职工高等工业

考书

复变函数
解题指南

李超志 编

高等教育出

职工高等工业专科学校教学参考书

复变函数解题指南

李超志 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书根据原教育部1983年颁发的职工高等工业专科学校工程数学教学大纲(草案)中复变函数部分的要求，配合陈俊澳、顾昭荣编《复变函数》而编写的、本书的内容编排顺序与教材相应，共分六章．每章由三部分组成．第一部分内容提要，叙述了主要定义、定理和性质；第二部分解题示范，详细解出各种类型的典型例题，并对解题方法加以讲解；第三部分检查题，书末分别情况给出解答、提示和答案．

本书可作为职工高等工业专科学校学生及自学者学习复变函数的辅助读物，也可供其他学习这方面内容的读者参考．

职工高等工业专科学校教学参考书

复变函数解题指南

李超志 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 7.5 字数 156 000

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数 0 001—3 780

ISBN 7-04-000213-2/O·262

定价 1.85 元

前　言

为了辅助各类职工高等工业专科学校的学生学习好“复变函数”这门课程，我们根据1983年12月出版的职工高等工业专科学校的“工程数学教学大纲(草案)”的要求，配合职工高等工业专科学校的“复变函数”教材，编写了这本辅导书.

本书中的各章与教材相应．有内容提要、解题示范和检查题等三个部分．在内容提要中，将该章内容加以整理和总结．在解题示范中，将该章中各种类型的典型例题详细解出，并对解题方法加以讲解，以求读者在学完该部分后，对解法有进一步的体会，并且能够提高独立解题的能力．各章末都有一些检查题，以备读者思考和练习之用．书末还有检查题的解答，对尚未完全掌握解法的读者，这部分内容也可以做为补充例题.

本书由四川大学数学系钟玉泉副教授审稿，霍同平老师也提出了许多宝贵意见，特此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限、经验不足、编写时间十分仓促，书中谬误不妥之处在所难免，欢迎指正.

编　者

1986.12.

目　　录

第一章　复数与复变函数

内容提要

一、复数的概念

1. 虚数单位 i　　$i=\sqrt{-1}$.

2. **复数**　　$z=x+iy$,

其中　　$x=\mathrm{Re}z$　称为 z 的**实部**.

$y=\mathrm{Im}z$　称为 z 的**虚部**.

3. z 的**共轭复数**　$\bar{z}=x-iy$,

其中　$x=\mathrm{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

$y=\mathrm{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

$\bar{\bar{z}}=z$.

4. 注意　复数不能比较大小.

5. 复数的相等

设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 则

$z_1=z_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.①

---

① 符号"$\Longleftrightarrow$"表示充要条件，即当且只当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时 $z_1=z_2$.

二、复数的几种表示法

1. 代数表示法

$$z = x + iy.$$

2. 点表示法

在平面直角坐标系下，用点 $P(x, y)$ 来表示复数 $z = x + iy$. 点 P 所在的平面称为复平面或 z 平面.

3. 向量表示法

在平面直角坐标系下，可以用坐标为(x,y)的自由向量(即在实轴上的投影为 x,而在虚轴上的投影为 y,且可以自由平行移动的向量)来表示复数 $z = x + iy$.

4. 三角表示法

非零复数 $z = x + iy$ 可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,称为 z 的模; $\theta = \operatorname{Arg} z\left(\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}\right)$称为 z 的辐角(图 1.1).

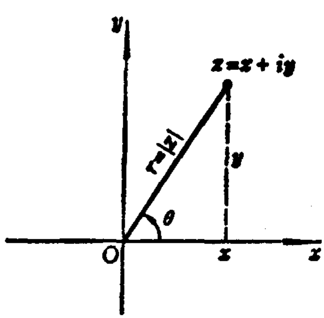

图 1.1

规定：θ 在 $(-\pi, \pi]$ 内的值为辐角的主值，记为 $\arg z(-\pi<\arg z\leqslant\pi)$.

$$\therefore \quad \operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi, \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0, y\gtreqless0(z \text{ 在 I、IV 象限及正实轴上}),\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y\gtrless0(z \text{ 在虚轴上}),\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当 } x<0, y\gtrless0(z \text{ 在 II、III 象限}),\\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0(z \text{ 在负实轴上}),\end{cases}$$

其中 $\qquad -\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}.$

注意 唯有 $z=0$ 的情形特殊，它的模为零而辐角不确定！

5. 指数表示法

非零复数 z 可以表示成 $z=re^{i\theta}$，其中 $r=|z|$, $\theta=\operatorname{Arg} z$.

三、复数的运算

1. 复数的加减法

(1) 设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$，则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

(2) 当复数用向量表示时，复数的加(减)法运算按向量加(减)法则进行(图 1.2).

(3) z_1-z_2 是从点 z_2 到点 z_1 的向量.

$|z_1-z_2|$ 表示 z_1 与 z_2 两点间的距离

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

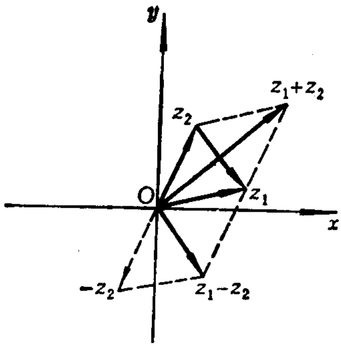

图 1.2

(4) $\left||z_1|-|z_2|\right|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

2. 复数的乘法

(1) 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$, 则

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

(2) 设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$, 则

$$z_1z_2=(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

所以 $$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,$$
$$\mathrm{Arg}z_1z_2=\theta_1+\theta_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

3. 复数的除法

(1) 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2(z_2\neq0)$, 则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

(2) 设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}(z_2\neq0)$, 则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

所以 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

4. 复数的乘方

(1) 设 $z=re^{i\theta}$，则

$$z^n=r^ne^{in\theta}$$

所以 $$|z^n|=r^n=|z|^n,$$

$$\mathrm{Arg}z^n=n\theta=n\mathrm{Arg}z.$$

(2) 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

当 $r=1$ 时有**棣美弗公式**:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

5. 复数的方根

设 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

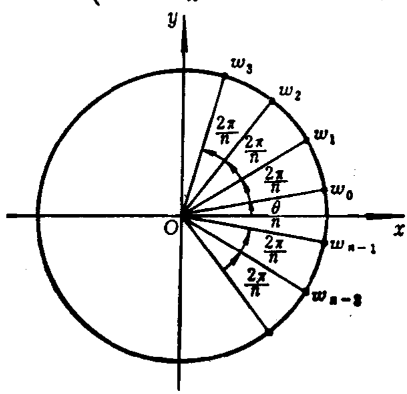

图 1.3

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

复数 z 的这 n 个 n 次方根分布在以 O 为圆心 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上的一个内接正 n 边形的顶点上(图 1.3).

四、复球面与扩充复平面

1. 球面上的点 P 与复平面上的点 z 一一对应(图 1.4).

2. 我们规定在复平面上与北极点 N 相对应的是唯一的一个理想的点，称为**无穷远点**，记为 ∞.

3. 添加上无穷远点的复平面称为**扩充复平面**.

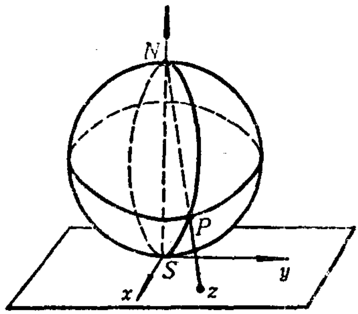

图 1.4

4. 这样，球面上的点与扩充复平面上的点一一对应，称此球面为**复球面**.

五、曲线与区域

1. 曲线

(1) 设 $z(t)=x(t)+iy(t)$，其中 $x(t)$、$y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 为实变量 t 的单值连续函数，则 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 为复平面上的一条**连续曲线**.

(2) 设 $x'(t),y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，则 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 为复平面上的一条**光滑曲线**.

从几何上看，在光滑曲线上任何一点 P 都有唯一的一条切线，并且切线的方向随着 P 点沿曲线连续变化而连续地变

化. 由若干条光滑曲线段连接而成的曲线称为**按段光滑曲线**.

(3) 设曲线 C $z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$, 当 $z(a)=z(b)$ 而且 $t_1\neq t_2(a<t_1, t_2<b)$ 时有 $z(t_1)\neq z(t_2)$, 则称 C 为**简单闭曲线**. C 的**正方向**为逆时针方向, 即当我们在简单闭曲线 C 上沿它的正方向前进时, C 的内部总在我们的左边.

2. 区域

(1) 点 z_0 的**邻域** $|z-z_0|<\delta$ 是一个以 z_0 为圆心, δ 为半径的圆域. 点集 $0<|z-z_0|<\delta$ 称为点 z_0 的一个**去心邻域**.

(2) 在点集 E 内, 若点 z_0 至少有一个邻域, 它的所有的点都属于 E, 则称 z_0 为 E 的**内点**. 若 $z_1(\in E)$ 至少有一个邻域, 它的所有的点都不属于 E, 则称 z_1 为 E 的**外点**. 若 $z_2(\in E)$ 的任意一个邻域内有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点, 则称 z_2 为 E 的**边界点**(图 1.5)

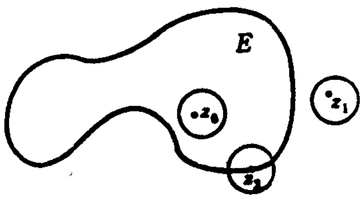

图 1.5

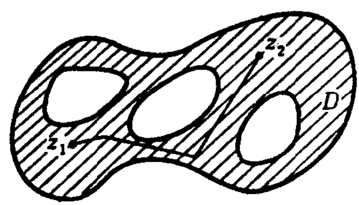

图 1.6

(3) 若点集 D 的每个点均为 D 的内点, 则称 D 为**开集**.

(4) 若点集 D 的任意两点均可用完全属于 D 的折线相连, 则称 D 为**连通集**(图 1.6).

(5) 连通的开集称为**区域**.

(6) 若区域 D 可以被包含在以某点为中心，半径适当大的圆内，则称 D 为**有界区域**，否则称为**无界区域**.

(7) 若区域 D 内的任意一条简单闭曲线的内部完全属于 D，则称 D 为**单连通区域**. 否则，称 D 为**复连通区域**(图 1.7).

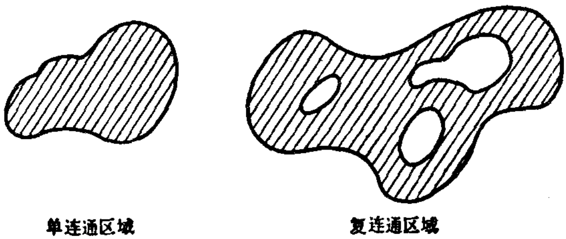

图 1.7

六、复变函数

1. 概念

(1)若有一确定的法则使得对复数集合 E 中的每个复数 z 均有确定的复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的**复变函数**，记为

$$w=f(z).$$

(2) 从几何意义上来说，复变函数可以看作是从 z 平面上的点集 E 到 w 平面上的某个点集 E^* 的映射.

(3) 设 $w=u+iv, z=x+iy$，则

$w=f(z)$，就是 $u+iv=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$，

即

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y). \end{cases}$$

因此，一个复变函数 $f(z)$ 与两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和

$v(x,y)$相对应.

2. 函数的极限

(1) 定义 设复变函数 $w=f(z)$在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.若有一个确定的复数A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 总可以找到正数 $\delta>0$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,$|f(z)-A|<\varepsilon$,则称 A 为当 z 趋于 z_0 时 $f(z)$的**极限**. 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

注意 z 是以任意的方式趋于 z_0 的. 显然,这里极限存在的要求比一元实变函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 严得多.

(2) 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, $A=a+ib$,则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

(3) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,则

(i) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$,

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$,

(iii) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$, $(B\neq 0)$.

(4) 定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ **在** z_0 **连续**.

解 题 示 范

例 1.1 将下列复数表示成 $a+bi$ 的形式.

(1) $\dfrac{3i}{1-i}-\dfrac{2+i}{i}$,　　(2) $\left(\dfrac{1-3i}{2-i}\right)^2$.

分析　要将分数形式的复数化成 $a+bi$ 的形式，只要用分母的共轭复数同时乘分子和分母，再化简就可以得到.

(1) **解法一**　可先将两个复数各自化成 $a+bi$ 的形式后再相减.

$$\frac{3i}{1-i}-\frac{2+i}{i}=\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}-\frac{(2+i)(-i)}{i(-i)}$$

$$=\frac{-3+3i}{2}+\frac{-1+2i}{1}=\left(-\frac{3}{2}-1\right)+\left(\frac{3}{2}+2\right)i$$

$$=-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i.$$

解法二　也可以将两复数先通分，再化简

$$\frac{3i}{1-i}-\frac{2+i}{i}=\frac{(3i)i-(2+i)(1-i)}{i(1-i)}=\frac{-3-(3-i)}{i(1-i)}$$

$$=\frac{-6+i}{1+i}=\frac{(-6+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-5+7i}{2}=-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i.$$

(2) **解** $\left(\dfrac{1-3i}{2-i}\right)^2=\left[\dfrac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right]^2=\left(\dfrac{5-5i}{5}\right)^2$

$$=(1-i)^2=-2i.$$

例1.2　试求使下列等式成立的实数 x 和 y.

(1) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$,

(2) $x+iy=\sqrt{a+bi}$

分析 先将等式两边的复数表示成 $a+bi$ 的形式，再利用"复数相等是实部与实部，虚部与虚部分别相等"的规定列出方程组. 方程组的解是使等式成立的实数.

(1) **解**　先将原等式 $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$ 变

形成$(x+3y)+i(2x-5y)=1-3i$，得出

$$\begin{cases}x+3y=1,\\2x-5y=-3.\end{cases}$$

解方程组可得 $x=-\dfrac{4}{11}$， $y=\dfrac{5}{11}$.

（2）**解** 先将原等式两边平方得 $x^2-y^2+2xyi=a+bi$，得出

$$\begin{cases}x^2-y^2=a, & (1.1)\\2xy=b, & (1.2)\end{cases}$$

将 $y=\dfrac{b}{2x}$代入(1.1)式后可得 $x^2-\dfrac{b^2}{4x^2}=a$，

$$4x^4-4ax^2-b^2=0,$$

$$x^2=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2+16b^2}}{8}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

因为 $x^2>0$， $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$，所以我们只能取

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

同理可得

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

由(1.2)式可知

(i) 当 $b>0$ 时，x、y 取同号．所以

$$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\\[2ex]y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}};\end{cases}$$