 编著

华东师范大学出版社

Banach 空间几何理论

俞鑫泰　编著

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所发行　　上海商务印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：14.25　字数：360 千字
1986 年 8 月第一版　1986 年 8 月第一次印刷
印数：1—5,000 本

统一书号：13135·024　　定价：2.80 元

序

Banach 空间理论是泛函分析的重要组成部分．虽然，一般而论，泛函分析中各种空间理论的研究首先是为算子理论服务的，但是，正如群论在历史上的产生原本出于解代数方程的需要，后来却由于本身的兴趣而发展成为独立的分支一样，Banach 空间理论也有类似情况．

自从 1932 年 Banach 的名著«Théorie des operations lineaires»问世以来，Banach 空间即受到广泛的重视与研究．至于 Banach 空间本身的理论(包括几何理论)，除了个别突破(Clarkson, James)之外在六十年代以前，进展是相当缓慢的．以致长期以来，人们只知道有 Hilbert 空间的几何学而不知有 Banach 空间的几何学．这种情况从六十年代以来，特别是近十年来，有了显著的改变．除了 1973 年 P. Enflo 对于 Banach 问题"在无限维可分 Banach 空间中是否一定存在基?"的否定解决最为人们所知外，举其荦荦大者，就有从支撑点和端点的思想出发来刻划线性泛函性态的 Bishop-Phelps 定理，Krein-Milman 定理以及 Choquet 定理等；有关于单位球上各种凸性、光滑性以至范数可微性的研究，它们在最佳逼近、不动点原理上有重要的应用，有 Rieffel 提出的可凹性概念，它在研究向量测度的 R-N 定理与 Banach 空间中集合的几何性质中起重要作用……，真是成果累累，方兴未艾．

象这样一个发展迅速、对整个泛函分析有影响的领域，理应得到国内数学工作者的重视．俞鑫泰同志以中等篇幅，系统而精炼地介绍了 Banach 空间几何理论的主要内容，其中包括一些最新的结果，旁及尚未解决的问题，读者由此继进，当不难直

接阅读有关的当代文献．我在本书的酝酿中已寄予殷切的期望，于其付梓时，遂为之序．

程其襄

一九八四年十二月一日

前　言

自从 1932 年波兰著名数学家 S. Banach 的著作 «Théorie des operations lineaires» 出版之后，人们开始了 Banacrt 空间理论的系统研究. 由于 Banach 空间是比 Hilbert 空间更广泛的一类空间，所以 Banach 空间的研究遇到了许多与 Hilben 空间研究不同的困难.

1936 年，J. A. Clarkson 首先引入了一致凸 Banach 空间的概念. 他指出，象 Hilbert 空间一样，取值在一致凸 Banach 空间的向量测度的 Radon-Nikodym 定理仍然成立. Clarkson 开创了从 Banach 空间单位球的几何结构出发来研究 Banach 空间性质的方法. 在随后的岁月里，除了 A. Grothendieck 对 Banach 空间算子理论和逼近性质作了卓有成效的工作外，Banach 空间理论的研究进展缓慢.

六十年代以来，特别是在近十年中，Banach 空间的理论，包括它的几何理论，取得迅速的发展. 首先，许多著名的古典问题得到了解决，其中，最重要之一是 1973 年 P. Enflo 给出例子表明可分 Banach 空间未必具有 Schauder 基，从而对 Banach 的古典问题以否定的回答. 其次，许多数学家证明了有关 Banach 空间的重要定理，例如，A. C. James 化费了廿年时间，于 1972 年以较简单的方法证明了自反 Banach 空间的特征化定理，即 Banach 空间是自反的充要条件为每个连续线性泛函达到它的范数，还有著名的可达范数泛函是稠密的 Bishop-Phelps 定理，端点表示的 Choquet 定理等等. 此外，人们根据其他数学学科的需要，从各个不同的角度出发对 Banach 空间进行深入研究，促使 Banach 空间的理论（包括它的几何理论）

的面貌日新月异地变化.

各种凸性和光滑性的研究与最佳逼近密切联系在一起. 1967 年 J. J. Schäffer 考虑 Banach 空间单位球的内度量性质, 引入了单位球的 Girth 曲线概念, 研究 Banach 空间之间接近等距性质, 讨论了平坦空间(flat 空间); 1968 年 E. Asplund 从凸函数的可微性角度引入强(和弱)可微空间, 后来人们称之为 Asplund 空间 (和 w Asplund 空间). 特别地, 1967 年 M. A. Rieffel 将向量测度 Radon-Nikodym 定理与 Banach 空间中有界集的“可凹性”联系起来, 使得人们进一步研究这种称之为RNP 的空间, 将 Banach 空间理论(特别是它的几何理论)的研究推向了一个新的高潮, J. Diestel 和 J. J. Uhl. Jr 等数学家进一步用向量测度方法证明了许多 Banach 空间的定理. 1977 年 J. Diestel & J. J. Uhl. Jr 写了 «Vector measure» 一书, 总结了这方面的许多成果. 书中也列举了若干悬而未决的问题, 随后的年月里, 许多问题相继得到了解决. 1953 年, E. Mourier 发表了第一篇 Banach 空间中概率论的论文, 他证明了取值于 Banach 空间的随机变量的第一强大数定律仍然成立. 从此人们开始了 Banach 空间中概率论的研究, 人们发现随机过程可表示为某个函数空间上的随机变量, 并且许多基本概率定理在 Banach 空间中是否成立很大程度上取决于空间的几何结构. 现在, 取值在 Banach 空间中的鞅已经成为研究 Banach 空间的重要工具之一. 由于无限维规划论的需要, 人们经常使用的是 Hahn-Banach 定理的几何形式——分离定理. 现在已得到许多与凸分析有关的 Hahn-Banach 定理的等价形式, 例如, Krein-Rutuman 定理、Hurwicz 鞍点定理、次微分定理等等, 这些都在很大程度上推动了 Banach 空间理论, 特别是它的几何理论的发展. 在方程论中, 人们不满足于应用 Banach 压缩映像原理, 在实际问题中, 出现了一类更广泛的映像, 例如, 非扩张映像等. 1965 年, W. A. Kirk 证明非扩张映像的不动点存

在与空间的一种叫正规结构的几何性质有关. 随之，人们又进一步探讨使非扩张映像的不动点存在的各种有关的空间几何结构，引入具有各种性质的 Banach 空间. 同时，各种具体的古典 Banach 空间，例如，c_0, $l_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$, $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$的性质研究，促使抽象 Banach 空间的理论进一步发展. J. Lindenstrauss 和 I. Singer 等对 Banach 空间的基的理论进行了深入的探讨，取得了丰硕成果，J. Lindenstrauss & L. Tzafriri 和 I. Singer 分别写了这方面的著作(前者涉及许多其他方面内容). 总之，由于与其他学科的联系，使 Banach 空间理论，包括它的几何理论，越来越丰富. 正因为 Banach 空间理论在其他许多学科中得到广泛应用，使它显示出强大的生命力. 本书试图叙述这一理论的基本内容，并且在适当章节介绍一些最新科研成果.

本书是在我系 1982 年"Banach 空间几何理论"研究生课程讲义的基础上改写而成的.

我们假定读者对拓扑空间理论、泛函分析、测度论方面的基础知识有所了解. 有关内容可在江泽涵著«点集拓扑»、夏道行等著«实变函数论与泛函分析»及王建华译的 Halmos «测度论»中找到. 特别地，关于拓扑空间，我们使用定向列(net)的概念，读者可参阅 A. Wilanski «Functional Analysis» (1964 年)第九章.

线性拓扑空间的基本内容是学习 Banach 空间理论的基础，本书第一部分作了简明扼要的介绍. 这里要感谢复旦大学数学系杨亚立先生，他提供了许多材料. 对线性拓扑空间理论有所了解的读者，可直接从第 II 部分开始阅读.

在书中，列了许多表格，以便读者更清楚地了解各种概念之间的关系. 我们一般是先汇集某些结论，然后加以证明，这对许多要了解 Banach 空间几何理论概貌的读者是方便的. 另外，由于若干证明冗长，往往分几步加以叙述，并且为了保持证明的

连贯性，将某些中间步骤的证明写在后面，用括号括起来，有些读者自己能得出所要结论的，可以跳过这些括号直接阅读下去.

我们希望通过本书的学习，加上阅读为数不多的参考文献，读者就可进入当代有关文献的阅读和开展科学研究.

我系开展 Banach 空间的几何理论的研究是在程其襄先生和张奠宙先生的倡导下进行的. 所以，本书的出版与他们的支持和帮助是分不开的. 中国科学院数学研究所李炳仁先生也对作者给予很多指教，在此一并表示衷心感谢.

值得提出的是，1979 年加拿大达尔豪希大学 A. C. Thompson 教授在南京大学举办"Banach 空间几何讨论班"，使作者获益很多，本书很多方面得力于兹. 在此谨向 Thompson 教授和班上各位老师表示由衷感谢.

华东师范大学数学系　俞鑫泰

1984 年 11 月 15 日

目　　录

第一部分 线性拓扑空间的预备知识

第一章 线性拓扑空间

§1 线性拓扑空间的定义

我们假定大家已经对线性空间和拓扑空间有基本了解. 特别地,在下面叙述中经常使用定向列(net)的概念. 读者可参阅 A. Wilansky 著的 «Functional analysis» 第九章.

线性拓扑空间就是在一个集合中, 同时引入线性结构(+, 数乘运算)和拓扑结构,并使这两种结构是"协调的". 具体定义如下:

定义 1.1.1 X 是数域 K 上的线性空间, 若 X 中引入拓扑 τ, 满足:

(1) $(LT)_1$: $(x, y)\mapsto x+y$ 是 $(X\times X, \tau\times\tau)$ 到 (X, τ) 内连续的映像;

(2) $(LT)_2$: $(\lambda, x)\mapsto \lambda x$ 是 $(K\times X, e\times\tau)$ 到 (X, τ) 内连续的映像, 其中 e 是 K 上通常的 Euclid 拓扑, 则称 τ 为 X 上的线性拓扑, (X, τ) 为线性拓扑空间(数域 K 上的). 在不致引起混淆的情况下,称 X 为线性拓扑空间.

注 1: 上述映像的连续性若用邻域进行描述就是:

(1) 对于每两个 $x, y\in X$, 和 $x+y$ 的邻域 V_{x+y}, 总存在 x 点的邻域 V_x 及 y 点的邻域 V_y, 使 $V_x+V_y\subset V_{x+y}$.

(2) 对于任何 $x\in X$, $\lambda\in K$, 及 λx 的邻域 $V_{\lambda x}$, 总存在 x 点的邻域 V_x 及 λ 的邻域 U_λ, 使 $U_\lambda\cdot V_x\subset V_{\lambda x}$.

注 2: 上述映像的连续性若用 net 来描述就是:

(1) 若 $x_\delta \to x$, $y_\delta \to y$, 则 $x_\delta + y_\delta \to x + y$.

(2) 若 $\lambda_\delta \to \lambda$, $x_\delta \to x$, 则 $\lambda_\delta x_\delta \to \lambda x$.

显然,在范数拓扑下, Banach 空间$(X, \|\cdot\|)$是线性拓扑空间.

容易看到,若在线性空间 X 中,引入平凡拓扑 $\tau = \{\emptyset, X\}$,则(X, τ)必是线性拓扑空间.

关于线性拓扑空间的另外一些例子见 § 4. 关于在线性空间 X 上引入怎样的拓扑,可以使之成为线性拓扑空间见 § 3. 下面首先讨论线性拓扑空间中的一些基本的和常用的性质.

§ 2 一些基本性质

由于线性拓扑是与线性结构"协调"的拓扑,因此,在线性拓扑空间中,集合的代数性质与拓扑性质有很密切的联系. 我们首先引入下面仅与代数运算有关的性质.

定义 1.2.1 线性空间 X 中的集 E 叫做均衡的,如果当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时,有 $\lambda E \subset E$.

注: 当 X 是实数体上的线性空间时,上述条件就是,当 $x \in E$ 时, $[-x, x] \subset E$, 其中 $[-x, x] \equiv \{y; y = \alpha(-x) + (1-\alpha)x, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

定义 1.2.2 线性空间 X 中的集 E 叫做吸收的,如果对任 $x \in X$, 存在 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时,有 $\lambda x \in E$.

定理 1.2.1 若(X, τ)是线性拓扑空间,则下列成立:

(1) 对任 $x_0 \in X$, 及 $c_0 \neq 0$, 映像 $x \mapsto x_0 + c_0 x$ 是 X 到 X 上的一个拓扑同胚.

(2) 若 $\mathscr{U}$ 是 0 点的邻域基(也叫局部基),则对每个 $x \in X$, $\{x + V;\ V \in \mathscr{U}\}$ 就是 x 的邻域基,也就是说线性拓扑空间是齐性的.

(3) $\mathscr{U}$ 中的每个元是吸收的.

(4) 对任意 $U\in\mathscr{U}$, 存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V+V\subset U$.

(5) 线性拓扑空间 (X, τ) 满足 T_3 公理, 即对任何闭集 A 及 $x\notin A$, 可以用不相交的邻域分离.

(6) $\overline{A}=\bigcap\{A+U; U\in\mathscr{U}\}$.

(7) 在线性拓扑空间 X 中下列等价:

① X 是Hausdorff 空间, 即对任何 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 x, y 的邻域 V_x, V_y, 使 $V_x\cap V_y=\emptyset$(满足 T_2 公理)。

② X 是正则的, 即 X 满足 T_1 和 T_3 公理(T_1 公理定义为, 对任 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 x, y 的邻域 V_x, V_y, 使 $x\notin V_x$, $y\notin V_y$).

(8) 在线性拓扑空间 X 中存在由闭的均衡集构成的 0 点邻域基.

证明: (1) 由 $(LT)_1$, $(LT)_2$ 知, 这种映像是 $1-1$, 满且双方连续的. □

由这条性质知, 开集平移是开集; 开集乘以非 0 常数仍然是开集, 对闭集亦然。并且, 由于 $A+U=\bigcup\{a+U;\ a\in A\}$. 故当 U 是开集时, 对任何集 A, 有 $A+U$ 是开集.

(2) 显然, 若 $V\in\mathscr{U}$, 则 $x+V$ 是 x 点邻域. 另一方面, 任取 x 的邻域 U_x, 则 U_x-x 是 0 点邻域, 故存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset U_x-x$, 从而 $x+V\subset U_x$. 因此 $\{x+V; V\in\mathscr{U}\}$ 是 x 点的邻域基. □

由这个性质知, 对线性拓扑空间来说, 任何点的邻域基是由局部基唯一决定的. 下面的讨论将使我们看到, 局部基的不同性质决定了空间的各种不同性质.

(3) 由于映像 $(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 在 $(0, x)$ 点连续, 从而对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 $\lambda_0>0$, 当 $|\lambda|\leqslant\lambda_0$, $y\in V$ 时, 有 $\lambda y\in V$. □

(4) 由于映像 $(x, y)\mapsto x+y$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 从而对任何 $V\in\mathscr{U}$, 存在 $V_1, V_2\in\mathscr{U}$, 使得 $V_1+V_2\subset V$, 令 $V_3=V_1\cap V_2$,

则 $V_3\in\mathscr{U}$, 且 $V_3+V_3\subset V$. □

(5) 若 $x\notin A$, A 为闭集,则 $0\notin A-x$, 且 $A-x$ 为闭集,故存在 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\cap(A-x)=\emptyset$,由(4),取 $V_1\in\mathscr{U}$, 使 $V_1+V_1\subset V$, 则 $(x+V_1)\cap(A-V_1)=\emptyset$, 由(1)、(2)即知$(X,\tau)$满足 T_3 公理. □

(6) 若 $x\in\overline{A}$, 任取 $U\in\mathscr{U}$, 则$(x-U)\cap A\neq\emptyset$, 故 $x\in A+U$. 反之, $x\notin\overline{A}$, 则由(4), 存在 V_1, $V_2\in\mathscr{U}$, 使 $(x+V_1)\cap(A+V_2)=\emptyset$, 更有 $x\notin A+V_2$, 故 $\overline{A}=\cap\{A+U, U\in\mathscr{U}\}$. □

(7) T_1+T_3(正则)$\Rightarrow T_1+T_2\Rightarrow T_2\Rightarrow$独点集是闭集$\Leftrightarrow$

$\overline{\{0\}}=\{0\}\xRightarrow{\text{由(5)}}T_1+T_3$. □

(8) ① 先证: 对任何 0 点邻域 W, 总存在 0 点均衡邻域 V, 使 $V\subset W$. 事实上, 由于$(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 在$(0, 0)$点连续, 故对 0 点任何邻域 W, 存在 $\delta>0$, $N\in\mathscr{U}$, 使得当$|\alpha|<\delta$时, 有 $\alpha N\subset W$. 令 $V=\cup\{\alpha N; |\alpha|<\delta\}$即可.

② 再证: 均衡集的闭包是均衡集. 事实上, 设 A 是均衡集,任取 $x_0\in\overline{A}$, 及 λ_0, 使$|\lambda_0|\leqslant 1$. 由于$(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 在(λ_0, x_0)点连续,从而对任何 $V_{\lambda_0x_0}$ 存在 V_{x_0}, 使 $\lambda_0V_{x_0}\subset V_{\lambda_0x_0}$. 因为 $x_0\in\overline{A}$, 故存在 $a\in V_{x_0}\cap A$. 由于 A 是均衡的,故 $\lambda_0a\in A$, 且 $\lambda_0a\in V_{\lambda_0x_0}$, 从而 $V_{\lambda_0x_0}\cap A\neq\emptyset$, 因此 $\lambda_0x_0\in\overline{A}$.

现在来证明(8). 任取 $U\in\mathscr{U}$, 由(4)存在 $N\in\mathscr{U}$, 使 $N+N\subset U$, 由 ① 可选 0 点均衡邻域 $V\subset N$, 由 ② $\overline{V}$ 是闭的均衡集,由(6), $\overline{V}\subset V+V\subset N+N\subset U$.

令 $\mathscr{U}'=\{V; V$ 是 0 点闭均衡邻域, 且存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset U\}$. 显然, $\mathscr{U}'$ 就是(关于同一拓扑 τ 的)一个新的局部基. □

今后, 我们约定, 在本书中, (X,τ)是 Hausdorff 的, 并且 $\mathscr{U}$ 就是由闭均衡集组成的局部基.

定理 1.2.2 若(X,τ)是线性拓扑空间,则下列成立:

(1) 若 A 是凸集,则 $\overline{A}$ 也是凸集,

同样地，若 X_0 是 X 的线性子空间，则 $\overline{X}_0$ 也是 X 的（闭）线性子空间，从而超平面（指 $f^{-1}(c)=\{x;\ f(x)=c\}$，其中 f 为 X 上的线性泛函）或是闭的，或是在 X 中稠的.

(2) $\overline{x+A}=x+\overline{A}$，$\overline{\lambda A}=\lambda\overline{A}$.

(3) $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$.

(4) $A+\mathrm{int}(B)\subset\mathrm{int}(A+B)$，其中 $\mathrm{int}(B)$ 表示 B 的内点全体.

(5) 若 K_1，K_2 是紧集，则对任何 λ_1，λ_2，有 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 也是紧集.

(6) 若 A 是紧集，B 是闭集，则 $A+B$ 是闭集.

(7) 若 A 是凸集，且 $\mathrm{int}\,A\neq\emptyset$，则 $\overline{A}=\overline{\mathrm{int}\,A}$，$\mathrm{int}\,A=\mathrm{int}\,\overline{A}$.

证明：(1) 若 x，$y\in\overline{A}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，则存在 $\{x_\delta\}$，$\{y_\delta\}\subset A$，使 $x_\delta\to x$，$y_\delta\to y$，由于 A 是凸集，故 $\alpha x_\delta+(1-\alpha)y_\delta\in A$，但 $\alpha x_\delta+(1-\alpha)y_\delta\to\alpha x+(1-\alpha)y$，故 $\alpha x+(1-\alpha)y\in\overline{A}$. □

(2) 因 $x+\overline{A}$ 是闭的，且 $x+A\subset x+\overline{A}$，故 $\overline{x+A}\subset x+\overline{A}$ 反之，$y\in x+\overline{A}$，则 $y-x\in\overline{A}$，从而存在 $\{x_\delta\}\subset A$，使 $x_\delta\to y-x$，故 $x+x_\delta\to y$，但 $x+x_\delta\in A$，因此 $y\in\overline{x+A}$. □

(3) 若 $x\in\overline{A}$，$y\in\overline{B}$，则存在 $\{x_\delta\}\subset A$，$\{y_\delta\}\subset B$，使 $x_\delta\to x$，$y_\delta\to y$，从而 $x_\delta+y_\delta\to x+y$，但 $x_\delta+y_\delta\in A+B$，故 $x+y\in\overline{A+B}$. □

(4) 由于 $A+B\supset A+\mathrm{int}\,B$，且 $A+\mathrm{int}\,B$ 是开集，故 $A+\mathrm{int}\,B\subset\mathrm{int}(A+B)$. □

(5) 容易看到，若 K 是紧集，则 λK 是紧集，并且由于 $(x,\ y)\mapsto x+y$ 是连续的，故 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 是紧集 $\lambda_1K_1\times\lambda_2K_2$ 在上述映像下的像，故 $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$ 是紧的. □

(6) 设 $z\in\overline{A+B}$，则存在 $\{x_\delta+y_\delta\}\subset A+B$，使 $x_\delta+y_\delta\to z$，由于 A 是紧的，故存在子 net$\{x_\alpha\}$，使 $x_\alpha\to x$，从而 $y_\alpha\to z-x\in B$，故 $z=x+(z-x)\in A+B$. □

(7) 先证明，对任 $0\leqslant t<1$，有 $t\overline{A}+(1-t)\mathrm{int}\,A\subset\mathrm{int}\,A$.

事实上，任取 $p\in\operatorname{int}A$，则 $(1-t)(\operatorname{int}A-p)$ 是 0 点邻域，故

$$t\overline{A}=\overline{tA}\subset tA+(1-t)(\operatorname{int}A-p)$$
$$=tA+(1-t)\operatorname{int}A-(1-t)p\subset A-(1-t)p,$$

从而 $t\overline{A}+(1-t)p\subset A$，因此 $t\overline{A}+(1-t)\operatorname{int}A\subset A$，又由于 $t\overline{A}+(1-t)\operatorname{int}A$ 是开集，故 $t\overline{A}+(1-t)\operatorname{int}A\subset\operatorname{int}A$. 因而上述事实成立.

现证(7). 显然，$\overline{A}\supset\overline{\operatorname{int}A}$，反之，任取 $x\in\overline{A}$，再取 $p\in\operatorname{int}A$，则由上面证明知 $(x,p]\equiv\{y; y=tx+(1-t)p, 0\leqslant t<1\}\subset\operatorname{int}A$，从而 $x\in\overline{\operatorname{int}A}$. 故 $\overline{A}=\overline{\operatorname{int}A}$.

又显然有 $\operatorname{int}A\subset\operatorname{int}\overline{A}$，反之，任取 $x\in\operatorname{int}\overline{A}$，再取 $p\in\operatorname{int}A$，容易看到，必存在 $z\in\overline{A}$，使 $x\in(z,p]\subset\operatorname{int}A$，故 $\operatorname{int}A=\operatorname{int}\overline{A}$. □

§3 构成线性拓扑空间的条件

由§2看到，若 (X,τ) 是线性拓扑空间，则存在一个由均衡吸收集组成的局部基 $\mathscr{U}$，对这个局部基来说，当 $W_1, W_2\in\mathscr{U}$，则必存在 $W, W_3\in\mathscr{U}$，使 $W\subset W_1\cap W_2$，$W_3+W_3\subset W_1$. 下面我们将看到，若在线性空间 X 中引入拓扑 τ，使由 τ 决定的局部基满足上述条件，则 τ 必是线性拓扑.

定理 1.3.1 如果 X 是线性空间，$\mathscr{U}$ 是 X 的非空子集族，具如下性质：

(1) $\mathscr{U}$ 中每个元是吸收的.

(2) $\mathscr{U}$ 中每个元是均衡的.

(3) 若 $W_1, W_2\in\mathscr{U}$，则存在 $W\in\mathscr{U}$，使 $W\subset W_1\cap W_2$.

(4) 若 $W_1\in\mathscr{U}$，则存在 $W_2\in\mathscr{U}$，使 $W_2+W_2\subset W_1$.

则当对每个 $x\in X$，取 $\{x+V; V\in\mathscr{U}\}$ 为 x 点邻域基后，X 成为线性拓扑空间(显然，此时 $\mathscr{U}$ 为局部基，且以 $\mathscr{U}$ 为局部基